الفصل الثاني

الفضاءات المترية
Metric Spaces

مقدمة

يلعب مفهوم الدوال المتصلة continuous functions دوراً بارزاً فى فروع الرياضيات المختلفة. ففى بداية دراستنا للتحليل الحقيقي تعرضنا لمفهوم الدالة المتصلة حيث عرفنا أن الدالة $f:A\to R$ حيث أن $A\subset R$ ، تكون متصلة عند النقطة $x_0\in A$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أنه $\forall x\in A$ فإن:

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

و يقال أن هذه الدالة تكون متصلة على A إذا كانت متصلة عند جميع النقاط $x\in A$.

ففى هذه الحالة فإن القيمة المطلقة $|x-x_0|$ ما هي إلا مسافة بين عددين حقيقيين أو مركبين ومن ثم فإن الاتصال يتحقق متى نقلت نقاط متقاربة في مجال الدالة ، إلى نقاط متقاربة أخرى في المجال المقابل للدالة. ولتعميم مفهوم "ε-δ" الشهير لاتصال الدوال إلى تعريف آخر يصف سلوك الدالة بالنسبة إلى مجموعات جزئية تسمى جورات للنقاط أو بالنسبة إلى مجموعات مفتوحة (open sets) سوف نقوم بإدخال مفهوم دالة المسافة ومن ثم الفضاء المتري.

لابد من الاشارة هنا إلى أن الفضل في تعريف الفضاء المتري يعود لعالم الرياضيات الفرنسي فرشية عام 1906م. و نظراً لأهمية الفضاء المتري فقد حظي بإهتمام العديد من العلماء والباحثين منذ أن تم تعريفه حتى يومنا هذا ، ومن خلال بحوث العلماء على الفضاء المتري وتطبيقاته المختلفة ظهرت صور عديدة ومختلفة من الفضاءات المترية الجديدة مثل : الفضاء شبه المتري (quasi-metric space) ، الفضاء المتري الجزئي (partial metric space) الذي تم تعريفه من قبل باحثي علوم الحاسب النظرية ،الفضاء المتري المخروطي (cone metric space) . ومع ظهور نظرية المجموعات المشوشة (الضبابية) تم تعريف الفضاء المتري المشوش (fuzzy metric space) ...و هناك العديد من أنواع الفضاءات المترية الأخرى التي تذخر بها الدوريات و المراجع العلمية الحديثة و التي لا يتسع المقام لذكرها.

في هذا الفصل، سوف نتعرض لتعريف و دراسة الفضاء المتري مع تعريف كل من المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة و الدوال المتصلة حتى يتمكن الدارس من فهم و استيعاب مفاهيم قد تكون جديدة عليه مثل مفهوم الكرة المفتوحة والمجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة وجوار النقطة و الدوال المتصلة . هذه المفاهيم سوف ندرسها ضمن الفضاء المتري في ظل وجود دالة المسافة التي تلعب دوراً مهما في تعريف هذه المفاهيم و من ثم تصبح هذه المفاهيم معروفة لنا عندما نتعرض لها في الفصول التالية من هذا الكتاب.

(2.1) الفضاء المتري Metric Space

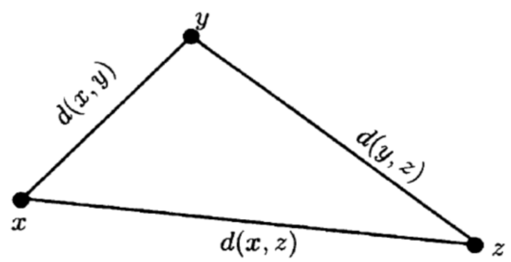
فيما يلي سوف نقدم تعريف دالة المسافة و شروطها والفضاء المتري بالإضافة لبعض من الأمثلة التوضيحية لعدد من الفضاءات المترية.

تعريف (2.1)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و أن $d: X \times X \to R$ دالة حقيقية من $X \times X$ الى مجموعة الأعداد الحقيقية R و تحقق لكل $x, y, z \in X$ الشروط التالية:

$$(M_1)\ d(x,y) \geq 0;$$
$$(M_2)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$
$$(M_3)\ d(x,y) = d(y,x);$$
$$(M_4)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

الشرط (M_4) يسمى بمتباينة المثلث (كما في الشكل التالي).



شكل (2.1)

الدالة d تسمى دالة مسافة (distance function) وتسمى $d(x,y)$ المسافة بين x و y . الثنائى المرتب (X,d) يسمى فضاءً مترياً.

مثال (2.1)

الدالة $d: R \times R \to R$ و المعرفة بالصيغة $d(x,y) = |x-y|$،على مجموعة الأعداد الحقيقية ،هي دالة مسافة ،وذلك لأنه لكل $x, y, z \in R$ نجد أن:

$$(M_1) d(x,y) \geq 0;$$
$$(M_2) d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(M_3)\, d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|=d(y,x);$$

$$(M_4)\, d(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|=|(x-y)+(y-z)|$$

$$\leq |x-y|+|y-x|=d(x,y)+d(y,z).$$

تسمى d في هذه الحالة دالة المسافة العادية أو الاقليدية.

مثال (2.2)

الدالة $d: R^2\times R^2 \to R$ و المعرفة بالصورة:

$$d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث أن $a=(x_1,y_1)\in R^2$ و $b=(x_2,y_2)\in R^2$، هي دالة مسافة و ذلك لأنه لكل $a,b,c \in R^2$ نجد أن:

$$(M_1)\ d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\geq 0\ .$$

$$(M_2)\ d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_2 \ and\ \ y_1=y_2 \Leftrightarrow a=b.$$

$$(M_3)\quad d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=d(b,a)$$

$$(M_4)\ d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$$

حيث نعلم أنه فى الهندسة المستوية يكون طول أي ضلع في مثلث أقل من أو يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين. في هذه الحالة تسمى d دالة المسافة الاقليدية في المستوى.

مثال (2.3)

يمكن تعميم دالة المسافة الاقليدية في المستوي إلى دالة مسافة في الفضاء الاقليدي ذي البعد n ، و ذلك بفرض أن الدالة$d: R^n\times R^n \to R$معرفة بالصيغة:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

حيث أن $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$. من السهل إثبات أن الدالة $d:R^n\times R^n\to R$ هي دالة مسافة باعتبارها تعميماً لدالة المسافة في المستوى.

مثال (2.4)

الدالة الحقيقية $d:R^2\times R^2\to R$ و المعرفة كما يلي:

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

هي دالة مسافة والزوج المرتب (X,d) فضاء متري،حيث أن.

$x=(x_1,x_2)\ ,y=(y_1,y_2)\in R^2$.

الحل

لكل $x=(x_1,x_2)\ ,y=(y_1,y_2)\in R^2$ نجد أن:

اولاً: بما أن $|x_1-y_1|\geq 0$ و $|x_2-y_2|\geq 0$ فإن

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\geq 0$$

إذاً يكون الشرط الأول متحقق . أي أن

$(M_1)\ d(x,y)\geq 0$.

ثانياً:

$$\begin{aligned}d(x,y)=0&\Leftrightarrow|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0\\&\Leftrightarrow|x_1-y_1|=0=|x_2-y_2|\\&\Leftrightarrow x_1=y_1,x_2=y_2\\&\Leftrightarrow x=(x_1,x_2)=y=(y_1,y_2)\end{aligned}$$

و من ثم يكون

$(M_2)\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y.$

ثالثاً:

$(M_3)\ d(x,y)=d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \\ &= |y_1-x_1|+|y_2-x_2| = d(y,x) \end{aligned}$$

رابعاً: بفرض أن $x=(x_1,x_2)\ ,y=(y_1,y_2),z=(z_1,z_2)\in R^2$

$$\begin{aligned} (M_4)\ d(x,y)+d(y,z) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|y_1-z_1|+|y_2-z_2| \\ &\geq |x_1-z_1|+|x_2-z_2| = d(x,z) \end{aligned}$$

, بهذا يكتمل اثبات أن الدالة $d:R^2\times R^2\to R$ دالة مسافة .

مثال (2.5)

الدالة الحقيقية $d:R\times R\to R$ و المعرفة كما يلي:

$$d(x,y)=\begin{cases} 1 & if \quad x\neq y \\ 0 & if \quad x=y \end{cases}$$

هي دالة مسافة تسمى المترية البديهية (trivial distance).

الحل

$(M_1)\ d(x,y)\geq 0;$

و ذلك من تعريف الدالة المترية.

ثانيا :

$(M_2)\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$

هذا الشرط متحقق من التعريف

$$.\, d(y,x)=0 \Leftarrow x=y \Leftarrow d(x,y)=0$$

ثالثا: : لكل $x, y \in Z$ نجد أنه:

(i) إذا كانت $d(x,y)=1 \Leftarrow x \neq y \Leftarrow d(y,x)=1$ و من ثم يكون

$$d(x,y)=d(y,x)$$

(ii) إذا كانت $d(x,y)=0 \Leftarrow x=y \Leftarrow d(y,x)=0$ و من ثم يكون

$$d(x,y)=d(y,x)$$

في كلا الاحتمالين نجد أن

$$(M_3)\ d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y \in X;$$

رابعاً: لكل $x,y,z \in Z$ نجد أن العلاقة :

$$(M_4)\ d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$$

متحققة لجميع القيم الممكنة لكل من $d(x,z),\ d(x,y),\ d(y,z)$ عدا حالة واحدة أن يكون $d(x,z)=1,\ d(x,y)=0,\ d(y,z)=0$ و الذي سوف يترتب عليه أن يكون $d(x,z)=1 \not\le 0+0 = d(x,y)+d(y,z)$

لكن هذا الاحتمال لا وجود له و ذلك لأن

(1) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

(2) $d(y,z)=0 \Rightarrow y=z$

من (1) و (2) نجد أن $x=y=z$ و لكن $d(x,z)=1 \Leftarrow x \neq z$ و هذا تناقض و على ذلك فإن هذا الاحتمال لا وجود له و بذلك تكون العلاقة صحيحة دائماً.

(2.2) المجموعات المفتوحة **Open sets**

قبل الشروع في دراسة مفهوم المجموعات المفتوحة يجب أن ندرس بعض المفاهيم الخاصة بالفضاء المتري مثل الكرة المفتوحة والكرة المغلقة.

تعريف (2.2)

بفرض أن (X,d) فضاء متري و x_0 عنصر في X و $\varepsilon > 0$.

(1) المجموعة الجزئية $B(x_0,\varepsilon)=\{x \in X : d(x,x_0)<\varepsilon\}$

تسمى كرة مفتوحة نصف قطرها ε و مركزها النقطة x_0.

(2) المجموعة الجزئية $\overline{B}(x_0,\varepsilon)=\{x\in X : d(x_0,x)\le\varepsilon\}$

تسمى كرة مغلقة نصف قطرها ε و مركزها النقطة x_0.

مثال (2.6)

في حالة الفضاء المتري الاقليدي (R,d)،حيث أن $d(x,y)=|x-y|$ لأي

عددين حقيقيين $x,y\in R$ فإن المجموعة :

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x\in R : a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,\varepsilon>0\}$$

تسمى فترة مفتوحة ، بينما المجموعة :

$$[a-\varepsilon,a+\varepsilon]=\{x\in R : a-\varepsilon\le x\le a+\varepsilon,\varepsilon>0\}$$

تسمى فترة مغلقة بالنسبة للفضاء المترى (R,d) .

مثال (2.7)

في حالة الفضاء المتري (R^2,d)، حيث أن $d : R^2\times R^2\to R$. فإن المجموعة :

$$B_1(a,\varepsilon)=\{x\in R^2 : d(a,x)<\varepsilon\}$$

تسمى قرص مفتوح (open disk)، بينما المجموعة :

$$\overline{B}_2(a,\varepsilon)=\{x\in R^2 : d(a,x)\le\varepsilon\}$$

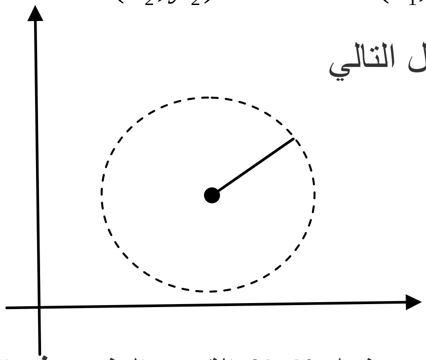
تسمى قرص مغلق (closed disk).

مثال (2.8)

في حالة الفضاء المتري (R^2,d) ، حيث أن الدالة $d:R^2\times R^2\to R$ معرفة بالصيغة :

$$d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

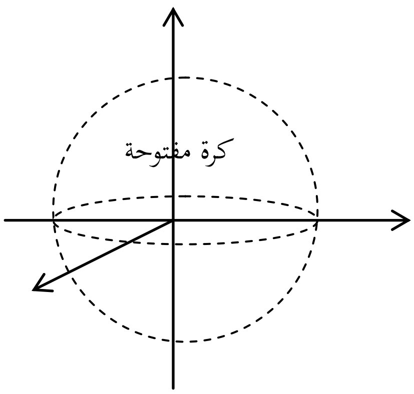
حيث أن $a=(x_1,y_1)\in R^2$ و $b=(x_2,y_2)\in R^2$. فالقرص المفتوح في هذا الفضاء يأخذ الشكل التالي



شكل (2.2):القرص المفتوح في المستوي

إذا تعاملنا مع الفضاء الثلاثي $R^3=R\times R\times R$ فإن المجموعة

$$B_d(a,\varepsilon)=\{x\in R^3:d(x,a)<\varepsilon\}$$



شكل (2.3):الكرة المفتوحة

تسمى كرة مفتوحة (open ball) .

أما المجموعة $\overline{B}_d(a,\varepsilon)=\{x\in R^3:d(x,a)\le\varepsilon\}$ فتسمى كرة مغلقة .

مثال (2.9)

بفرض أن $d : R \times R \to R$ دالة المسافة الاقليدية على مجموعة الأعداد الحقيقية R. فإن الكرة المفتوحة

$$B_d(0,1) = \{x \in R : d(0,x) < 1\} = \{x \in R : |x| < 1\} = (-1,1)$$

و التي مركزها 0 و نصف قطرها 1ما هي إلا الفترة المفتوحة $(-1,1)$.

مثال (2.10)

بفرض أن $d : R^2 \times R^2 \to R$ دالة المسافة الاقليدية على المجموعة R^2. فإن القرص المفتوح الذي مركزه النقطة$(0,0)$ ونصف قطره الوحدة يعطى في الصورة التالية:

$$B_d((0,0),1) = \{(x,y) \in R^2 : d((0,0),(x,y)) < 1\}$$
$$= \{(x,y) \in R^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$$
$$= \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

مثال (2.11)

بفرض أن $d : R^3 \times R^3 \to R$ دالة المسافة المعرفة على المجموعة R^3. فإن المجموعة التالية:

$$B_d((0,0,0),1) = \{(x,y,z) \in R^3 : d((0,0,0),(x,y,z)) < 1\}$$
$$= \{(x,y,z) \in R^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 1\}$$
$$= \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

وهي عبارة عن كرة مفتوحة مركزها $(0,0,0)$ و نصف قطرها 1.

فيما يلي سوف نقوم بتعريف مفهوم الجوار(Neighborhood) لنقطة ما في أي فضاء متري.

تعريف (2.3)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة الجزئية A من X تسمى جواراً للنقطة $a \in A$ إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $B_d(a,\varepsilon) \subseteq A$.

نظرية (2.1)

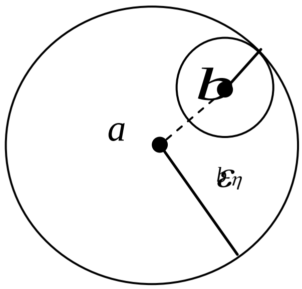
بفرض أن (X,d) فضاء متري، و أن $\varepsilon > 0, a \in X$. الكرة المفتوحة $B_d(a,\varepsilon)$ تمثل جوار لكل نقطة من نقاطها.

البرهان

اولاً نلاحظ أن الكرة المفتوحة $B_d(a,\varepsilon)$ ليست خالية لأن $a \in B_d(a,\varepsilon)$. نفرض أن $b \in B_d(a,\varepsilon)$ والمطلوب إثبات أن $B_d(a,\varepsilon)$ تكون جواراً لهذه النقطة. بما أن $b \in B_d(a,\varepsilon)$ فإن $d(b,a) < \varepsilon$. نفرض أن $\eta = \varepsilon - d(a,b) > 0$. سوف نحاول بإثبات أن $B_d(b,\eta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$ كما هو موضح في الشكل (2.4). نفرض أن $x \in B_d(b,\eta)$ نقطة إختيارية والمطلوب إثبات أن $x \in B_d(a,\varepsilon)$

$$x \in B_d(b,\eta) \Leftrightarrow d(x,b) < \eta$$

باستخدام الشرط (M_4) $d(a,x) \le d(a,b) + d(b,x)$



شكل (2.4)

لذا نحصل على $d(a,x) \le d(a,b)+d(b,x) < d(a,b)+\eta < \varepsilon$ وهذا يعنى أن

$x \in B_d(a,\varepsilon)$ و من ثم فإن $B_d(b,\eta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

تعريف (2.4)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $A \subseteq X$ فإنه يقال أن المجموعة A مفتوحة إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها .

نتيجة (2.1)

في الفضاء المتري (X,d) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

النقطة $a \in A$ نقطة داخلية للمجموعة A إذا كانت A جوراً لها و يرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة بالرمز A^o و يعبر عنها في الصورة :

$$A^o = \{x \in A : B(x,\varepsilon) \subseteq A \ for\ some\ \varepsilon > 0\}.$$

نظرية (2.2)

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d). فإن

(1) المجموعة A^o هي مجموعة مفتوحة جزئية من A تحوي جميع المجموعات الجزئية المفتوحة من A .

(**2**) المجموعة A تكون مفتوحة إذا و فقط إذا كان $A = A^o$.

البرهان

إثبات (1) نفرض أن $x \in A^o$ نقطة اختيارية. فإنه من تعريف مجموعة النقاط الداخلية توجد كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ و لكن $B(x,\varepsilon)$ هي في حد ذاتها مجموعة مفتوحة (انظر نظرية (2.1) و مثال (2.12)) لذا فإن كل نقطة من نقاطها هي مركز لكرة مفتوحة محتواه في $B(x,\varepsilon)$ و من ثم في A . هذا يعني

أن كل نقطة في $B(x,\varepsilon)$ هي نقطة داخلية للمجموعة A ، أي أن

$B(x,\varepsilon)\subseteq A^o$. و نظراً لكون النقطة $x\in A^o$ إختيارية فإن كل نقطة

$x\in A^o$ هي مركز لكرة محتواه في A^o وهذا يعني أن A^o مجموعة مفتوحة.

لإثبات أن A^o تحوي كل المجموعات المفتوحة الجزئية $G\subseteq A$. نفرض أن

$x\in G$. بما أن G المجموعة مفتوحة، فإنه توجد كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ بحيث

أن $B(x,\varepsilon)\subseteq G\subseteq A$. إذاً $x\in A^o$ أي أن $G\subseteq A^o$.

إثبات (2) يأتي مباشرة من (1). ■

نظرية (2.3)

بفرض أن (X,d) فضاء متري و أن $A,B\subseteq X$. فإن

$(i)\ A\subseteq B\Rightarrow A^o\subseteq B^o;$

$(ii)\ (A\cap B)^o=A^o\cap B^o;$

$(iii)\ (A\cup B)^o\supseteq A^o\cup B^o;$

البرهان

الفقرة (i):

نفرض أن $x\in A^o$.فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon)\subseteq A$ بما أن $A\subseteq B$

فإن $B(x,\varepsilon)\subseteq B$ ، أي أن $x\in B^o$ وهذا يقتضي أن $A^o\subseteq B^o$.

الفقرة (ii):

بما أن $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$ فإنه من (i) نجد أن $(A\cap B)^0\subseteq A^o$

و $(A\cap B)^0\subseteq B^o$ وهذا يقتضي أن

$$(A\cap B)^0\subseteq A^o\cap B^o \qquad (1)$$

من ناحية أخرى نفرض أن $x\in A^o\cap B^0$ فإن هذا يقتضي أن $x\in A^o$

و $x \in B^0$. لذا يوجد $\varepsilon_1 > o$ و $\varepsilon_2 > o$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon_1) \subseteq A$ ،
$B(x,\varepsilon_2) \subseteq B$. نفرض $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ فإنه يتضح أن $\varepsilon > 0$ و
$B(x,\varepsilon) \subseteq A \cap B$ ، أي أن $x \in (A \cap B)^o$ وهذا يقتضي أن :

$$A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على المطلوب.

الفقرة (iii):

حيث أن $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ بتطبيق (i) نحصل على المطلوب.■

فيما يلي مثال لتوضيح عدم تحقق التساوي في (iii):

مثال (2.12)

بفرض أن $A = [0,1]$ و $B = [1,2]$ ، فإن $A \cup B = [0,2]$. بما أن $A^o = (0,1)$
، $B^o = (1,2)$ ، $(A \cup B)^0 = (0,2)$ فنجد أن $(A \cup B)^o \neq A^o \cup B^o$.

تمهيدية (2.1)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. تقاطع أي مجموعتين مفتوحتين في X يكون مجموعة مفتوحة.

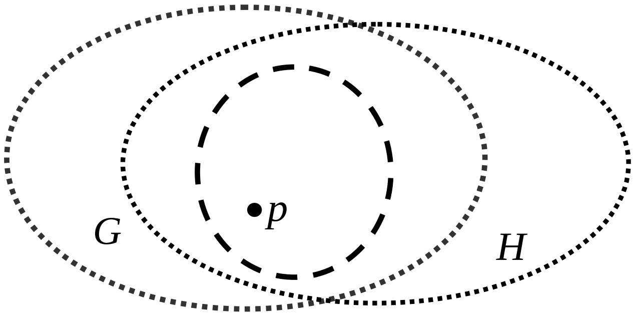
البرهان

نفرض أن G,H مجموعتان مفتوحتان في X وأن $p \in G \cap H$

$$\because p \in G \cap H \Rightarrow p \in G \wedge p \in H$$

بما أن G مجموعة مفتوحة و تحتوي على النقطة p ، فإنه توجد كره مفتوحة
$B_1(\mathrm{p},\varepsilon)$ بحيث أن

$$p \in B_1(p,\varepsilon) \subseteq G \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



شكل (2.5)

وبالمثل بالنسبة للمجموعة الثانية H ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_2(\mathrm{p},\delta)$ بحيث أن

$$p \in B_2(p,\delta) \subseteq H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نحصل على :

$$\mathrm{p} \in \mathrm{B}_1(\mathrm{p},\varepsilon) \cap \mathrm{B}_2(\mathrm{p},\delta) \subseteq (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$$

ليكن $\eta = \min\{\varepsilon,\delta\}$ ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_p(\mathrm{p},\eta)$ بحيث **أن**

$$\mathrm{p} \in \mathrm{B_p}(\mathrm{p},\eta) = \mathrm{B}_1(\mathrm{p},\varepsilon) \cap \mathrm{B}_2(\mathrm{p},\delta) \subseteq (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$$

أى أن $\mathrm{p} \in \mathrm{B_p}(\mathrm{p},\eta) \subseteq (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$ وهذا هو إثبات أن التقاطع $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}$ مجموعة مفتوحة. ■

بعد أن رأينا في التمهيدية السابقة أن التقاطع لمجموعتين مفتوحتين يعطي مجموعة مفتوحة، سوف نحاول فيما يلى إجمال بعض من خواص المجموعات المفتوحة في النظرية التالية.

نظرية (2.4)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً ، فإن :

(**1**)كل من المجموعتين X,ϕ مجموعة مفتوحة.

(**2**)إذا كانــت $G_1,G_2,...,G_n$ مجموعــات مفتوحــة فــإن التقــاطع $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$مجموعة مفتوحة.

(**3**)اتحـاد أى تجمـع مـن المجموعـات المفتوحـة يكـون مجموعـة مفتوحة.

البرهان

أولا :لإثبات أن المجموعة ϕ مجموعة مفتوحة فهذا يتطلب أن تكون كل نقطة من نقاط ϕ مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في ϕ و حيث أن ϕ خالية من العناصر فإن هذا المطلب متحقق دوماً.

والآن المجموعة X مفتوحة لأنه إذا كان $x \in X$ ، فإنه على سبيل المثال تكون كرة الوحدة $B(x,1) \subset X$.

ثانيا : نفرض أن $G_1,G_2,...,G_n$ مجموعات مفتوحة وأن

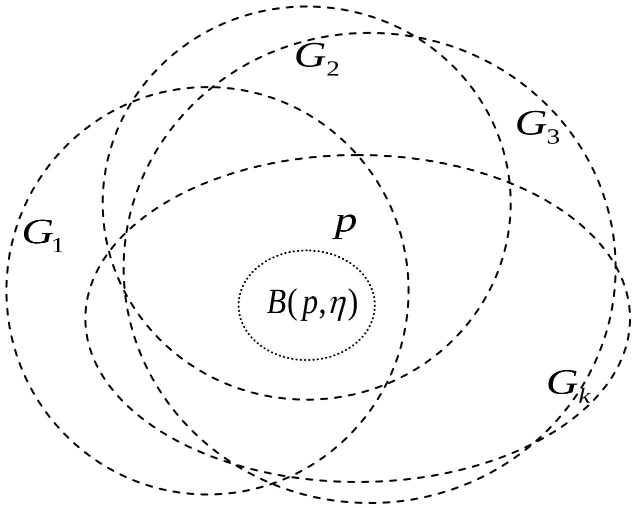
$$G = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

إذا كانت Gخالية فإنها مجموعة مفتوحة كما رأينا في (1). نفترض أن $G \neq \phi$ و $p \in G$. لذا نجد أن $p \in G_i$ لكل $i = 1,2,...,n$ و من ثم يوجد $\varepsilon_i > 0$ بحيث تكون $B(p,\varepsilon_i) \subseteq G_i$ لكل $i = 1,2,...,n$.

نفرض أن $\eta = \inf\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$. فإن $\eta > o$ و $B(p,\eta) \subseteq B(p,\varepsilon_i)$ لكل $i = 1,2,...,n$. إذاً الكرة $B(p,\eta)$ التي مركزها p تحقق الشرط

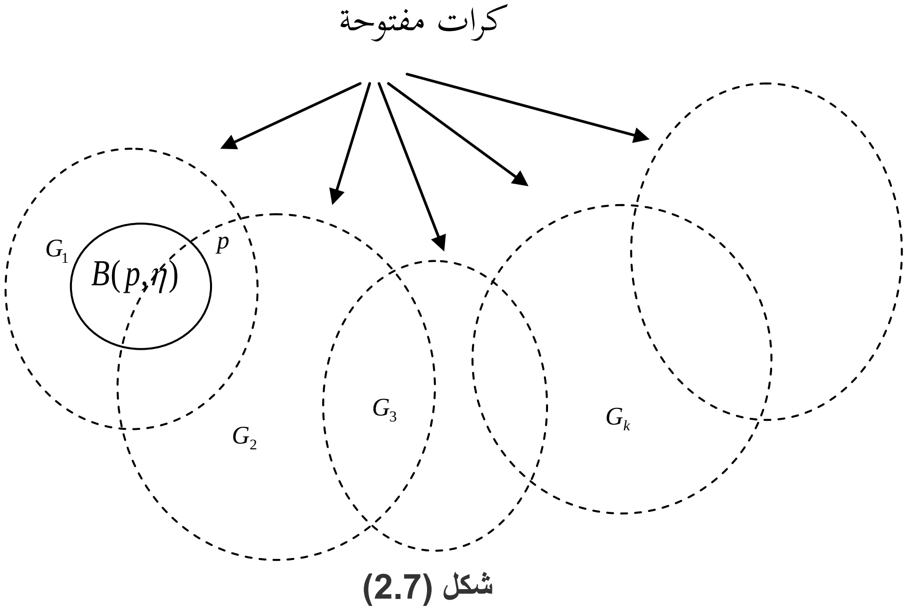
$$B(p,\eta) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B(p,\varepsilon_i) \subseteq G$$

وهذا معناه أن التقاطع المنتهي $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n$ مجموعة مفتوحة.



شكل (2.6)

ثالثا : نفرض أن ξ هى عائلة من المجموعات المفتوحة وأن H هى اتحاد هذه العائلة والمطلوب إثبات أن H مجموعة مفتوحة.



شكل (2.7)

لإثبات ذلك نفرض أن $p \in H$ ، فإنه توجد مجموعة من مجموعات العائلة ε

ولتكن G مجموعة مفتوحة بحيث أن $p \in G \subseteq H$. بما أن المجموعة G مفتوحة ،

فإنه توجد كره مفتوحة مركزها p بحيث أن $p \in B(p,\eta) \subseteq G$ و هذا يقتضي أن

$p \in B(p,\eta) \subseteq H$ و هذا يعني أن H مجموعة مفتوحة. ■

يلاحظ القارئ أننا استخدمنا التقاطع النهائي للمجموعات المفتوحة و لم نستخدم التقاطع الاختياري ، في حين استخدمنا الاتحاد الاختياري للمجموعات المفتوحة الذي يتضمن ضمنياً الاتحاد النهائي .لذا نجد أنفسنا أمام السؤال التالي: هل التقاطع الاختياري للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة؟.

مثال (2.13)

نفرض الفضاء المتري (R,d)، حيث أن $d(x,y)=|x-y|, \forall x,y \in R$. نفرض عائلة الفترات المفتوحة $\{(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}) : n \in N\}$ $B_d(0,\frac{1}{n})=$.و لكن نجد أن التقاطع اللانهائي لهذه العائلة لا يعطي مجموعة مفتوحة، حيث $\cap_n (\frac{-1}{n},\frac{1}{n}) = \{0\}$.

نظرية (2.5) (خاصية هاوسدورف)

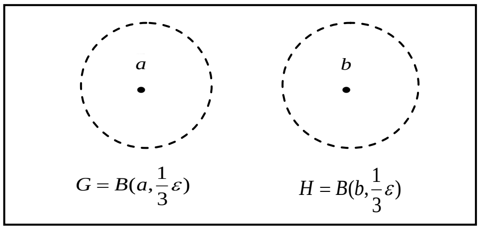
لأى عنصرين مختلفين $a \neq b$ فى الفضاء المترى (X,d) توجد مجموعتان مفتوحتان G , H بحيث أن $a \in H, b \in G, G \cap H = \phi$

البرهان

نفرض أن $a,b \in X$ عنصران مختلفان (أى أن $a \neq b$) فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث

أن $d(a,b)=\varepsilon$. فإذا اخترنا المجموعتين المفتوحتين كما يلى :

$$G = B_d(a,\tfrac{1}{3}\varepsilon) \ , \ \ H = B_d(b,\tfrac{1}{3}\varepsilon)$$



شكل (2.8)

فإن وجود المجموعتين المفتوحتين G , H قد تحقق. فالمطلوب الآن إثبات أن $G \cap H = \phi$ ولكى نثبت ذلك سوف نفترض العكس ، أى إننا سنفترض أن $G \cap H \neq \phi$ وذلك بفرض أن هناك نقطة p بحيث أن $p \in G \cap H \neq \phi$ وهذا الفرض يؤدى إلى أن :

(a) $p \in G = B_d(a, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow d(p,a) < \frac{\varepsilon}{3}.$

(b) $p \in H = B_d(b, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow d(p,b) < \frac{\varepsilon}{3}.$

باستخدام الشرط (M_4) من شروط الفضاء المترى (X,d) نحصل على :

$$d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

أي أن $d(a,b) < \frac{2}{3}\varepsilon$ ولكن هذا يتعارض مع الفرض بأن $d(a,b) = \varepsilon$

إذاً $G \cap H = \phi$ وبهذا يكتمل البرهان.■

ملاحظة:

هذه الخاصية متحققة لكل فضاء متري ولكنا سوف نرى أنها لا تكون متحققة دائما في فضاءات أعم من الفضاء المتري مثل الفضاءات التوبولوجية.

(2.3) المجموعات المغلقة في الفضاء المتري

Closed Sets in Metric Space

تعرف(2.5)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة A في (X,d) تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A^c = X - A$ مجموعة مفتوحة.

فيما يلي سوف نقدم بعضاً من خواص المجموعات المغلقة .

نظرية (2.6)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً فإن :

(**1**) X , ϕ مجموعتان مغلقتان.

(2) تقاطع أى تجمع من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(**3**) إذا كانت $F_1, F_2, ..., F_n$ مجموعات مغلقة فإن الإتحاد

$$F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$$

يكون أيضا مجموعة مغلقة.

البرهان

أولا : المجموعتان X , ϕ مغلقتان لأنه $X = \phi^c$, $\phi = X^c$ والمجموعتان X , ϕ مفتوحتان كما رأينا فى النظرية (2.4).

ثانيا : نفرض أن W هى تجمع من المجموعات المغلقة وأن :

$$S = \cap\{F : F \in W\}$$

وبما أن :

$$S^c = (\cap F)^c = \cup\{F^c : F \in W\}$$

وأن F^c مفتوحة واتحاد المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة كما ورد فى النظرية (2.4) ومن ثم فإن S^c مجموعة مفتوحة وهذا يؤكد أن :

$$S=\cap\{F:F\in W\}$$

مجموعة مغلقة.

ثالثا : بفرض أن $F_1,F_2,...,F_n$ مجموعات مغلقة و أن $H=F_1\cup F_2\cup...\cup F_n$ ومن ثم فإن

$$H^c=(F_1\cup F_2\cup...\cup F_n)^c=F_1^c\cap F_2^c\cap...\cap F_n^c$$

حيث أن تقاطع المجموعات المفتوحة $F_1^c\cap F_2^c\cap...\cap F_n^c$ هو مجموعة مفتوحة أي أن H^c مفتوحة ومن ثم فإن H مجموعة مغلقة. ■

نظرية (2.7)

بفرض أن (X,d) فضاء متري، فإنه لكل $x\in X$ تكون المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ مغلقة.

البرهان

لإثبات أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة يكفي أن نثبت أن المجموعة $\{x\}^c=X-\{x\}$ تكون مفتوحة. لإثبات ذلك نفرض أن $y\in X-\{x\}$ نقطة اختيارية. بما أن $x\neq y$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\subseteq X$ بحيث أن $y\in H,\ x\in G$ و $G\cap H=\phi$ ومن ثم يكون

$$y\in H\subseteq X-G\subseteq X-\{x\}$$

و بما أن H مجموعة مفتوحة فإنه توجد كرة مفتوحة $B_d(y,\varepsilon)$ بحيث أن $y\in B_d(y,\varepsilon)\subset H\subseteq X-\{x\}$ وهذا يعني أن المجموعة $X-\{x\}$ مفتوحة ومن ثم تكون المجموعة $\{x\}$ مغلقة.■

نتيجة (2.2)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً فإن كل مجموعة منتهية في X هي مجموعة مغلقة.

البرهان

من النظرية السابقة نعلم أن المجموعة وحيدة العنصر مغلقة. بما أن كل مجموعة منتهية $A \subset X$ يمكن اعتبارها كاتحاد منته لمجموعات وحيدة العنصر اي أن $A = \bigcup_{a \in A}\{a\}$. لذا فإن المجموعة A تكون مغلقة.■

(2,4) الدوال المتصلة في الفضاء المتري

Continuous functions in Metric Space

قد تعاملنا فى دارستنا لمبادئ التحليل الرياضى (حساب التفاضل والتكامل) مع مفهوم الدوال المستمرة (المتصلة) continuous functions فقد كان يقصد بأن الدالة :

$$f : R \to R$$

تكون متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا تحقق الشرط: لكل $x \in R$ يجب أن يكون " العدد الحقيقى $f(x)$ قريباً من العدد الحقيقى $f(a)$ بمقدار يتناسب مع قرب العدد الحقيقى x من العدد a في مجال الدالة". أى أن اقتراب العدد الحقيقي x من العدد الحقيقي a يقتضي اقتراب العدد الحقيقي $f(x)$ من العددالحقيقي $f(a)$. ويمكن إعادة صياغة هذا المعنى بصورة أكثر وضوحاً بأن يقال أن الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا تحقق الشرط :

كلما اقتربت x من a بدرجة (ولتكن $\delta > 0$) فإن $f(x)$ تقترب من $f(a)$ بدرجة مناظرة (ولتكن $\varepsilon > 0$) .

لذلك نستطيع صياغة تعريف اتصال الدالة $f : R \to R$ في الصيغة الرياضية التالية:

تعريف (2.6)

يقال أن الدالة $f:R\to R$ متصلة عند النقطة $a\in R$ إذا و فقط إذا كان لكل عدد حقيقي $\varepsilon>0$ ، يوجد عدد حقيقي مناظر $\delta>0$ بحيث أنه إذا كان $|x-a|<\delta$ فإن $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. يقال أن الدالة f متصلة متى كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط R.

مما تقدم نلاحظ أن الصيغة $|x-a|<\delta$ تعنى أن $a-\delta<x<a+\delta$ أو بمعنـى آخـر أن x تنتمـى إلـى الفتـرة المفتوحـة (الجـوار) $(a-\delta,a+\delta)$ وبالمثل فإن الصيغة $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ تعنى أن العدد الحقيقى $f(x)$ ينتمـى إلـى الفتـرة المفتوحـة (الجـوار) $(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$ ولـذا نسـتطيع إعـادة صياغة تعريف الاتصال للدالة $f:R\to R$ بأن نقول أنه إذا كان لأى $\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث يتحقق $f(x)\in(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$ كلما كان $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

مثال(2.14)

لتكن $f:R\to R$ دالة معرفة على الاعداد الحقيقية بالصيغة

$$f(x)=ax+b,\ \forall(a,b)\in R,a\neq 0$$

. هذه الدالة متصلة لجميع نقاط المجموعة R.

الحل:

نفرض $y\in R$ و $\varepsilon>0$.لكي نحصل على $\delta>0$مناسبة إلى εنستخدم المتباينة $|(ax+b)-(by+c)|<\varepsilon$ و هذا يؤدي إلـى إن $|x-y|<\frac{\varepsilon}{|a|}$ و بـهذا لـو وضـعنا $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$ فنجد أن الدالة $f:R\to R$ متصلة عند النقطة y و بما أن y

نقطة اختيارية من R فإن الدالة متصلة على R.

فيما يلي سنحاول تعميم تعريف مفهوم الاتصال من اتصال الدوال على مجموعة الاعداد الحقيقية ليكون على أي فضاء متري.

تعريف(2.7)

ليكن كل من (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاءا مترياً. يقال أن الدالة

$$f : X_1 \to X_2$$

دالة متصلة عند النقطة $a \in X_1$ إذا كان لأى $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$\forall x \in B_{d_1}(a, \delta) \Rightarrow f(\mathrm{x}) \in B_{d_2}(f(\mathrm{a}), \varepsilon)$$

وهذا يكافئ القول بأن :

$$f(B_{d_1}(\mathrm{a}, \delta)) \subseteq B_{d_2}(f(\mathrm{a}), \varepsilon).$$

نظرية (2.8)

ليكن كل من (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاءا مترياً. يقال أن الدالة

$$f : X_1 \to X_2$$

متصلة عند النقطة $a \in X_1$ إذا كان لأى $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون

$$B_{d_1}(\mathrm{a}, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_2}(f(\mathrm{a}), \varepsilon)).$$

البرهان

يترك للقارئ كتمرين.■

فى كل ما قدمناه مازلنا نستخدم تعريف"$\delta - \varepsilon$" الشهير فى إثبات الاتصال للدوال ولكنه بعد أن عرفنا الآن ما هو المقصود بالجوار لنقطة ما، وأن الكرة المفتوحة هى جوار لكل نقطة بها نستطيع إعادة صياغة مفهوم

الأتصال و ذلك بإعادة صياغة الشرطين المتكافئين الذين ورد ذكرهما فيما سبق و هما.

$$f(B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)) \subseteq B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$$

أو

$$B_{d_1}(\mathrm{a},\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon))$$

وحيث أن $B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$ كره مفتوحة وجوار للنقطة $f(a)$ وأيضا $B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)$ كره مفتوحة وجوار للنقطة a.

فإذا وضعنا $N = B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)$ و $M = B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$ فإن الشرطين السابقين يمكن وضعهما فى الصورة :

$$f(N) \subseteq M \quad \textbf{أو} \quad N \subseteq f^{-1}(M)$$

نظرية (2.9)

ليكن (X,d) و $(Y,d^{\backslash})$ فضاءان متريان. الدالة

$$f : X \to Y$$

تكون متصلة عند النقطة $x \in X$ إذا و فقط إذا كان لكل جوار V للنقطة $f(x)$ ، يوجد جوار مناظر U لنقطة x بحيث أن

$$U \subseteq f^{-1}(V) \quad \text{أو} \quad f(U) \subseteq V$$

البرهان.

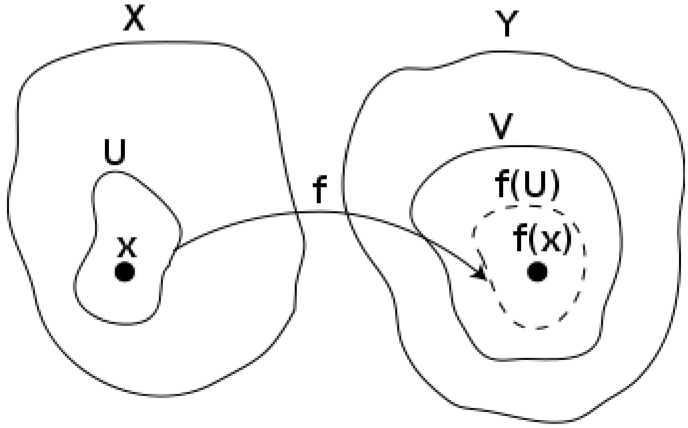
أولا : نفترض أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$ و أن V جوار للنقطة $f(x)$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $B(f(x),\varepsilon) \subseteq \mathrm{V}$

بما أن الدالة متصلة عند النقطة x فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq \mathrm{V}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بما أن الكره المفتوحة $U = B(x,\delta)$ جوار للنقطة x فإن :

$$f(\mathrm{U}) = f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq \mathrm{V}.................(2)$$



شكل (2.9)

ثانيا : إذا كانت الدالة $f : X \to Y$ تحقق الشرط : لكل جوار V للنقطة $f(x)$ فإنه يوجد جوار U للنقطة x بحيث أن $f(U) \subseteq V$. المطلوب إثبات أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$. ولكى نثبت ذلك ، فلا بد من اثبات أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يتحقق

$$f(B(\mathrm{x},\delta)) \subseteq B(f(\mathrm{x}),\varepsilon) \qquad (2)$$

نقوم باختيار $\mathrm{V} = B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$ جواراً للنقطة $f(x)$ وبما أن $f(U) \subseteq V$ فإن ذلك يؤدى إلى أن $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V} = B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$ وبما أنه يوجد جوار U للنقطة x فإنـه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$B(x,\delta) \subseteq \mathrm{U} \qquad (3)$$

من (2) ,(3) نحصل على :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V} = B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$$

أى أن :

$$f[B(x,\delta)]\subseteq B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$$

أى أن الدالة متصلة عند النقطة $x\in X$ وبهذا يكتمل البرهان. ■

فى النظرية السابقة فإن الدالة $f: X \to X^{\backslash}$ يقال أنها متصلة إذا كانت متصلة عند كل نقاط المجموعة X وذلك بالقول بإنه لكل جوار M لمجموعة نقاط من $X^{\backslash}$ فإن $f^{-1}(\mathrm{M})$ تكون جواراً لمجموعة نقاط من X وهكذا لكل نقاط المجموعة X. ونظراً لعدم فاعلية هذا المفهوم (جوار مجموعة نقاط) فيمكننا استبداله بمفهوم أكثر سهولة فى التعامل معه وهو مفهوم المجموعة المفتوحة ، حيث أن كلمة مفتوحة تعنى أنها جوار لكل نقطة من نقاطها. فلذا بدلا من كلمة جوار لمجموعة نقاط ، سوف نستخدم كلمة مجموعة مفتوحة (تحوى هذه النقاط وفى ذات الوقت هى جوار لهذه النقاط). واستناداً لهذا المفهوم نستطيع تعميم مفهوم الاتصال بصورة أكثر عمومية مما سبق كما .

نظرية (2.10)

ليكن كل من (X,d) و $(X^{\backslash},d^{\backslash})$ فضاءً مترياً. الدالة

$$f: X \to X^{\backslash}$$

تكون متصلة إذا وإذا كان فقط لكل مجموعة مفتوحة $H\subseteq X^{\backslash}$ فإن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة فى X .

البرهان.

اولاً: نفترض أن الدالة f متصلة وأن المجموعة الجزئية $H\subseteq X^{\backslash}$ مجموعة مفتوحة. والمطلوب إثبات أن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة أي أنها جوار لجميع نقاطها ولكى نصل لهذه النتيجة نفترض أن $a\in f^{-1}(H)$

، فإن ذلك يـؤدى إلى أن $f(a)\in H$ ، بما أن H مجموعة مفتوحة (جوار لكل نقطة من نقاطها) ومن ثم تكون جواراً للنقطة $f(a)$.

بما أن الدالة $f:X\to X^{\backslash}$ متصلة ، فإن ذلك يؤدي إلى أن $f^{-1}(H)$ تكون جوار للنقطة a. و حيث أن a نقطة اختيارية ، فإن $f^{-1}(H)$ تكون جواراً لجميع نقاطها من ثم فإن $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة.

ثانيا: نفترض أنه لكل مجموعة مفتوحة $H\subseteq X^{\backslash}$ فإن $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة والمطلوب إثبات أن الدالة متصلة . لإثبات ذلك نفرض أن $a\in X$ و أن $a\in f^{-1}(H)$ ، إذاً $f(a)\in H$. بما أن H مجموعة مفتوحة فهي جوار للنقطة $f(a)$ وأيضا $f^{-1}(H)$ هي جوار للنقطة a. بوضع $M=f^{-1}(H)$ فمن النظرية السابقة نجد أن الدالة متصلة عند النقطة الاختيارية a و من ثم تكون متصلة عند كل نقطة من نقاط X.■

مثال (2.15)

كل من الدالة $f:R\to R$ المعرفة بالصيغة $f(x)=3x+1$ و الدالة العكسية $f^{-1}:R\to R$ و المعطاة بالصيغة $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}(y-1)$ هي دالة متصلة كما هو معلوم من خلال دراستنا للتفاضل والتكامل وهذه الدالة هي تقابل.

(2.5) الممتتاليات في الفضاء المتري Sequences in Metric Space

المتتالية (المتتابعة) $(x_n)_n$ في الفضاء المتري (X,d) تعرف على أنها دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى قيم في الفضاء المتري (X,d) أي أن

$$f:N\to(X,d)$$

$$\forall n \in N,\ f(n) = x_n$$

يسمى x_1 الحد الأول ، x_2 الحد الثاني،.. x_n الحد النوني .و هكذا.

تعريف (2.8)

في الفضاء المتري (X,d)، يقال أن المتتالية $(x_n)_n$ تقاربية او انها تتقارب من النقطة $x_0 \in X$ إذا كان لكل عدد صغير موجب ε يوجد عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon)$ بحيث أن $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ لكل $n \geq N_0$. في هذه الحالة نكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ أو أن $x_n \to x_0$.

مثال (2.16)

. نفرض أن $X = R$ و أن دالة المسافة معرفة بالصيغة

$$d(x,y) = |x - y|,\ \forall x, y \in R$$

بفرض x_n متتالية من الأعداد الحقيقية .هذه المتتالية تتقارب إلى العدد الحقيقي $x \in R$ إذا و فقط إذا كان $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$.

مثل ما يلي:

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ بالنسبة للمتتالية $x_n = \dfrac{1}{n}$.

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ بالنسبة للمتتالية $x_n = n\sin(\dfrac{1}{n})$.

(3) $\lim_{n\to\infty} x_n = e$ بالنسبة للمتتالية $x_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.

اثبات هذه النهايات يترك كتمرين للقارئ.

تعريف (2.9)

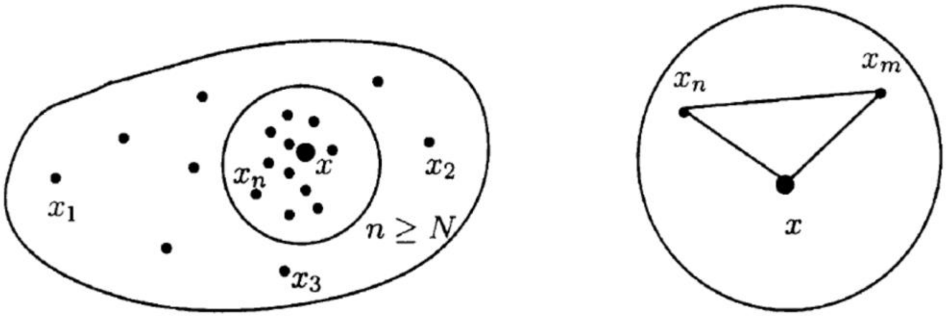
يقال أن المتتالية $(x_n)_n$ في الفضاء المتري (X,d) انها متتالية (متتابعة) كوشية إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon)$ بحيث أن $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ لكل $n,m \geq N_0$.

نظرية (2.11)

كل متتالية (متتابعة) تقاربية في الفضاء المتري هي متتالية (متتابعة) كوشية.

البرهان

نفرض أن $(x_n)_n$ متتالية (متتابعة) تقاربية في الفضاء المتري (X,d) .



شكل (2.10)

وليكن $x = \lim\limits_{n} x_n$. إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يمكن ايجاد العدد الطبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon)$

بحيث أن:

$$\forall n > N_0 ,\ d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بالمثل يمكن الحصول على :

$$\forall m > N_0 ,\ d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

و من ثم فإنه لجميع قيم $n,m > N_0$ نجد أن

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يثبت ان $(x_n)_n$ متتالية (متتابعة) كوشية.■

بعد أن عرفنا أن كل متتالية (متتابعة) تقاربية هي متتالية (متتابعة) كوشية. فهل عكس ذلك صحيح دائماً؟. المثال التالي يؤكد أن العكس ليس بالضرورة صحيح دائماً.

مثال (2.17)

نفرض أن X هي مجموعة كل الأعداد القياسية وأن دالة المسافة معرفة بالصيغة

$$d(x,y) = |x-y|, \ \forall\, x, y \in X$$

المتتالية $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ هي متتالية كوشية ولكنها تتقارب للعدد e الذي لا ينتمي للمجموعة X .

تعريف (2.10)

يقال أن الفضاء المتري (X,d) أنه فضاءً تاماً (Complete) إذا كانت كل متتالية (متتابعة) كوشية تقاربية.

مثال (2.18)

. نفرض أن $X = R$ و أن دالة المسافة معرفة بالصيغة

$$d(x,y) = |x-y|, \ \forall\, x, y \in R$$

من نظرية بلزانو- وفيرشتراس التي دُرست في مقرر التحليل الحقيقي و التي تنص على أن كل متتالية (متتابعة) حقيقية من R إذا كانت كوشية فهي تقاربية. لذا فإن الفضاء المتري العادي (R,d) هو فضاء تام.

نظرية (2.12)

بفرض أن $X = R^n$ و أن $d : R^n \times R^n \to R$ دالة المسافة معرفة بالصيغة

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, p \geq 1,$$

حيث أن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ في R^n. الفضاء المتري

(X, d_p) فضاء تام.

البرهان

نفرض أن $\{x^{(m)}\}_{m\geq 1}$، حيث أن $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$، متتالية كوشي في الفضاء (X, d_p) أي أن $d_p(x^{(m)}, x^{(m^*)}) \to 0$ عندما $m, m^* \to \infty$. فإنه لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $n_0(\varepsilon)$ بحيث أن

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{(m)} - x_k^{(m^*)} \right|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \ \forall m, m^* \geq n_0(\varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

لذا يكون $\left| x_k^{(m)} - x_k^{(m^*)} \right| < \varepsilon$ لكل $m, m^* \geq n_0(\varepsilon)$ و لكل $k = 1,2,\ldots,n.$ بتثبيت قيمة للعدد k و باستخدام مفهوم كوشي للتقارب نجد أن $\{x^{(m)}\}_{m\geq 1}$ تتقارب إلى نقطة النهاية x_k. أي أن $\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k$.

بفرض أن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $m \geq n_0(\varepsilon)$، فإنه من (1) نجد أن

$$\forall m^* \geq n_0(\varepsilon), \ \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{(m)} - x_k^{(m^*)} \right|^p < \varepsilon^p \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بجعل $m^* \to \infty$ في (2) نحصل على

$$\forall m \geq n_0(\varepsilon), \ \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \leq \varepsilon^p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

أي أن $x^{(m)} \to x$ في (X, d_p). ■

مثال (2.18)

. نفرض أن $X = (-1,1)$ و (X, d) فضاء متري ،حيث أن دالة المسافة معرفة بالصيغة $d(x, y) = |x - y|,\ \forall\, x, y \in X$. الفضاء المتري (X, d) ليس تاماً لأن المتتالية الكوشية $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ليست تقاربية.

تمارين على الفصل الثاني

1) هل الدالة $d : R \times R \to R$ دالة مسافة على R .

- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b) = |2a - 3b|,\ \forall a, b \in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b) = a^2 - b^2,\ \forall a, b \in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b) = |a^2 - b^2|,\ \forall a, b \in R$

2) بفرض أن $d : X \times X \to R$ دالة مسافة معرفة على المجموعة الغير خالية X ، وبفرض أن $e : X \times X \to R$ دالة معرفة بالصيغة

$$e(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$$

- برهن أن $e : X \times X \to R$ هي ايضا دالة مسافة على X .
- برهن أن المجموعة $A \subseteq X$ تكون مفتوحة في (X, e) إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في (X, d) .

3) هل الدالة $d : R \times R \to R$ دالة مسافة على R .

- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b) = \min\{a, b\},\ \forall a, b \in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b) = \max\{a, b\},\ \forall a, b \in R$

4) إذا كانت $d : R^2 \times R^2 \to R$ دالة معرفة بالصيغة:

$$d(a,b)=\max\{|a_1-a_2|,|b_1-b_2|\},\ \ \forall a=(a_1,a_2),b=(b_1,b_2)\in R^2$$

فهل d دالة مسافة على R^2 .

5) بفرض أن $f:X\to Y$ دالة تباين من المجموعة الغير خالية X إلى الفضاء المتري (Y,e). وبفرض أن $d:X\times X\to R$ دالة معرفة بالصيغة

$$d(x,y)=e[f(x),f(y)]$$

برهن أن $d:X\times X\to R$ دالة مسافة على X .

6) ادرس ماإذا كانت الدالة $d:R\times R\to R$ هي دالة مسافة في الحالتين:

$$(1)\ d(a,b)=\begin{cases} a+b & if\ \ a\geq b \\ 1 & if\ \ a<b \end{cases}$$

$$(2)\ d(a,b)=\begin{cases} 4 & if\ \ a\neq b \\ 0 & if\ \ a=b \end{cases}$$

7) بفرض أن (X,d) فضاء متري و أن $B(x,\varepsilon_1)$ و $B(y,\varepsilon_2)$ كرتان مفتوحان بحيث أن $B(x,\varepsilon_1)\cap B(y,\varepsilon_2)\neq\phi$. برهن أنه لأي نقطة

$$z\in B(x,\varepsilon_1)\cap B(y,\varepsilon_2)$$

يوجد $\varepsilon_3>0$ بحيث أن $B(z,\varepsilon_3)\subseteq B(x,\varepsilon_1)\cap B(y,\varepsilon_2)$.

8) برهن نظرية (2.8)؟.