الصيغ التفاضلية

هذا الفصل يتناول التكامل للصِّيغ التفاضلية على السطوح الوسيطية. سنبدأ بدراسة المنحنيات وخصائصها ومن ثم ننتقل إلى السطوح وتعريف الصيغ التفاضلية عليها. وسوف نتطرق في نهاية هذا الفصل إلى نظرية ستوكس.

1.1 المنحنيات الوسيطية *Parametrized Curve*

تعريف 1.1.1 بمنحنى وسيطي نعني دالة متصلة $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, عندها نرمز لصورة المنحنى γ في $\mathbb{R}^n$ بالرمز Γ. تسمى $\gamma(a)$ بداية المنحنى (*initial point*) و $\gamma(b)$ نهايته (*end point*). إذا كان $\gamma(a) = \gamma(b)$ عندها نقول أن المنحنى مغلق (*closed*). نقول أن المنحنى γ بسيط (*simple*) إذا لم يقطع نفسه باستثناء بداية القوس و نهايته (أي أن الدالة γ متباينة على $[a,b)$). إذا كانت $\gamma \in C^1$ فإن المنحنى γ يسمى منحنى أملس (*smooth*). نقول عن المنحنى γ بأنه أملس قطعاً (*smooth piecewise*) إذا وفقط إذا وجدت تقسيمة (*partition*) $P = \{t_0, ..., t_k\}$ و $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ بحيث على كل فترة $[t_{i-1}, t_i],\ i = 1, ..., k$ يكون المنحنى γ مساوياً لمنحنى أملس γ_i معرف على $[t_{i-1}, t_i]$.

ملاحظة 1.1.2 أوردنا في التعريف السابق أن الدالة γ قابلة للتفاضل على $[a,b]$ ونعني بذلك أن التفاضل عند أطراف الفترة يكون محسوباً بأخذ النهاية من جهة واحدة, بمعنى أن

$$\gamma'(a) = \lim_{t \to a^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a}\ ,\ \gamma'(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(b)}{t - b}$$

أمثلة 1.1.3 نورد الآن مجموعة من الأمثلة لمنحنيات:

1 . ليكن $r > 0$. على الفترة $[0, 2\pi]$ نعرف الدالة

$$\gamma_1(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

نلاحظ أن Γ_1 هو عبارة عن الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها r. بحساب التفاضل نجد أن

$$\gamma_1'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

أي أن γ_1 منحنى أملس بسيط ومغلق (لأن $\gamma_1(0) = \gamma_1(2\pi) = (r,0)$). لكن لو قمنا بتغيير مجال الدالة γ_1 ليكون $[0, 4\pi]$ فنحصل على نفس الصورة إلا أن المنحنى لن يكون بسيطاً حيث أن الدالة ستفقد خاصية التباين.

2 . ليكن $u \in \mathbb{R}^n$ و v متجه من $\mathbb{R}^n$ غير صفري, نعرف

$$\gamma_2(t) = u + tv\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

عند تصوير المنحنى نجد أن Γ_2 هو المستقيم المار بالنقطة u باتجاه v وهو منحنى أملس كون $\gamma_2'(t) = v$.

3 . الحلزون المحيط باسطوانة دائرية قائمة والذي يعطى بالدالة:

$$\gamma_3(t) = (r\cos t, r\sin t, t)\ , t \in \mathbb{R}$$

المنحنى أملس لأن

$$\gamma_3'(t) = (-r\sin t, r\cos t, 1)\ , \forall t \in \mathbb{R}$$

وحيث أن المركبة الثالثة للمنحنى γ_3 دالة متباينة فإن المنحنى بسيط.

4 . لتكن $\gamma_4 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ دالة معرفة كالتالي:

$$\gamma_4(t) = \begin{cases} (2t,0) & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (1,2t-1) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن

$$\Gamma_4 = [(0,0),(1,0)] \cup [(1,0),(1,1)]$$

المنحنى أملس قطعاً وبسيط وهو ليس بأملس لأن

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}^-} \gamma_4'(t) = (2,0)\ ,\ \lim_{t\to\frac{1}{2}^+} \gamma_4'(t) = (0,2)$$

وهذا واضح هندسياً لوجود انكسار في الرسم عند $\gamma_4(\frac{1}{2})$.

5 . على الفترة $[-1,1]$, دع

$$\gamma_5(t) = \begin{cases} (t, t\sin\frac{1}{t}) & ,t \neq 0 \\ (0,0) & ,t = 0 \end{cases}$$

الدالة متصلة على الفترة $[-1,1]$ وبالتالي تمثل منحنى إلا أن هذا المنحنى ليس بأملس ولا بأملس قطعاً.

6 . المنحنى $\gamma_6(t) = (t^2, t^3),\ t \in [-1,1]$ هو منحنى أملس لأن $\gamma_6'(t) = (2t, 3t^2)$.

تعريف 1.1.4 نقول عن منحنى أملس $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ بأنه منتظم (*regular*) إذا وفقط إذا كان $\gamma'(t) \neq 0$ لكل $t \in [a,b]$. بالمثل نقول عن γ منتظم قطعاً إذا وفقط إذا كان أملس قطعاً وكانت المنحنيات $\gamma_i, i = 1,...,k$ والناتجة من التقسيمة $P = \{t_0,...,t_k\}$ منحنيات منتظمة على مجالها.

لو أعدنا النظر إلى الأمثلة 1.1.3 نجد أن المنحنيات $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ منتظمة لأن

$$|\gamma_1'(t)| = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = r \neq 0 \Rightarrow \gamma_1' \neq 0,\ \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2'(t) = v \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$|\gamma_3'(t)| = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{r^2+1} \neq 0 \Rightarrow \gamma_3' \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

بينما المنحنى γ_6 غير منتظم لأن $\gamma_6'(0) = (0,0)$

تعريف 1.1.5 (خط المماس لنقطة على منحنى)
ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى أملس قطعاً ومنتظم ولتكن $x_0 = \gamma(t_0) \in \Gamma$ فإننا نعرف متجه المماس عند t_0

$$T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$

عندها نعرف خط المماس للمنحنى γ عند x_0 على أنه مجموعة النقاط

$$T_{x_0}(\Gamma) := \{u \in \mathbb{R}^n :\ u = x_0 + \lambda T(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

مثال 1.1.6 إذا أخذنا المنحنى γ_1 واعتبرنا النقطة $t_0 = \pi$ فإن $\gamma_1(\pi) = (-r, 0)$ ولنا

$$T(\pi) = \frac{\gamma_1'(\pi)}{|\gamma_1'(\pi)|} = \frac{(0,r)}{r} = (0,1)$$

وبالتالي

$$T_{(-r,0)}(\Gamma_1) = \{(-r,0) + \lambda(0,1)\} = \{(-r,\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

وبتصوير خط المماس أعلاه نجد أنه مستقيم عمودي يمر بالنقطة $(-r,0)$ وهذا يتفق مع المفهوم الذي نعرفه عن خط المماس للدائرة.

1.2 طول المنحنى

ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى و $P = \{t_0, ..., t_k\}$ تقسيمة للفترة $[a,b]$. عند قيامنا بتوصيل النقاط
$$x_0 = \gamma(t_0), ..., x_k = \gamma(t_k)$$
نحصل على مضلع طوله وليكن $L(P)$ أقل من أو يساوي طول المنحنى. لاحظ أننا كلما قسمنا الفترة $[a,b]$ إلى فترات أكثر حصلنا على تقريب أفضل لطول المنحنى γ. من خلال هذا الفهم لطول المنحنى نعطي تعريف للمنحنى القابل للتقويم (*rectifiable curve*) ومن بعد ذلك سنعطي نظرية تساعد على حساب طول المنحنيات الملساء.

تعريف 1.2.1 ليكن $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى و $\mathcal{P}[a,b]$ هي مجموعة جميع التقسيمات للفترة $[a,b]$. نقول أن المنحنى γ قابل للتقويم إذا وفقط إذا كان
$$\sup\{L(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} < \infty$$
عندها نعرف طول المنحنى γ على أنه
$$L_\gamma = \sup\{L(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

نظرية 1.2.2 إذا كان $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى أملس فإنه قابل للتقويم ولنا
$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

ملاحظة 1.2.3 من الواضح أن النظرية السابقة صحيحة عندما يكون γ أملس قطعاً ولكن في هذه الحالة يكون
$$L_\gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma_i'(t)|dt$$
حيث $\gamma_1, ...\gamma_k$ هي المنحنيات الناتجة من التقسيمة $P = \{t_0, ..., t_k\}$.

مثال 1.2.4 بتطبيق النظرية السابقة نجد أن طول المنحنى γ_3 على الفترة $[0,10]$ هو
$$L_{\gamma_3} = \int_0^{10} \sqrt{r^2+1}dt = 10\sqrt{r^2+1}$$

مثال 1.2.5 رأينا أن المنحنى γ_4 أملس قطعاً وبالتالي فأن
$$L_{\gamma_4} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4}dt = 2$$

1.3 السطوح *Parametrized Surfaces*

هذا القسم يهتم بدراسة السطوح في $\mathbb{R}^3$, لذا خلال القسم سنعتبر أن U نطاق (مفتوح ومترابط) من $\mathbb{R}^2$.

تعريف 1.3.1 بسطح نعني دالة $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ من صنف $C^k, k \geq 1$. نقول أن السطح بسيط إذا وفقط إذا كانت الدالة f تناظر أحادي, ونقول أنه منتظم إذا وفقط إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ مستقلين خطياً عند جميع عناصر U, حيث
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \frac{\partial f_3}{\partial x_j}), j = 1, 2$$

ملاحظة 1.3.2 على التعريف السابق نود أن نورد بعض الملاحظات

1. عندما نقول أن $S = (U, f)$ سطح من $\mathbb{R}^3$ فإننا نعني وجود نطاق $U \subset \mathbb{R}^2$ ودالة f تحققان التعريف 1.3.1 بحيث $f(U) = S$.

2. كون $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ مستقلين خطياً يقتضي أن المصفوفة f' يوجد بها صفين مستقلين خطياً.

3 . إذا قلنا أن f سطح على $\overline{U}$ فإننا نقصد أن f تحقق شروط التعريف أعلاه على مفتوح يحوي $\overline{U}$.

مثال 1.3.3 لتكن $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ دالة معرفة على الصورة

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f_3(x_1, x_2))$$

حيث f_3 دالة من صنف C^1, فإن

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

ومن هنا نرى أن أول صفين من المصفوفة أعلاه مستقلين خطياً. إي أن السطح الناتج من f منتظم. على سبيل المثال لو كان

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} = B_0^1(\mathbb{R}^2)$$

وكانت f دالة معرفة على U على الصورة

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$$

فإن سطح منتظم ونرى أن S هو النصف العلوي من سطح كرة الوحدة.

مثال 1.3.4 لتكن $U = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ و $f(x_1, x_2) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2, x_2)$, نجد أن

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن السطح S منتظم لأنه عندما $x_1 \neq 0$ فإن

$$\det(Df_1, Df_2) = x_1 \neq 0$$

وهذا يبين أول صفين من مصفوفة f' مستقلان خطياً. وعندما $x_1 = 0$ فإن

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & 0 \\ \sin x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وعلى الرغم أن أول صفين حينها غير مستقلين خطياً إلا أن كلاً منهما يتناوب في الاستقلال خطياً عن الصف الثالث.

تعريف 1.3.5 ليكن $S = (U, f)$ سطح من $\mathbb{R}^3$ فإننا نعرف الصيغ الأساسية الأولى للسطح كالتالي

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle, \ i, j \in \{0, 1\}$$

هذه الصيغ مع صيغ أخرى تلعب دوراً مهماً في دراسة طبيعة السطح الهندسية, كما أننا سنرى لاحقاً كيف يمكن حساب مساحة السطح باستخدام الصيغ الأولى.

مثال 1.3.6 عند حساب الصيغ الأولى للنصف العلوي لسطح كرة الوحدة (مثال 1.3.3) نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (1, 0, \frac{-x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}) \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = (1, 0, \frac{-x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}})$$

وبالتالي يكون

$$g_{11} = 1 + \frac{x_1^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \ g_{22} = 1 + \frac{x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \ g_{12} = g_{21} = \frac{x_2 x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

تعريف 1.3.7 (الفضاء المتجه والمتجه العمودي)
ليكن $S = (U, f)$ سطح منتظم وليكن $s_0 = f(x_0) \in S$, فإن نعرف فضاء المماس للسطح S عند s_0 والذي نرمز له بالرمز $T_{s_0}(S)$ على أنه الفضاء

$$T_{s_0}(S) = \{s_0 + \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

ونعرف متجه الوحدة العمودي عند s_0 على أنه المتجه

$$n(s_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \times \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \times \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\|}$$

ملاحظة 1.3.8 من الملاحظ في التعريف السابق أن المجموعة $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), n(s_0)\}$ مستقلة خطياً وهي أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$. كذلك من الملاحظ أن المتجه $-n(s_0)$ هو متجه عمودي على السطح S ولكنه في الاتجاه المعاكس للمتجه $n(s_0)$.

نعلم أنه لأي متجهين $A, B \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\|A \times B\| = |A|\ |B| \sin\theta,\ \langle A, B\rangle = |A|\ |B| \cos\theta$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}\|A \times B\|^2 &= |A|^2\ |B|^2 \sin^2\theta \\ &= |A|^2\ |B|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |A|^2\ |B|^2 - \langle A, B\rangle^2\end{aligned}$$

وعند وضع $A = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ و $B = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, نحصل على

$$\|\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2}\| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

لاحظ أن المقدار تحت الجذر هو مقدار موجب, لأننا نعلم مسبقاً من متباينة شوارتز أن

$$|\langle A, B\rangle|^2 \leq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle$$

مثال 1.3.9 لتكن $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 2)$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$, فإنه لأي نقطة $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (1, 0, 0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = (0, 1, 0)$$

ومن هنا نجد أن

$$T_{(x_1,x_2,2)}(S) = \{(x_1, x_2, 2) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)\} = \{(x_1 + \alpha, x_2 + \beta, 2)\}$$

في حين أن

$$n((x_1, x_2, 2)) = (0, 0, 1)$$

مثال 1.3.10 إذا كان $S = (U, f)$ السطح المعرف في المثال 1.3.4, فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$$

وبالتالي يكون فضاء المماس عند النقطة $(0, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ هو المستوي

$$T_{(0,\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})}(S) = \{(-\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2} + \lambda, \frac{\pi}{2} + \beta),\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$$

كما أن

$$n((0, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})) = \frac{2}{\sqrt{5}}(1, 0, \frac{1}{2})$$

1.4 مساحة السطح المنتظم

تعريف 1.4.1 ليكن $S = (U, f)$ سطح منتظم فإن مساحته تعطى بالعلاقة

$$A(S) = \int_U \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx_1 dx_2$$

مثال 1.4.2 إذا كان $S(U, f)$ معطى بالدالة

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f_3(x_1, x_2))$$

فإن الصيغ الأساسية تكون

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)^2, g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)^2, g_{12}^2 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)^2$$

وعليه فإن مساحة السطح الذي على هذه الصورة تكون

$$A(S) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1 dx_2$$

فعلى سبيل المثال عند حساب مساحة النصف العلوي من سطح كرة الوحدة نجد أن

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{B_0^1(\mathbb{R}^2)} \sqrt{1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}}\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}\, dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{dx_2 / \sqrt{1 - x_1^2}}{\sqrt{1 - (\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1}})^2}} \right] dx_1 = \int_{-1}^{1} \sin^{-1}(\frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1}}) \Big|_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}}\, dx_1 = 2\pi \end{aligned}$$

ونستنتج من ذلك أن مساحة سطح كرة الوحدة يساوي 4π.

1.5 الصيغ التفاضلية *Differential Forms*

تعريف 1.5.1 لتكن $f_1, ...f_k \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ نعرف الضرب الخارجي على الصورة التالية

$$f_1 \wedge ... \wedge f_k : \overbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}^{k \text{ مرة}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_1 \wedge ... \wedge f_k(v_1, ..., v_k) = \det(f_i(v_j))_{i,j}$$

نلاحظ في التعريف السابق أن الدالة $f_1 \wedge ... \wedge f_k$ هي $k-$خطية (أي أنها خطية على كل مركبة). فعلى سبيل المثال إذا كان $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن

$$f_1 \wedge ... \wedge f_k(v_1 + \lambda u, v_2, ..., v_k) = f_1 \wedge ... \wedge f_k(v_1, v_2, ..., v_k) + \lambda f_1 \wedge ... \wedge f_k(u, v_2, ..., v_k)$$

كما أننا نلاحظ أن $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_k = -f_2 \wedge f_1 \wedge ... \wedge f_k$ وذلك نتيجة تبديل أول صفين من المصفوفة $f_i(v_j)$. بصورة عامة, إذا كانت S_k هي زمرة التباديل على $\{1, ..., k\}$ و $\sigma \in S_k$ فإن

$$f_1 \wedge .... \wedge f_k = sgn(\sigma) f_{\sigma(1)} \wedge f_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge f_{\sigma(k)}$$

وهذا يبين أن الدالة متناوبة. لاحظ أيضاً أنه إذا كان $i \neq j$ ووجد $v_i = v_j$ فإن $\det(f_i(v_j)) = 0$. الأمر ينطبق أيضاً عندما $f_i = f_j$.

مثال 1.5.2 ليكن $e_1,...,e_n$ الأساس الطبيعي للفضاء $\mathbb{R}^n$. نعرف
$$e_j^*(x) = x_j,\ \forall x = (x_1,...,x_n), j \in \{1,...,n\}$$
نجد أن $e_j,\ j = 1,...,n$ دوال خطية وإذا كان $y = (y_1,...,y_n)$ فإن
$$e_i^* \wedge e_j^*(x,y) = \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = x_i y_j - x_j y_i$$

لاحظ أنه لكل $y \in \mathbb{R}^n$ فإن
$$dx_j(y) = (0,...,\overbrace{1}^{\text{المركبة } j},0,...,0) * \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_j = e_j^*(y)$$
وبالتالي نستطيع أن نكتب $dx_j = e_j^*,\ j = \{1,...,n\}$.

مثال 1.5.3 لتكن $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للتفاضل وليكن $x \in \Omega$. نعلم من دراستنا في هذا المقرر أن $df(x) = f'(x) \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, ولنا
$$df(x)(y) = (D_1 f(x),...,D_n f(x)) * \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n D_j f(x) y_j = \sum_{j=1}^n D_j f(x) dx_j(y)$$
وبحذف x و y من المساواة السابقة, نجد أن $df = \sum_{j=1}^n D_j f dx_j$

تعريف 1.5.4 لتكن $\mathcal{A}_k,\ k \geq 1$ هي مجموعة الدوال $k-$خطية والمتناوبة ($\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$). نقول أن ϕ صيغة تفاضلية من الرتبة k على مجموعة مفتوحة Ω من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت
$$\begin{array}{rccc} \phi: & \Omega & \longrightarrow & \mathcal{A}_k \\ & x & \mapsto & \phi(x) \end{array}$$

ملاحظة 1.5.5 إذا كانت الدالة $f \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ و y متجه من $\mathbb{R}^n$ فإن
$$f(y) = f(\sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n f(e_j) dx_j(y)$$
ومن هنا يتضح لنا أن المجموعة $\{dx_1,...,dx_n\}$ تشكل أساساً للفضاء المتجه $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. أي أن
$$\mathcal{A}_k = \{\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},\ a_{i_1,...,i_k} \in \mathbb{R}\}$$
اختيارنا للعناصر $\{i_1,...,i_k\}$ يجنبنا تكرار نفس العنصر بإشارة مختلفة. وهذا يبين أن الفضاء $\mathcal{A}_k$ بعده
$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
ومن خلال هذه الملاحظة نتوصل إلى التعريف التالي للصيغ التفاضلية من الرتبة k.

تعريف 1.5.6 نقول أن φ صيغة تفاضلية من الرتبة k على مفتوح Ω من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت ممثلة على الصورة
$$\varphi = \sum_{i_1<...<i_k} \varphi_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$
حيث $\varphi_{i_1,...,i_k}$ دوال قيمها حقيقية معرفة على Ω. إذا كانت هذه الدوال من صنف C^l فإننا نقول أن الصيغة التفاضلية φ من الصنف C^l و عندها نرمز لفضاء الصيغ من الرتبة k والصنف C^l على Ω بالرمز $\mathcal{D}_k^l(\Omega)$. ولنا لكل $x \in \Omega$ و $v_1,...,v_k$ متجهات من $\mathbb{R}^n$ فإن
$$\varphi(x;(v_1,...,v_k)) = \sum_{i_1<...<i_k} \varphi_{i_1,...,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}(v_1,...,v_k)$$

من الآن وصاعداً إذا افترضنا أن $|I| = k$ فأننا نعني أن $I = \{i_1,...,i_k\}$ بحيث $i_1 < ... < i_k$ وأن $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.
وبذلك تكون $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\Omega)$ لها التمثيل
$$\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi_I dx_I$$

1.6 العمليات على الصيغ التفاضلية

تعريف 1.6.1 (الضرب الخاجي *Wedge Product*)
ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$. إذا كانت $\varphi \in \mathcal{D}^l_k(\Omega)$ و $\psi \ni \mathcal{D}^l_m(\Omega)$ فإن الضرب الخارجي $\varphi \wedge \psi \in \mathcal{D}^l_{k+m}(\Omega)$ معرف على الصورة التالية

$$\varphi \wedge \psi = \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \varphi_I \psi_J dx_I \wedge dx_J$$

مثال 1.6.2 لتكن f و g دوال قابلة للتفاضل من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}$. رأينا سابقاً أن

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\ ,\ dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2$$

وبالتالي فإن

$$df \wedge dg = (\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1})dx_1 \wedge dx_2$$

نظرية 1.6.3 ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$. إذا كان $\varphi, \theta \in \mathcal{D}^l_k(\Omega)$ و $\psi \in \mathcal{D}^l_m(\Omega)$ فإن

1. $\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl}\psi \wedge \varphi$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\varphi + \lambda\theta) \wedge \psi = \varphi \wedge \psi + \lambda(\theta \wedge \psi)$

3. $(\varphi \wedge \theta) \wedge \psi = \varphi \wedge (\theta \wedge \psi)$

برهان سنقوم ببرهان الفقرة الأولى, ونترك برهان الفقرتين 2 و 3 كتمرين للقارئ. لنفرض أن

$$\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi_I dx_I\ ,\ \psi_I = \sum_{|I|=m} \psi_J dx_J$$

من تعريف الضرب الخارجي للصيغ التفاضلية نجد أن

$$\begin{aligned}\varphi \wedge \psi &= \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \varphi_I \psi_J\ dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \varphi_I \psi_J\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_m}\end{aligned}$$

لاحظ أنه من الخواص الناتجة من تعريف 1.5.1 يكون

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} = (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

وبالتالي فإن

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^k \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \varphi_I \psi_J\ dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} ... \wedge dx_{j_m}$$

نقوم بتكرار نفس العملية بالنسبة للصيغة dx_{j_2} وهكذا دواليك فنتحصل على

$$\begin{aligned}\varphi \wedge \psi &= (-1)^{2k} \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \varphi_I \psi_J\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_3} ... \wedge dx_{j_m} \\ &\vdots \\ &= (-1)^{kl} \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \varphi_I \psi_J\ dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_m} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\ &= (-1)^{kl}\psi \wedge \varphi\end{aligned}$$

■

تعريف 1.6.4 (التفاضل الخارجي للصيغ التفاضلية)
ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\Omega)$ فإننا نعرف تفاضل φ على أنه الصيغة التفاضلية $d\varphi \in \mathcal{D}_{k+1}^{l-1}(\Omega)$ والمكتوبة على الصورة

$$d\varphi = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

إذا كان $d\varphi = 0$ عندها نقول أن φ مغلقة (*Closed*). ونقول أن φ مضبوطة (*Exact*)إذا وفقط إذا وجدت $\psi \in \mathcal{D}_{k-1}(\Omega)$ بحيث $d\psi = \varphi$.

مثال 1.6.5 على $\mathbb{R}^2$ إذا كانت $\varphi_1 = ydx + xdy$. بين أن φ مغلقة. هل هي مضبوطة؟

الحل

بحساب التفاضل نجد أن

$$d\varphi_1 = dy \wedge dx + dx \wedge dy = -dx \wedge dy + dx \wedge dy = 0$$

لاحظ أن φ_1 صيغة تفاضلية من الرتبة الأولى وبالتالي لو كانت مضبوطة لوجدت دالة ψ بحيث $d\psi = \varphi_1$ أي أن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \ , \ \frac{\partial \psi}{\partial y} = x \Rightarrow \psi = xy + c, \ c \in \mathbb{R}$$

إذاً φ_1 مغلقة و مضبوطة.

مثال 1.6.6 لتكن $\varphi_2 = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ صيغة تفاضلية على $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ من الرتبة الأولى. نجد أن

$$d\varphi_2 = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0$$

بالتالي فإن φ_2 صيغة مغلقة. إلا أن هذه الصيغة ليست مضبوطة وسنرى تبيان ذلك لاحقاً.

من خلال المثالين السابقين يبرز لنا تساؤل حول العلاقة بين الصيغ المغلقة والمضبوطة. النظرية التالية تبين لنا أن كل صيغة مضبوطة تكون مغلقة إلا أنه كما رأينا في المثال 1.6.6 فإن ليست كل صيغة مغلقة تكون مضبوطة.

نظرية 1.6.7 ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\Omega), \ l \geq 2$ فإن $d^2\varphi = 0$.

لاحظ أنه كنتيجة لهذه النظرية فإن كل صيغة مضبوطة تكون مغلقة كما أسلفنا ذكره. ذلك أنه لوكانت $\varphi \in \mathcal{D}_k^1(\Omega)$ مضبوطة فإنه يوجد $\psi \in \mathcal{D}_{k-1}^2(\Omega)$ بحيث $d\psi = \varphi$ وبالتالي من النظرية يكون $d\varphi = d(d\psi) = 0$.

برهان لتكن $\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi_I dx_I$. بما أن d خطيه فإنه يكفي برهان أن $d^2\varphi_I dx_I = 0, \forall I$. ولكن

$$\begin{aligned} d^2\varphi_I dx_I = d(d\varphi_I dx_I) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right) \\ &= \sum_{j,s=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_s \partial x_j} dx_s \wedge dx_j \wedge dx_I \\ &= \sum_{j,s=1, \ s<j}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_s \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_j \partial x_s} \right) dx_s \wedge dx_j \wedge dx_I \end{aligned}$$

وبما أن $\varphi_I \in C^2$ فإن

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_s \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_j \partial x_s} \right) = 0 \ , \ \forall j, s \in \{1, .., n\}$$

وبذلك نتحصل على المطلوب. ∎

نظرية 1.6.8 (خواص التفاضل الخارجي)
ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $\varphi, \theta \in \mathcal{D}_k^1(\Omega)$ ولتكن $\psi \in \mathcal{D}_m^1(\Omega)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن

1. $d(\varphi + \lambda\theta) = d\varphi + \lambda d\theta$

2. $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge \psi$

برهان سنقوم ببرهان الفقرة الثانية ونترك الأولى كتمرين. لتكن $\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi_I dx_I$ و $\psi = \sum_{|J|=m} \psi_J dx_J$ فإن

$$d\varphi \wedge \psi = \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} \psi_J dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J,$$

$$(-1)^k \varphi \wedge d\psi = \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_I \frac{\partial \psi_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J$$

من ناحية أخرى فإن

$$\begin{aligned} d(\varphi \wedge \psi) &= \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\varphi_I \psi_J)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} \psi_J dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{|I|=k,\ |J|=m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_I \frac{\partial \psi_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

■

1.7 تكامل الصيغ التفاضلية على السطوح والمنحنيات

تعريف 1.7.1 ليكن $S = (U, f)$ سطح منتظم من $\mathbb{R}^3$. بصيغة تفاضلية $\varphi \in \mathcal{D}_2^l(S)$ نعني

$$\varphi = \sum_{i_1 < i_2} \varphi_{i_1,i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2},\ \varphi_{i_1,i_2} \in C^l(\Omega, \mathbb{R})$$

بحيث لكل $s \in S$ و $v_1, v_2 \in T_s(S)$ فإن

$$\varphi(x; (v_1, v_2)) = \sum_{i_1 < i_2} \varphi_{i_1,i_2}(s) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}(v_1, v_2)$$

ملاحظة 1.7.2 لاحظ أن الفضاء $T_s(S)$ مولد كما درسنا سابقاً من $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ حيث $f(x) = s$, وبالتالي فإن صيغة dx_{i_1} و dx_{i_2} ستتغير بتغير النقطة s وهذا أعم من حالة الصيغ على المجموعات المفتوحة من $\mathbb{R}^n$ فقد رأينا هناك أن الصيغ $dx_1, .., dx_n$ تشكل أساساً للفضاء $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ وذلك لأن فضاء المماس ثابت عند كل نقطة وهو $\mathbb{R}^n$.

تعريف 1.7.3 $(The\ pull - back)$
ليكن Ω و Ω' مفتوحين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ على التوالي و لتكن $f : \Omega' \longrightarrow \Omega$ دالة من صنف C^1 فإنه لكل $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\Omega)$ نعرف الانسحاب $f^*\varphi$ $(pull - back)$ على أنه الصيغة التفاضلية $f^*\varphi \in \mathcal{D}_k^1(\Omega')$ بحيث لكل $x \in \Omega'$ و $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^m$ فإن

$$f^*\varphi(x; (v_1, ..., v_m)) = \varphi(f(x); [f'(x)](v_1), ..., [f'(x)](v_k))$$

مثال 1.7.4 إذا f كما في التعريف السابق و $\varphi = dx_j$ فإنه لكل $x \in \Omega'$ و $v \in \mathbb{R}^m$ يكون

$$f^* dx_j(x; v) = dx_j(f(x); [f'(x)](v)) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_q} v_q = df_j(x; v)$$

من المثال السابق نجد أنه إذا كانت $\varphi = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \varphi_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ فإن

$$f^*\varphi = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \varphi_{i_1,\ldots,i_k} \circ f \; df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$$

مثال 1.7.5 ليكن $f(t) = (\cos t, \sin t), \forall t \in [0, 2\pi]$ رأينا سابقاً أن صورة f هي دائرة الوحدة في $\mathbb{R}^2$ ونجد من تعريف الانسحاب أن

$$f^*\varphi_1 = \sin t \; d(\cos t) + \cos t \; d(\sin t) = (-\sin^2 t + \cos^2 t) \; dt$$

وعند اعتبار الصيغة التفاضلية φ_2 نجد أن

$$f^*\varphi_2 = \frac{-\sin t d(\cos t) + \sin t d(\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = dt$$

مثال 1.7.6 ليكن $S(U, f)$ السطح المعرف بالدالة

$$f : U = [0, 2\pi] \times [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, x_2)$$

ولتكن $\varphi_3 = (z^2 + y) \; dx \wedge dz$, فإن

$$f^*\varphi_3 = x_2^2 + \sin x_1 \; df_1 \wedge df_3$$

وبحساب الضرب الخارجي نجد أن

$$df_1 \wedge df_3 = -\sin x_1 \; dx_1 \wedge dx_2$$

إذاً $f^*\varphi_3 = (-x_2^2 \sin x_1 + \sin^2 x_1) \; dx_1 \wedge dx_2$.

بعد أن تعرضنا لمفهوم الانسحاب نجد أنفسنا في حالة جيدة للحديث عن التكامل على السطوح والمنحنيات.

تعريف 1.7.7 (التكامل على المنحنيات)
ليكن $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ منحنى أملس قطعاً $\varphi \in \mathcal{D}_1(\Gamma)$ فإننا نعرف تكامل φ على Γ كالتالي

$$\int_\Gamma \varphi = \int_a^b \gamma^*\varphi$$

مثال 1.7.8 أوجد تكامل الصيغة التفاضلية φ_1 على القطع Γ الذي معادلته $x^2 + 4y^2 = 1$.

الحل

إذا وضعنا $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}\sin t$ نجد أن $x^2 + 4y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ وبالتالي فإن الدالة التي تكون صورتها المنحنى Γ هي

$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t), \;\; t \in [0, 2\pi]$$

إذاً

$$\int_\Gamma \varphi_1 = \int_0^{2\pi} \gamma^*\varphi_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t \; dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t \; dt = 0$$

مثال 1.7.9 ليكن γ_1 و φ_2 كما في الأمثلة السابقة, نجد أن

$$\int_{\Gamma_1} \varphi_2 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

تعريف 1.7.10 (التكامل على السطوح)
ليكن $S = (U, f)$ سطح منتظم من $\mathbb{R}^3$ و $\varphi \in \mathcal{D}_2(S)$ فإن تكامل الصيغة φ على السطح S يعرف كالتالي

$$\int_S \varphi = \int_U f^*\varphi$$

مثال 1.7.11 ليكن $S = (U, f)$ السطح المعطى في المثال 1.7.6, فإن

$$\begin{aligned}\int_S \varphi_3 = \int_U f^*\varphi_3 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -x_2^2 \sin x_1 + \sin^2 x_1 \; dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_0^2 -x_2^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin x_1 \; dx_1 \right) dx_2 + \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 x_1 \; dx_1 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 1 - \cos 2x_1 \; dx_1 \right) dx_2 = 2\pi\end{aligned}$$

مثال 1.7.12 ليكن $S = (U, f)$ هو السطح المعرف بالدالة

$$\begin{aligned} f : U = [0,1] \times [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, x_1^2 + x_2)\end{aligned}$$

أوجد $\int_S \varphi$ حيث $\varphi = 2x(dx \wedge dy + dy \wedge dz + dx \wedge dz)$.

الحل

نقوم بحساب $f^*\varphi$ فنجد أن

$$\begin{aligned} f^*\varphi &= 2x_1 \; (dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge d(x_1^2 + x_2) + dx_1 \wedge d(x_1^2 + x_2)) \\ &= 2x_1(2 - 2x_1) dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\int_S \varphi = 4 \int_{-1}^1 \int_0^1 x_1 - x_1^2 \; dx_1 dx_2 = \frac{4}{6}$$

نعود الآن للعلاقة بين الصيغة المضبوطة والمغلقة وذلك من خلال استعراض نظرية بوانكريه.

تعريف 1.7.13 ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $a \in \Omega$ فإننا نقول أن Ω نجمي ($Star - shaped$) في a إذا وفقط إذا كانت القطعة $[a, x] \subset \Omega$ لكل $x \in \Omega$.

لاحظ أن المجموعة المحدبة نجمية عند جميع نقاطها. إلا أن العكس غير صحيح. فمثلاً $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ هو نجمي عند أي نقطة تقع على محور x−الموجب, إلا أنه غير محدب.

نظرية 1.7.14 (نظرية بوانكريه)
ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ونجمي عند أحد نقاطه a. إذا كانت $\varphi \in \mathcal{D}_k^1(\Omega)$ صيغة تفاضلية مغلقة على Ω فإنها مضبوطة.

برهان لنفرض أن $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi_j dx_j$ وأن $a = 0$. بما أن $d\varphi = 0$ إذاً

$$\begin{aligned}&\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k<j} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) dx_k \wedge dx_j\end{aligned}$$

وبالتالي فإنه لكل k, j يكون

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}.$$

الآن, عرف

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(tx) \; dt$$

لاحظ أن التكامل أعلاه معرف لأن Ω نجمي عند الصفر وبالتالي $tx \in \Omega$ لكل $x \in \Omega$ ولكل $t \in [0,1]$. بحساب المشتقات الجزئية نجد أن

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{j=1}^n t x_j \frac{\partial \varphi_j(tx)}{\partial x_k} + \varphi_k(tx)\ dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n t x_j \frac{\partial \varphi_k(tx)}{\partial x_j} + \varphi_k(tx)\ dt$$

لتكن $h(t) = \varphi_k(tx)$ عندها يكون $h'(t) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial \varphi_k(tx)}{\partial x_j}$. إذاً بالتعويض فيما سبق نحصل على

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \int_0^1 (th'(t) + h(t))dt = h(1) = \varphi_k(x)$$

ومن ذلك ينتج أن

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^n \varphi_k dx_k = \varphi$$

■

مثال 1.7.15 في $\mathbb{R}^3$ فإن الصيغة التفاضلية $\varphi = z\cos x\ dx \wedge dy - \sin x\ dy \wedge dz$ مضبوطة. وذلك لأن

$$d\varphi = \cos x\ dx \wedge dy \wedge dz - \cos x\ dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

أي أن الصيغة مغلقة وبالتالي من بوانكريه تكون مضبوطة.

1.8 نظرية ستوكس

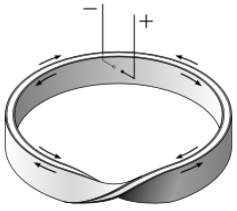
نظرية ستوكس هي واحدة من النظريات المهمة والتي لها تطبيقات واستخدامات جمة في مختلف مجالات الرياضيات. وبعد دراستنا لعديد المفاهيم في هذا المقرر فنحن في حالة استعداد ذهنية جيدة لنستوعب مفهوم هذه النظرية.

تعريف 1.8.1 (قابلية التوجيه)
ليكن $S = (U, f)$ سطح منتظم نقول أنه قابل للتوجيه (*Orientable*) إذا وفقط إذا أمكن اختيار المتجهات العمودية $n(s),\ s \in S$ بحيث يكون التطبيق

$$\begin{array}{rccc} N: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & s & \mapsto & n(s) \end{array}$$

تطبيقاً متصلاً. وبنفس المفهوم نعرف المنحنيات القابلة للتوجيه.

يجدر بنا الإشارة إلا أنه ليس كل سطح يكون قابلاً للتوجيه. فعلى سبيل المثال شريط موبيس والموضح بالشكل ليس قابلاً للتوجيه للوجود نقطة منه بحيث يكون المتجه العمودي باتجاه الخارج عند الانطلاق وباتجاه الداخل عند الدوران والعودة لنفس النقطة. الأمر نفسه ينطبق على المنحنيات (فكر في منحنى غير قابل للتوجيه؟!).



شريط موبيس

نظرية 1.8.2 (نظرية قرين)
ليكن U نطاق من $\mathbb{R}^2$ بحيث يكون ∂U (حدود U) عبارة عن منحنى جوردن (منتظم قطعاً بسيط ومغلق) فإنه لكل صيغة تفاضلية $w \in \mathcal{D}_1^1(U)$ يكون

$$\int_U dw = \int_{\partial U} w.$$

فإذا كانت $w = w_1 dx_1 + w_2 dx_2$ فإننا نحصل الصيغة التالية لنظرية قرين

$$\int_{\partial U} w_1 dx_1 + w_2 dx_2 = \int_U \left(-\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2$$

هذه النظرية تعمم النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل, فلو وضعنا $U = [a,b] \subset \mathbb{R}$ و f دالة متصلة على $[a,b]$ ولتكن F دالة تحقق أن $F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a,b)$ فإن التفاضل الخارجي $dF = f(x)dx$, ومن قرين لنا

$$\int_{\partial U} F = \int_U dF = \int_{\partial U} f(x)dx$$

لكن $\partial U = \{b,a\}$ إذاً

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

ملاحظة 1.8.3 إذا لم نعطي علاقة تصف المجموعة U فإننا سنعتبر الدوران لحدود U بالاتجاه الموجد (مع اتجاه الطواف). وعندما نتعرض لقاعدة التدوير سنرى كيف يمكن للعلاقة التي تصف سطح ما بأن تغير في دوران الحدود.

تطبيقات على نظرية قرين

- رأينا سابقاً أن الصيغة التفاضلية $\eta = \frac{-y\ dx + x\ dy}{x^2+y^2}$ مغلقة على $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ وأنه على دائرة الوحدة γ_1 يكون

$$\int_{\gamma_1} \eta = 2\pi$$

فلو كانت η مضبوطة فإنه توجد دالة ψ بحيث $d\psi = \eta$ وبالتالي من نظرية قرين يكون

$$\int_{\gamma} d\psi = \psi(\gamma_1(2\pi)) - \psi(\gamma_1(0)) = 0$$

لكن

$$\int_{\gamma_1} d\psi = \int_{\gamma_1} \eta = 2\pi$$

وهذا تناقض. وهذا يوضح أن η مغلقة إلا أنها غير مضبوطه كما ذكرنا سابقاً. والسبب يكمن في أن $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ليس بنجمي عند أي نقطه من نقاطه.

- ليكن U كما في نظرية قرين فإنه يمكننا حساب مساحة U باستخدام التكامل التالي

$$A(U) = \int_{\partial U} -y\ dx = \int_{\partial U} x\ dy = \frac{1}{2}\int_{\partial U} -y\ dx + x\ dy$$

وذلك لأن

$$\int_{\partial U} -y\ dx = \int_U d(-y\ dx) = \int_U dxdy$$

مثال 1.8.4 إذا كانت $w = (-y + x^3)dx + (5y^4 + x)dy$ و U هي المنطقة المحصورة بالقطع $\Gamma := x^2 + 4y^2 = 1$, فإن

$$\int_\Gamma w = \int_U dw = \int_U 2\ dxdy = 2A(U)$$

لكن من التطبيقات السابقة رأينا أن

$$A(U) = \int_\Gamma x\ dy$$

لاحظ أن المنحنى Γ يُعطى على الصورة

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$$

وبالتالي نجد أن

$$A(u) = \int_0^{2\pi} \cos t\ d(\frac{1}{2}\sin t) = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos^2 t\ dt = \frac{\pi}{2}$$

إذاً $\int_\Gamma w = \pi$.

تمرين 1.8.5 ليكن $a, b > 0$ أثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بالقطع $\Gamma_{a,b} := a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ هي $\frac{\pi}{ab}$.

تعريف 1.8.6 (تدوير الحدود)
ليكن $U = [0, a] \times [0, b]$ حيث a, b أعداد موجبة فإن تدوير حدود U يعطى على الصورة

$$\partial U = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$$

حيث

$$\sigma_1 = [(0, 0), (a, 0)],\ \sigma_2 = [(a, 0), (a, b)]$$
$$\sigma_3 = [(a, b), (0, b)],\ \sigma_4 = [(0, b), (0, 0)]$$

الآن إذا كان $S(U, f)$ سطح منتظم قابل للتوجيه من $\mathbb{R}^3$ فإن تدوير ∂S يعطى على الصورة

$$\partial S = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4,\ \Sigma_j = f(\sigma_j), j = 1, 2, 3, 4.$$

مثال 1.8.7 ليكن $S = (U, f)$ هو قرص الوحدة في $\mathbb{R}^2$ والمعرف كالتالي

$$f : U = [0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(\theta, r) = ((1 - r)\cos\theta, (1 - r)\sin\theta)$$

فإن

$$\Sigma_1 = f(\sigma_1) = f(\theta, 0) = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\Sigma_2 = f(\sigma_2) = f(2\pi, r) = (1 - r, 0)$$
$$\Sigma_3 = f(\sigma_3) = f(2\pi - \theta, 1) = (0, 0)$$
$$\Sigma_4 = f(\sigma_4) = f(0, 1 - r) = (r, 0)$$

لاحظ أن $\Sigma_2 = -\Sigma_4$, كما أن $\Sigma_3 = (0, 0)$ بعده يساوي صفر أي أن تكامل أي صيغة تفاضلية من الرتبة الأولى يساوي صفر. إذاً $\partial S = \Sigma_1$ وهي دائرة الوحدة بالاتجاه الموجب. لو تتبعنا الدوران للحدود في هذا المثال سنجد كأنه جسيم يتحرك على S بالصورة التالية. يبدأ الجسيم من النقطة $(1, 0)$ يدور دورة كاملة ليعود لنفس النقطة. بعد ذلك يتحرك الجسيم على القطعة $[(1, 0), (0, 0)]$ ثم يعود بالاتجاه المعاكس إلى نقطة الانطلاق $(1, 0)$ وهذا يفسر لماذا يكون $\Sigma_2 = -\Sigma_4$. (كيف سيكون شكل الدوران لو استبدلنا $1 - r$ بِ r في صيغة f؟!).

مثال 1.8.8 ليكن D هو النطاق الموضح بالشكل أدناه وليكن $\gamma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ هو المنحنى المغلق الخارجي من D و $\gamma_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ هو المنحنى المغلق الداخلي. سنبين أن $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$. النطاق D يمكن وصفة بالدالة

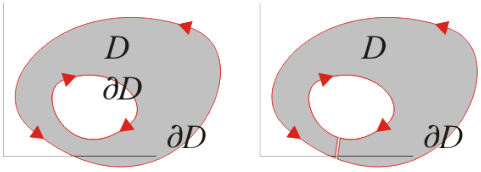
$$f : U = [0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(t, r) = (1 - r)\gamma_1(t) + r\gamma_2(t)$$

إذاً

$$\Sigma_1 = f(\sigma_1) = f(t, 0) = \gamma_1(t)$$
$$\Sigma_2 = f(\sigma_2) = f(2\pi, r) = (1 - r)\gamma_1(2\pi) + r\gamma_2(2\pi)$$
$$\Sigma_3 = f(\sigma_3) = f(2\pi - t, 1) = \gamma_2(2\pi - t) = -\gamma_2(t)$$
$$\Sigma_4 = f(\sigma_4) = f(0, 1 - r) = r\gamma_1(0) + (1 - r)\gamma_2(0) = r\gamma_1(2\pi) + (1 - r)\gamma_2(2\pi)$$

ومن هنا يتضح لنا أن $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$ وذلك لأن $\Sigma_2 = -\Sigma_4$. بذلك نستنتج أن نظرية قرين صالحة لهذا النوع من النطاقات ويكون لنا

$$\int_D dw = \int_{\gamma_1} w - \int_{\gamma_2} w, \ \forall w \in \mathcal{D}_1^1(D).$$



تدوير حدود D

مثال 1.8.9 ليكن $S = (U, f)$ هو الاسطوانة القائمة والمعرفة على الصورة

$$f : U = [0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(\theta, r) = (\cos\theta, \sin\theta, r)$$

فإن

$$\Sigma_1 = f(\sigma_1) = f(\theta, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\Sigma_2 = f(\sigma_2) = f(2\pi, r) = (1, 0, r)$$
$$\Sigma_3 = f(\sigma_3) = f(2\pi - \theta, 1) = (\cos(-\theta), \sin(-\theta), 1)$$
$$\Sigma_4 = f(\sigma_4) = f(0, 1 - r) = (1, 0, 1 - r) = -\Sigma_2$$

أي أن حدود الاسطوانة هي القاعدة السفلى بالاتجاه الموجب والعليا بالاتجاه السالب.

تمرين 1.8.10 أعط وصفاً لدوران حدود سطح كرة الوحدة في $\mathbb{R}^3$.

نظرية 1.8.11 (نظرية ستوكس)
ليكن S سطح منتظم وقابل للتوجيه بحيث تكون حدود S اتحاد عدد منتهي من منحنيات جوردن فإنه لكل صيغة تفاضلية $w \in \mathcal{D}_1^1(S)$ يكون

$$\int_S dw = \int_{\partial S} w$$

مثال 1.8.12 ليكن $S = (U, f)$ هو الأسطوانة القائمة والتي رأينا قاعدة تدويرها في المثال 1.8.9 ولتكن $w = x^2\ dz$ صيغة تفاضلية على S, فإنه من نظرية ستوكس يكون

$$\int_S dw = \int_{\partial S} w$$

لكن $\partial S = \Sigma_1 + \Sigma_3$ حيث

$$\Sigma_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\ ,\ \Sigma_2 = (\cos -\theta, \sin -\theta, 1),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

وبالتالي فإن

$$\int_S 2x\ dx \wedge dz = \int_{\Sigma_1} x^2\ dz + \int_{\Sigma_2} x^2\ dz = 0$$

نستطيع أيضاً أن نرى ذلك من خلال التعريف للتكامل على السطوح كما يلي

$$\int_S dw = \int_S 2x\ dx \wedge dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -2\cos\theta\sin\theta\ d\theta dr = 0$$

تمرين 1.8.13 على الاسطوانة القائمة S هل صحيح أن تكامل أي صيغة تفاضلية $w \in \mathcal{D}_2(S)$ على S يساوي صفر؟ برر إجابتك.