تمارين مقرر ياضيات تطبيقية

1) أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x) = x^2, \quad -1 \le x \le 1$ ثم استنتج قيمة

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2}$$

2) أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0 \\ 0 & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$ ثم استنتج قيمة

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mathrm{n}-1)^2}$$

3) أوجد منسلسلة sin–فورييه ومتسلسلة cos–فورييه للدالة $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ 1 < x < 3 \end{cases}$

4) إذا علمت ان حل المعادلة الموجية $\mathrm{u}_{xx} = \mathrm{u}_{\mathrm{tt}}$ لسلك طوله l هو

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin n\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos n\pi t$$

فأوجد المعاملات $a_{\mathrm{n}}, \mathrm{b}_{\mathrm{n}}$ إذا كان $l = 1$ و $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2 \\ -2x+2, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ و

$u_t(x,0) = 0$.

(ارشاد: استخدم الشروط الابتدائية وقارن مع متسلسلة sin–فورييه للدالة $f(x)$)

5) الحل العام لمعادلة الحرارة $u_t = \frac{1}{a^2} u_{xx}$ لسلك طوله l حفظ طرفيه على حرارة 0 هو

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ sin \ \frac{n\pi x}{l} \ e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2 \, l^2} t}$$

(لإيجاد الحل في هذه الصورة انظر المحاضرات)

أ) أوجد b_{n} إذا كان $u(x,0) = f(x)$.

ب) أوجد حرارة سلك $u(x,t)$ طوله 10 حفظ طرفيه الايسر والايمن على حرارة 50 و 70 ودرجة حرارته الابتدائية عند $t = 0$ هي $2\mathrm{x} + 60$.

ج) أوجد حرارة سلك $u(x,t)$ طوله 10 حفظ طرفيه الايسر والايمن على حرارة 50 و 70 ودرجة حرارته الابتدائية عند $t = 0$ هي $\sin\frac{3\pi x}{10}$.

6) أوجد الحرارة المستقرة $u(x,y)$ في صفيحة معدنية مستطيلة ابعادها 10 و 20 حفظ جانبها العلوي على حرارة 70 وبقية الجوانب على حرارة 0.

7) أوجد الحرارة المستقرة $u(x,y)$ في صفيحة معدنية مستطيلة نصف لا نهائية عرضها π إذا حفظ الجانب المحدود على حرارة $\cos x$ والجانبان على حرارة 0 و $u(x,y) \to 0$ عندما $y \to \infty$.

8) الحل العام $u(r,\theta)$ لمعادلة لابلاس $\nabla^2 u := u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta} = 0$ على دائرة نصف قطرها a هو

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\ [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta]$$

(لإيجاد الحل في هذه الصورة انظر المحاضرات)

أ) اوجد قيمة المعاملات $A_0,\ A_n,\ B_n$ إذا كان $u(a,\theta) = f(\theta)$.

ب) أوجد التوزيع الحراري المستقر في صفيحة نصف دائرية نصف قطرها $a = 2$ بحيث الحرارة على الطرف الدائري هي $g(\theta) = 70$ و الحرارة على الطرف المستقيم هي 50.

ج) أوجد التوزيع الحراري المستقر في صفيحة نصف دائرية نصف قطرها $a = 2$ بحيث الحرارة على الطرف الدائري هي $g(\theta) = \theta$ و الحرارة على الطرف المستقيم هي 0.

9) أوجد قيمة التكاملات الاتية:

$$(i)\ I = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx + \int_{-\infty}^{0} x^3\ e^{3x}\, dx, \quad (ii)\ J = \int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^3\, dx,$$

$$(iii)\ I = \int_0^1 x^4 (1-x^2)^3\, dx + \int_0^{\pi/2} cos^3\, x\ dx\ , \qquad (iv)\ J = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x)^4}\ dx$$

10) اثبت ان:

(

ارشاد: استخدم القاعدة: $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\,\pi)}$ لكل $p \in R$