الفصل الثالث

الفضاءات التوبولوجية

Topological Spaces

مقدمة

بدأت دراسة مفهوم التوبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية ومن ثم على المستوي الاقليدي. و نظراً لكون الفضاءات المترية أشمل وأعم من هاتين المجموعتين ، فدراسة التوبولوجي على الفضاءات المترية و الدوال المتصلة عليها تعتبر المرحلة الثانية من تطور علم التوبولوجيا، حيث أنه لم يتوقف عند الفضاءات المترية بل امتدت دراسته لتشمل مجموعات أخرى بغض النظر عن خواص هذه المجموعات.

هذا الفصل مخصص لدراسة مفهوم الفضاء التوبولوجي العام وخواصه. بالإضافة إلى دراسة بعض المفاهيم المتعلقة بالفضاءات التوبولوجية مثل نقاط النهاية ، النقاط الداخلية ، النقاط الخارجية ، النقاط الحدودية ، الانغلاق للمجموعات الخ. سندرس أيضاً مفهوم كل من الأساس والأساس الجزئي للتوبولوجي وكذلك التوبولوجي النسبي وتوبولوجي الجداء (الضرب). أخيراً نختتم هذا الفصل بدراسة مفهوم التقارب للمتتابعات في الفضاءات التوبولوجية.

(3.1) الفضاءات التوبولوجية.

إن بناء الفضاء التوبولوجي يستند أساساً على فكرة المجموعات المفتوحة التي تطرقنا إليها في الفصل السابق ، و لقد عرفنا أن المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري تحقق خواصاً معينة كما وردت في نظرية (2.4) والتي تنص على أنه في الفضاء المتري (X,d) يتحقق الآتي :

(i) كل من X, ϕ مجموعة مفتوحة.

(ii) إذا كانت $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ مجموعات مفتوحة فإن التقاطع

$$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap ... \cap G_n$$

يعطي مجموعة مفتوحة.

(iii) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

لهذا نعرف التوبولوجي ، على مجموعة غير خالية X ، بأنه عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة من X ولكي نضمن أن عناصر هذه العائلة هي مجموعات مفتوحة فيلزم أن تحقق هذه المجموعات خواص المجموعات المفتوحة الواردة في نظرية (2.4).

تعريف (3.1)

لتكن X مجموعة غير خالية و τ عائلة مكونة من مجموعات جزئية من X بحيث تحقق الشروط التالية:

(i) المجموعتان X, ϕ تنتميان إلى τ .

(ii) لكل مجموعتين $A, B \in \tau$ فإن $A \cap B \in \tau$ (أي أن تقاطع عدد منته من عناصر τ يكون عنصراً في τ ايضا).

(iii) لتكن $A_i \in \tau$ فإن $\bigcup_i A_i \in \tau$.

العائلة τ تسمى توبولوجي على المجموعة X و أي مجموعة $G\in\tau$ تسمى مجموعة مفتوحة ($\tau-open$) ومكملتها تسمى مجموعة مغلقة ($\tau-closed$). ويسمى الثنائي المرتب (X,τ) فضاء توبولوجي (Topological space) .

مثال (3.1)

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$. فإنه يمكن تعريف التوبولوجيات التالية :

$\tau_1=\{X,\phi\}$

$\tau_2=\{X,\phi,\{a\}\}$

$\tau_3=\{X,\phi,\{b\}\}$

$\tau_4=\{X,\phi,\{c\}\}$

$\tau_5=\{X,\phi,\{a,b\}\}$

$\tau_6=\{X,\phi,\{a,c\}\}$

$\tau_7=\{X,\phi,\{b,c\}\}$

$\tau_8=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\tau_9=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$

$\tau_{10}=\{X,\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$

$\tau_{11}=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$

$\tau_{12}=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\}$

$\tau_{13}=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\}\}$

$\tau_{14}=\{X,\phi,\{b\},\{b,c\}\}$

$\tau_{15}=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

$\tau_{16}=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau_{17}=\{X,\phi,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

ويمكن الحصول على توبولوجيات أخرى. علما بأن كل توبولوجي مما سبق يحقق الشروط الثلاث السابقة.

مثال (3.2)

إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة. أي من التجمعات التالية تشكل توبولوجي على X :

(i) $\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

(ii) $\tau_2 = \{X, \phi, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

(iii) $\tau_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$.

الحل

(i) τ_1 لا تمثل توبولوجي حيث أن $\{a,b\},\{a,c\} \in \tau_1$ و لكن نجد أن

$$\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\} \notin \tau_1$$

و من ثم فإن τ_1 لا تحقق الشرط الثالث من شروط التوبولوجي.

(ii) τ_2 لا تمثل توبولوجي لأن $\{a,b,c\},\{a,b,d\} \in \tau_2$ ، بينما التقاطع

$$\{a,b,c\} \cap \{a,b,d\} = \{a,b\} \notin \tau_2$$

و من ثم فإن τ_2 لا تحقق الشرط الثاني من شروط التوبولوجي.

(iii) $\tau_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ تمثـــل توبولـــوجي لأنها تحقق كل شروط التوبولوجي .

مثال (3.3)

نفرض أن X مجموعة ، فإن مجموعة القوة $P(X)$ (عائلة كل المجموعات الجزئية من X) تمثل توبولوجي على X وتسمى التوبولوجي المتقطعة (Discrete topology) أو التوبولوجي القوي. بينما التوبولوجي $\tau = \{X, \phi\}$ يسمى التوبولوجي الغير متقطع (Indiscrete topology) و يسمى أحيانا التوبولوجي الضعيف أو التوبولوجي التافه.

مثال (3.4)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و أن

$$\tau = \{G \subseteq X : (X - G) \;\; finite\} \cup \{\phi\}$$

أي أن τ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من X و التي مكملاتها تكون منتهية بالإضافة إلى المجموعة الخالية ϕ. العائلة τ تمثل توبولوجي على X يسمى توبولوجي المكملات المنتهية (Co-finite Topology) و ذلك يمكن ملاحظته من خلال دراسة مدى تحقق شروط التوبولوجي عليه:

الشرط الأول:

من التعريف نجد أن $\phi \in \tau$، و حيث أن $(X - X) = \phi$ و هي مجموعة منتهية فإن $X \in \tau$ و عليه نستنتج أن $X, \phi \in \tau$.

الشرط الثاني:

نفرض أن $G, H \in \tau$ و المطلوب إثبات أن $G \cap H \in \tau$ ؟

بما أن $G, H \in \tau$، فإن كل من $(X - H)$ و $(X - G)$ مجموعة منتهية و من ثم فإن إتحادهما $(X - G) \cup (X - H) = X - (G \cap H)$ يكون مجموعة منتهية و من ثم نجد أن $G \cap H \in \tau$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة من عناصر τ و المطلوب إثبات أن $\cup_i G_i \in \tau$ ؟

حيث أن $G_i \in \tau$ لكل i فإن كل مجموعة من المجموعات $(X - G_i)$ هي مجموعة منتهية و من ثم تقاطع المجموعات المنتهية $\cap_i (X - G_i)$ مجموعة منتهية. و لكن $\cap_i (X - G_i) = X - \cup_i G_i$ و بالتالي فإن $X - \cup_i G_i$ مجموعة منتهية و عليه فإن $\cup_i G_i \in \tau$.

إذاً يمكن القول بأن τ تمثل توبولوجي على X.

مثال (3.5)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و $p \in X$. العائلة

$$P = \{\phi, G \subseteq X : p \in G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى توبولوجي النقطة المختارة .

الحل

الشرط الأول:

من التعريف نجد أن $\phi \in P$، و حيث أن $p \in X$ فإن $X \in P$ و علية نستنتج أن $X, \phi \in P$.

الشرط الثاني:

إذا كانت $G, H \in P$ فإن $p \in G \wedge p \in H$ و هذا يقتضي أن $p \in G \cap H$ و من ثم يكون $G \cap H \in P$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة من عناصر P ، فإن $p \in G_i$ و عليه فإن $p \in \cup_i G_i$ أي أن $\cup_i G_i \in P$.

إذاً $P = \{\phi, G \subseteq X : p \in G\}$ توبولوجي على X . هذ التوبولوجي يسمى توبولوجي النقطة المختارة (Particular point topology) والثنائي المرتب (X, P) يسمى فضاء النقطة المختارة .

مثال (3.6)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و $p \in X$. العائلة

$$P = \{X, G \subseteq X : p \notin G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى توبولوجي النقطة المستبعدة .

الحل

يترك كتمرين للقارئ.

مثال (3.7)

بفرض أن $X = R$ مجموعة الاعداد الحقيقية. عائلة المجموعات الجزئية من R التي على الصورة :

$$u = \{G \subseteq X : \forall x \in G,\ \exists\, \varepsilon > o : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى التوبولوجي العادي أو التوبولوجي الاقليدي.

الحل

الشرط الأول: واضح أ **ن** $R, \phi \in u$

الشرط الثاني:

بفرض أن $G_1, G_2 \in u$, وأن $x \in G_1 \cap G_2$ و من ذلك نحصل على أن $(x \in G_1) \wedge (x \in G_2)$. لذا توجد $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ بحيث يكون

$$(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq G_1 \ , \ \ (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq G_2 .$$

باختيار $\delta = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ نجد أن

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_1 \ , \ \ (x-\delta, x+\delta) \subseteq G_2 .$$

إذاً

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_1 \cap G_2 .$$

وعليه فإن $G_1 \cap G_2 \in u$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من عناصر u ، و أن $x \in \cup_i G_i$ إذاً يوجد $G_{i_0} \in u$ بحيث أن $x \in G_{i_0}$ و من ثم يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{i_0}$. بما أن $G_{i_0} \subseteq \cup_i G_i$, فإن $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \cup_i G_i$

إذاً $\cup_i G_i \in u$.

مثال (3.8)

بفرض أن N هي مجموعة الأعداد الطبيعية . العائلة:

$$\tau=\{\phi,N,A_n=\{1,2,,\ldots,n\}:n\in N\}$$

تمثل توبولوجي على N .

الحل

الشرط الأول: واضح أ **ن** $N,\phi\in\tau$

الشرط الثاني :

بفــــرض أن $A_i,A_j\in\tau$, حيـــث $i,j\in N$ **و** عليــــه نحصـــــل علـــــى $A_i\cap A_j=A_k\in\tau$ حيث أن $k=\min\{i.j\}$ **.**

الشرط الثالث :

نفرض أن $A_{n_i}\in\tau$ حيث $i\in I$ و بالتالي فإن $\{A_{n_i}=\{1,2,\ldots,n_i$ و عليه يكون $\cup A_{n_i}=\{1,2,\ldots,k\}\in\tau$, حيث $k=\sup\{n_i:i\in I\}$ إذا كان k منته. أما إذا كان $k=+\infty$ فإن $\cup A_{n_i}=N\in\tau$ **.**

مثال (3.9)

بفـــرض أن $X=\{0,1\}$ ، العائلــــة $S=\{\phi,\{1\},X\}$ توبولـــوجي علــــى المجموعـــة X **.** الــزوج المرتــب (X,S) فضـــاء توبولــوجي، يســمى فضـــاء سيربنسكي (Sierpiński space) **.**

نظرية (3.1)

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن كل من τ_1 و τ_2 توبولوجي على X ، فإن التقاطع $\tau_1\cap\tau_2$ توبولوجي على X **.**

البرهان

الشرط الأول :

بما أن $X,\phi\in\tau_1$ ، $X,\phi\in\tau_2$ فإن $X,\phi\in\tau_1\cap\tau_2$.

الشرط الثاني:

نفرض أن $A,B\in\tau_1\cap\tau_2$ ، إذاً $A,B\in\tau_1$ و $A,B\in\tau_2$ وبما أن كل من τ_1 و τ_2 تمثل توبولوجي على X فإن $A\cap B\in\tau_1$ و $A\cap B\in\tau_2$ وهذا يقتضي أن $A\cap B\in\tau_1\cap\tau_2$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $A_i\in\tau_1\cap\tau_2$ ، إذاً $A_i\in\tau_1$ و $A_i\in\tau_2$

وبما أن كل من τ_1 و τ_2 تمثل توبولوجي فإن :

$$\cup A_i\in\tau_1,\ \cup A_i\in\tau_2\ \Rightarrow \cup A_i\in\tau_1\cap\tau_2$$

لذا يمكن القول بأن $\tau_1\cap\tau_2$ تمثل توبولوجي على X .

والآن بعد أن تأكدنا من أن تقاطع أي توبولوجيين هو توبولوجي ، فماذا عن الاتحاد $\tau_1\cup\tau_2$ ؟. المثال التالي يبين أنه ليس من الضروري أن يكون الاتحاد $\tau_1\cup\tau_2$ توبولوجي على X .■

مثال(3.10)

نلاحظ أن كل من $\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\}$ ، $\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\}$ توبولوجي على المجموعة الغير خالية $X=\{a,b,c\}$.

من الواضح أن $\tau_1\cup\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ ليس توبولوجي على X

وذلك لأن $\{a\},\{b\}\in\tau_1\cup\tau_2$ ، بينما $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$. أي أن $\tau_1\cup\tau_2$ لا تحقق الشرط الثالث من شروط التوبولوجي.

تعريف (3.2)

نفرض أن كل من τ_1 و τ_2 توبولوجي على المجموعة الغير خالية X . يقال أن التوبولوجي τ_1 أضعف (coarser or weaker) من التوبولوجي τ_2 أو أن τ_2 أقوى (finer or stronger) من τ_1 إذا كان $\tau_1\subseteq\tau_2$ ويرمز لذلك بالرمز $\tau_1\leq\tau_2$

نلاحظ من التعريف السابق أنه إذا كان $\tau_1\subseteq\tau_2$ فإنه لكل مجموعة $G\in\tau_1$ ، فإن $G\in\tau_2$. كما تجدر الاشارة إلى أن التوبولوجي المتقطع على مجموعة غير خالية X هو أقوى توبولوجي ، و التوبولوجي التافه هو أضعف توبولوجي على X .

كما يجدر بنا توضيح أنه إذا كانت T عائلة كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة X فإن $(T,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

ولفهم العلاقة بين التوبولوجي الأقوى والتوبولوجي الأضعف، دعنا نتخيل فضاءً توبولوجياً يمكن تمثيل عناصره كمثل حمولة شاحنة ممتلئة بقطع الصخور، الحصيات و اتحاداتها تمثل المجموعات المفتوحة. تخيل أننا قمنا بعملية تفتيت الحصى إلى قطع صغيرة فسنجد أن عائلة الحصيات تم تكبيرها ومن ثم ننظر لها كما لو كانت توبولوجي أقوى من توبولوجي الحالة الأولى .

مثال (3.11)

نفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$. و نفرض أن

$$\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\}$$

$$\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

$\tau_3 = \{X, \phi, \{a,b\}\}$

نلاحظ أن $\tau_1 \le \tau_2$ و $\tau_3 \le \tau_2$ ولكن $\tau_2 \not\le \tau_1$.

تعريف (3.3)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. المجموعة $A \subseteq X$ تسمى جواراً للنقطة $p \in X$ إذا وجدت مجموعة $G \in \tau$ بحيث يكون $p \in G \subseteq A$.

مثال (3.12)

في الفضاء الاقليدي كل مجموعة من المجموعتين $A = (-1,1)$ و $B = [-1,1]$ تعتبر جوار للنقطة $0 \in R$. بينما المجموعة $C = \{0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...\}$ لا تكون جواراً لهذه النقطة.

مثال (3.13)

المجموعة وحيدة النقطة $\{x\}$ تكون جواراً للنقطة $x \in X$ في الفضاء المتقطع.

نظرية (3.2)

المجموعة $A \subseteq X$ ، في الفضاء التوبولوجي (X,τ) ،تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

البرهان

اولاً نفرض أن $G \in \tau$ و أن $x \in G$ إذاً $x \in G \subseteq G$ أي أن G جوار للنقطة x وهذا صحيح لكل نقطة $x \in G$.

ثانيا: نفرض أن G هي جوار لكل نقطة من نقاطها . أي أنه لكل $x \in G$ توجد مجموعة مفتوحة U_x بحيث أن $x \in U_x \subseteq G$ و بهذا نحصل على أن $G = \cup\{U_x : x \in G\}$ و هذا يعني أن G مجموعة مفتوحة.■

تمارين (3.1)

(1). اكتب كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$.

(2). قارن بين جميع التوبولوجيات المعرفة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$

(3). بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتين غير خاليتين. أذكر الشروط التي يجب توفرها في المجموعتين A,B كي تكون العائلة $\tau=\{X,\phi,A,B\}$ توبولوجي على X.

(4). بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A\subseteq X$. برهن أن $A\in\tau$ إذا و فقط إذا كان لكل $x\in A$ ، فإنه توجد مجموعة $G\in\tau$ بحيث أن $x\in G\subseteq A$.

(5). بفرض أن $\{\tau_i\}$ عائلة من التوبولوجيات المعرفة على مجموعة X. برهن أن $\cap_i\tau_i$ هو توبولوجي على X. بينما $\cup_i\tau_i$ فليس من الضروري أن يمثل توبولوجي على X.

(6). هل العائلة $\tau=\{R,(a,\infty):a\in R\}\cup\{\phi\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R؟. و ضح ذلك؟.

(7). هل العائلة $\tau=\{\phi,N,E_n=\{n,n+1,n+2,\ldots,\}:n\in N\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الطبيعية N.

(8). في الفضاء R^n بين أن دوال المسافة $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ و $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ و $d_\infty(x,y)=\sup|x_i-y_i|$ تعرف نفس التوبولوجي على الفضاء R^n.

(3.2) المجموعات المغلقة و نقاط النهاية (التراكم)

Closed Sets and Accumulation Points

لقد استخدمنا المجموعات المفتوحة كنقطة البداية في تعريف التوبولوجي .سوف نستخدم المجموعات المفتوحة فيما يلي في تعريف و دراسة بعضاً من المفاهيم الأساسية مثل المجموعات المغلقة، إغلاق المجموعات و نقاط النهاية.

تعريف (3.4)

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,τ) تسمى مجموعة مغلقة إذا كانت المجموعة $X-A=A^c$ مفتوحة.

مثال (3.14)

(i) المجموعة الجزئية $[a,b]\subset R$ مغلقة لأن مكملتها

$$R-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$$

مجموعة مفتوحة في R

(ii) المجموعة الجزئية $[a,+\infty)\subset R$ مغلقة لأن مكملتها

$$R-[a,+\infty)=(-\infty,a)$$

مجموعة مفتوحة في R

مثال (3.15)

لتكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة الغير خالية $X=\{a,b,c,d,e\}$. بما أن كل عناصر التوبولوجي τ هي مجموعات جزئية مفتوحة ، فإنه بأخذ المكمل لكل عنصر من عناصر العائلة τ نحصل على عائلة المجموعات المغلقة وهي :

$$\tau^C=\{\phi,X,\{b,c,d,e\},\{c,d,e\},\{b,d,e\},\{d,e\}\}$$

نظرية (3.3)

بفــرض أن (X,τ) فضـــاء توبولــوجي. عائلــة المجموعــات المغلقــة فــي الفضاء (X,τ) تحقق الخواص التالية :

(i) X,ϕ مجموعتان مغلقتان.

(ii) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(iii) اتحاد عدد محدود من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

البرهان

يترك للقارئ لسهولته . ■

تعريف (3.5)

بفرض أن (X,τ) فضـاء توبولـوجي و τ^c عائلـة المجموعـات المغلقـة بالنسـبة للتوبولـوجي τ. الانغـلاق (closure) للمجموعـة A فـي الفضـاء التوبولـوجي (X,τ) يعـرف بأنـه تقـاطع كـل المجموعـات المغلقـة فـي X والتـي تحتـوى المجموعة الجزئية A. أي أن :

$$\overline{A}=\cap\{F : A\subseteq F, F\in\tau^c\}.$$

وهناك تعريف آخر مكافئ لهذا التعريف وهو : الانغلاق للمجموعة الجزئية A عبـارة عـن أصـغر مجموعـة جزئيـة مغلقـة تحتـوى A ، وذلـك بأنـه إذا كانـت F مجموعة مغلقة بحيث أن $A\subseteq F$ فإن $A\subseteq\overline{A}\subseteq F$.

مثال (3.16)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية وأن التوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

معرف عليها. عائلة المجموعات الجزئية المغلقة في X هي :

$$\tau^C = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,d,e\}, \{b,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$$

(i) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوى $\{b\}$

$$\overline{\{b\}} = X \cap \{a,b,e\} \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,d,e\} \cap \{b,d,e\} \cap \{b,e\}$$
$$= \{b,e\}$$

(ii) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوى $\{a,c\}$ هي $\overline{\{a,c\}} = X$

(iii) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحوى $\{b,d\}$

$$\overline{\{b,d\}} = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,d,e\} \cap \{b,d,e\} = \{b,d\}$$

تعريف (3.6)

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,τ) تسمى مجموعة كثيفة (dense set) إذا كان $\overline{A} = X$.

مثال (3.17)

في المثال السابق نجد أن المجموعة الجزئية $\{a,c\}$ كثيفة لأن $\overline{\{a,c\}} = X$، بينما المجموعة الجزئية $\{b,d\}$ ليست كثيفة.

مثال (3.18)

في الفضاء التوبولوجي الضعيف (الغير متقطع) (X,I)، حيث أن $I = \{X,\phi\}$، نعلم أن المجموعة الوحيدة المغلقة في هذا التوبولوجي والتي تحتوي A هي X، إذاً $\overline{A} = X$ لكل مجموعة جزئية غير خالية $A \subseteq X$.

مثال (3.19)

في الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D)، حيث أن $D = P(X)$، فإن كل مجموعة جزئية فيه تكون مغلقة ومفتوحة في آن واحد، و من ثم فإن أصغر مجموعة مغلقة تحتوي المجموعة A هي المجموعة A ذاتها. أي أن $\overline{A} = A$.

نظرية (3.4)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A \subseteq X$ فإن $p \in \overline{A}$ إذا و فقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحوي النقطة p تتقاطع مع المجموعة A على الأقل في عنصر . أي أن

$$p \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall G \in \tau,\ p \in G \Rightarrow A \cap G \neq \phi$$

البرهان

أولاً: نفترض انه توجد مجموعة مفتوحة $G \in \tau$ تحتوي على النقطة p ($p \notin G^c$) بحيث يكون $A \cap G = \phi$. بما أن $A \cap G = \phi \Leftrightarrow A \subseteq G^c$. إذاً $A \subseteq \overline{A} \subseteq G^c$ وحيث أن G^c مجموعة مغلقة فإن $p \notin \overline{A}$. وهذا يعني أنه إذا كانت $p \in \overline{A}$ فإن $A \cap G \neq \phi$.

ثانياً: نفترض أن $p \notin \overline{A}$ وهذا يقتضي أن $p \in (\overline{A})^c$. ولكن $A \cap (\overline{A})^c = \phi$. إذاً نستطيع القول بأنه توجد مجموعة مفتوحة $(\overline{A})^c$ تحتوي على النقطة p وأن $A \cap (\overline{A})^c = \phi$.وهذا يعني أنه إذا كان $A \cap G \neq \phi$ لكل مجموعة مفتوحة $G \in \tau$ تحتوي على النقطة p فإن $p \in \overline{A}$.■

مثال (3.20)

في الفضاء التوبولوجي المعتاد (الاقليدي) (R,u)، اثبت أن مجموعة الأعداد القياسية (أو النسبية) Q كثيفة في R،أي أن $\overline{Q} = R$. وكذلك ايضا $\overline{R \setminus Q} = R$.

الحل

نفرض أن $a \in R$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset R$$

وحيث أن الفترة المفتوحة $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ تحوي عدداً لا نهائياً من الأعداد القياسية لذا فإن $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap Q \neq \phi$ وهذا يتحقق لكل فترة أو مجموعة مفتوحة تحوي العدد الحقيقي a. و هذا يعني أن $a \in \overline{Q}$ لكل $a \in R$ و منها يكون $R \subseteq \overline{Q}$ وعليه يكون $\overline{Q} = R$. أي أن Q كثيفة في R.

نظرية (3.5)

لأي فضاء توبولوجي (X, τ) ولأي مجموعتين $A, B \subseteq X$ ، فإن :

(i) $A \subseteq \overline{A}$ لكل $A \subseteq X$

(ii) $A = \overline{A}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مغلقة.

(iii) إذا كانت $A \subseteq B$ ، فإن $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

البرهان

(i) إثبات هذه الفقرة يأتي مباشرة من التعريف ، حيث أن أصغر مجموعة مغلقة تحتوي المجموعة A هي $\overline{A}$.

(ii) نفرض أن $A = \overline{A}$ ، و حيث أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة (من التعريف) ، إذاً A مجموعة مغلقة.

من ناحية ثانية نفرض أن A مجموعة مغلقة، إذاً $\overline{A} \subseteq A$ ولكن $A \subseteq \overline{A}$. إذاً $A = \overline{A}$.

(iii) نفرض أن $A \subseteq B$ ، من الفقرة (i) نجد أن $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$ و من ثم يكون فإن $A \subseteq \overline{B}$ و هذا يقتضي أن $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{B}$ لأن $\overline{B}$ مغلقة . أي أن $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.■

نظرية (3.6)

لأي فضاء توبولوجي (X,τ) و لأي مجموعتين $A,B\subseteq X$ ، فإن :

(i) $\overline{\phi}=\phi$

(ii) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(iv) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

البرهان

(i) حيث أن ϕ مغلقة فإن $\overline{\phi}=\phi$

(ii) من كون $\overline{A}$ مغلقة (التعريف) فإن $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$

(iii) لإثبات $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ نتبع الآتي:

$\because A\subseteq A\cup B\Rightarrow\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$ (1)

$\because B\subseteq A\cup B\Rightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$ (2)

من (1)و (2) نجد أن

$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$ (3)

ومن ناحية ثانية. بما أن $B\subseteq\overline{B}$, $A\subseteq\overline{A}$ ، فإن $A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$ وبما أن المجموعة $\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة تحتوى المجموعة $A\cup B$ ، بينما أصغر مجموعة مغلقة تحتوى $A\cup B$ هي انغلاقها . أي أن :

$A\cup B\subseteq\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$ (4)

من (3) ، (4) نجد أن :

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(iv) لإثبات $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ نتبع الآتي:

$\because A\cap B\subseteq A\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}$ (1)

$$\because A\cap B\subseteq B\Rightarrow \overline{A\cap B}\subseteq \overline{B} \qquad (2)$$

من (1)و (2) نجد أن $\overline{A\cap B}\subseteq \overline{A}\cap \overline{B}$.■

ولإثبات عدم تحقق التساوي في الفقرة (iv) نضع المثال التالي:

مثال (3.21)

نفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ و أن $\tau=\{X,\phi,\{a,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على X ، و إذا كان $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,d\}$ ، فإنه من السهل إثبات أن

$$\overline{A}=\{a,b,c,d\}=\overline{B}=X$$

و من ثم فإن

$$\overline{A}\cap \overline{B}=X \qquad (1)$$

بينما

$$\overline{A\cap B}=\overline{\{b\}}=\{b\} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على $\overline{A}\cap \overline{B}\not\subset \overline{A\cap B}$.

الآن ننتقل لشرح طريقة أخرى لوصف إغلاق المجموعات .هذه الطريقة تتم من خلال استخدام مفهوم نقاط النهاية (التراكم) للمجموعات .

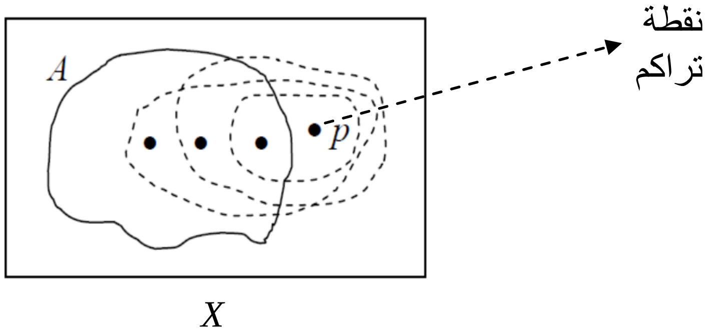
تعريف (3.7)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي ، $p\in X$. يقال أن النقطة p هي نقطة تراكم أو نقطة نهاية (Limit Point) للمجموعة الجزئية $A\subseteq X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى النقطة p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A تختلف عن p, و يعبر عن ذلك رياضياً بالصيغة.

$$\forall G\in\tau, p\in G \Rightarrow (G-\{p\})\cap A\neq\phi$$

مجموعة كل نقاط النهاية (التراكم) للمجموعة A تسمى مشتقة A ويرمز لها

بالرمز $A^{`}$ أو $d(A)$.



شكل (3.1)

مثال (3.22)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، فإذا كانت $A=\{a,b,c\}\subseteq X$ ، اوجد $A^{`}$.

الحل

(1). النقطة $a\in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A لأن المجموعة المفتوحة $\{a\}\in\tau$ والتي تحتوى النقطة a لا تحتوى على نقاط من A تختلف عن a . أي أن $a\notin A^{`}$.

(2). النقطة $b\in X$ نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A وذلك لأن المجموعات المفتوحة التي تحوى b هي $X,\{b,c,d,e\}$ و كل منها تحتوى على نقاط أخرى من A تختلف عن b. أي أن $b\in A^{`}$.

(3). النقطة $c\in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة A ، لأن المجموعة المفتوحة $\{c,d\}\in\tau$ والتي تحتوى على النقطة $c\in X$ لا تحتوى على نقاط من A تختلف عن c. أي أن $c\notin A^{`}$

(4). بالمثل يمكن التأكد من كون كل من النقطتين $d, e \in X$ نقاط نهاية للمجموعة A. إذاً نقاط النهاية للمجموعة A هي مجموعة النقاط $A` = \{b,d,e\}$.

مثال (3.23)

بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية و أن التوبولوجي

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

معرف على المجموعة X، فإذا كانت $A = \{a,b,d\}$ ، اوجد $A`$.

الحل

(1) العنصر $a \notin A`$ لأن المجموعة المفتوحة $\{a\}$ تحوي العنصر a و لا تحوي أي عنصر من A يختلف عن a .

(2) العنصر $b \in A`$ لأنه لا يوجد سوى مجموعتين مفتوحتين تحتويان النقطة b هما $\{b,c,d,e\}$, X و كل منهما تحوي نقاط من A مختلفة عن b . أي أن :

$$(\{b,c,d,e\} - \{b\}) \cap A \neq \phi \text{ و } (X - \{b\}) \cap A \neq \phi$$

(3) العنصر $c \in A`$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر c هي $X, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}$ و جميعها تحتوي على نقاط من A .

(4) العنصر $d \notin A`$ لأنه توجد مجحموعة مفتوحة $\{c,d\}$ تحوي العنصر d و لكنها لا تحوي أي عنصر من A يختلف عن d .

أي أن $(\{c,d\} - \{d\}) \cap A = \phi$.

(5) العنصر $e \in A^{`}$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $e$ هي $X,\{b,c,d,e\}$ و جميعهـــا تحتـــوي علـــى نقـــاط مـــن $A$ . إذاً $A^{`}=\{b,c,e\}$.

مثال (3.24)

اوجد $A^{`}$ للمجموعة $A \subseteq X$ بالنسبة للفضاء المتقطع (X,D) .

الحل

نحن نعلم أنه في الفضاء المتقطع فإنه لكل نقطة $x \in X$ ، فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة و من ثم يكون $(\{x\}-\{x\}) \cap A = \phi$ مما يعني أنه لكل $x \in X$ فإن $x \notin A^{`}$ . وعليه يكون $A^{`}=\phi$.

مثال (3.25)

اوجد $A^{`}$ للمجموعة $A \subseteq X$ بالنسبة للفضاء الغير المتقطع (X,I) .

الحل

نحن نعلم أن $I=\{X,\phi\}$ أي أن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان . فإذا كانت المجموعة A تحوي عنصر وحيد فقط أي أن $A=\{p\}$ فنجد أن المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحوي العنصر p هي المجموعة X و عليـــه نجـــد أن $(X-\{p\}) \cap A = \phi$ إذاً $p \notin A^{'}$ و أي نقطـــة أخرى $q \in X$ بحيث أن $q \neq p$ نجد أن $(X-\{q\}) \cap A \neq \phi$ و من ثم يكون $q \in A^{'}$ و حيث أن q نقطة اختيارية فإن $A^{'}=X-\{p\}=\{p\}^{C}$.

أما إذا كانت المجموعة A تحوي أكثر من عنصر فإننا نجد أن $A^{'}=X$.

وفي ضوء ذلك يمكن كتابة

$$A' = \begin{cases} X - \{p\} & if \quad A = \{p\} \\ X & otherwise \end{cases}$$

وكلمة (otherwise) تعني خلاف ذلك ، أي أن المجموعة A تحوي أكثر من عنصر.

نظرية (3.7)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A,B \subseteq X$ ،فإن:

(i) إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A^{`} \subseteq B^{`}$

(ii) $(A \cup B)^{`} = A^{`} \cup B^{`}$

(iii) $(A \cap B)^{`} \subseteq A^{`} \cap B^{`}$

البرهان

(i) نفرض أن $p \in X$ نقطة نهاية للمجموعة A ، أي أن $p \in A^{`}$ وذلك يعنى أن كل مجموعة مفتوحة G تحتوى النقطة p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A تختلف عن p . أي أن $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$

وبما أن $A \subseteq B$ فإن ذلك يؤدى إلى أن :

$$\phi \neq (G \setminus \{p\}) \cap A \subseteq (G \setminus \{p\}) \cap B$$

أي أن

$$(G \setminus \{p\}) \cap B \neq \phi$$

وهذا معناه أن p نقطة نهاية للمجموعة الجزئية B ومن ثم فإن $p \in B^{`}$ وهذا يؤدى إلى أنه $A^{`} \subseteq B^{`}$.

(ii) من إثبات البند رقم (i) نستطيع الحصول على الآتي :

$\because\ A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow A^{`} \subseteq (A \cup B)^{`}$ (1)

$\because\ B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow B^{`} \subseteq (A \cup B)^{`}$ (2)

ومن (1) ,(2) نحصل على أن :

$$A^{`} \cup B^{`} \subseteq (A \cup B)^{`} \qquad (3)$$

لإثبات أن $(A \cup B)^{`} \subseteq A^{`} \cup B^{`}$ سوف نحاول إثبات أن أي عنصر غير موجود في $A^{`} \cup B^{`}$ هو غير موجود في $(A \cup B)^{`}$ و ذلك كما يلي:

نفرض أن $p \notin A^{`} \cup B^{`}$ فإن ذلك يؤدى إلى أن $p \notin A^{`}$ و $p \notin B^{`}$ ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G, H \in \tau$ بحيث يكون

$$p \in G,\ p \in H,\ (G - \{p\}) \cap A = \phi\ , (H - \{p\}) \cap B = \phi$$

بما أن $p \in (G \cap H) \in \tau$ ، و في نفس الوقت

$$((G \cap H) - \{p\}) \cap (A \cup B) = \phi$$

إذاً $p \notin (A \cup B)^{`}$ و عليه يكون

$$(A \cup B)^{`} \subseteq A^{`} \cup B^{`} \qquad (4)$$

ومن (3) و (4)نجد أن:-

$$(A \cup B)^{`} = A^{`} \cup B^{`}$$

(iii) من المعلوم أن $A \cap B \subseteq A.$ و $A \cap B \subseteq B$.

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $(A \cap B)^{`} \subseteq A^{`}$ و $(A \cap B)^{`} \subseteq B^{`}$

ومن ثم يكون

$$\blacksquare\ (A\cap B)^{`} \subseteq A^{`} \cap B^{`}.$$

ولإثبات عدم صحة الاتجاه الآخر نضح المثال التالي:

مثال (3.26)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a,b\},\{b\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ ، فإذا كانت $B=\{b,c\},\ A=\{a,c\}$ ، فإنه يتضح أن $A^{`}=\{c\}$ ، $B^{`}=\{a,c\}$ ، و هذا يؤدي إلى أن $A^{`}\cap B^{`}=\{c\}$

و بما أن $A\cap B=\{c\}$ ، فإن $(A\cap B)^{`}=\{c\}^{`}=\phi$

$$\therefore A^{`}\cap B^{`}=\{c\}\not\subset (A\cap B)^{`}=\phi.$$

نظرية (3.8)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $A\subseteq X$ فإن:

(i) المجموعة A تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان $A^{`}\subseteq A$.

(ii) المجموعة $A^{`}\cup A$ مغلقة.

البرهان

نفرض أن A مجموعة مغلقة وأن $x\notin A$ ، فإن ذلك يؤدى إلى أن A^c مجموعة مفتوحة وأن $x\in A^c$ و هذا معناه أنه توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة x و تحقق أن $A^c\cap A=\phi$ ، إذاً $x\notin A^{`}$ ، و بالتالي فإن أي نقطة خارج $A$ لا تصلح أن تكون نقطة نهاية. أي أن $A^{`}\subseteq A$.

من ناحية أخرى نفرض أن $A^{`}\subseteq A$ والمطلوب إثبات أن A مجموعة مغلقة. ولكي نثبت ذلك سوف نفترض أن $x\in A^c$ و هذا

يؤدي إلى أن $x \notin A^{`}$ وهذا معناه أنه توجد مجموعة مفتوحة G_x تحقق الآتي :

$$x \in G, (G_x - \{x\}) \cap A = \phi$$

ولكن $x \notin A$ ،إذاً $G_x \cap A = \phi$ ، و هذا يقتضي أن $G_x \subseteq A^c$.

(وذلك معناه : أنه لكل $x \in A^c$ توجد مجموعة مفتوحة G_x بحيث أن

$G_x \subseteq A^c$) أي أن A^c مجموعة مفتوحة نظراً لكونها اتحاد مجموعات

مفتوحة G_x ومن ثم A^c مفتوحة $\Leftrightarrow A$ مغلقة .

(ii) لإثبات أن $A \cup A^{`}$ مجموعة مغلقة، سوف نثبت أن $(A \cup A^{`})^c$ مجموعة مفتوحة و ذلك كما يلي:

نفرض أن $x \in (A \cup A^{`})^c$ ، إذاً $x \notin (A \cup A^{`})$ و هذا يعني أن $x \notin A^{`}$ و $x \notin A$. بما أن $x \notin A^{`}$ (أي أن x ليست نقطة نهاية للمجموعة A) ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_x بحيث أن :

$$x \in G_x, (G_x - \{x\}) \cap A = \phi$$

ولكن $x \notin A$ ،إذاً $G_x \cap A = \phi$ و هذا يؤدي إلى أن $G_x \subseteq A^C$ ويفهم من هذا أن جميع نقاط المجموعة G_x لا يمكن أن تكون نقاط تراكم (نهاية) للمجموعة A و هذا يعني أن $G_x \cap A^{`} = \phi$ و من ثم $G_x \subseteq (A^{`})^C$.

إذاً لكل $x \notin (A \cup A^{`})$ نجد أن $G_x \subseteq A^c \cap (A^{`})^c = (A \cup A^{`})^c$. أي أن

$(A\cup A^{`})^{c}$ هي اتحاد مجموعات مفتوحة $G_{x}$ و من ثم فإنها مجموعة مفتوحة و هذا بدوره يقتضي أن مكملتها $A\cup A^{`}$ هي مجموعة مغلقة .■

نظرية (3.9)

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,τ).فإن :

$$\overline{A}=A\cup A^{`}$$

البرهان

أولاً : المجموعة $A\cup A^{`}$ مجموعة مغلقة (نظرية 3.8) و من ثم فإن :

$$A\subseteq \overline{A}\subseteq A\cup A^{`} \qquad (1)$$

حيث أن $\overline{A}$ هو اصغر مجموعة مغلقة تحتوى المجموعة A.

ثانيا : بما أن $A\subseteq \overline{A}$ ، $\overline{A}$ مجموعة مغلقة فإن $\overline{A}$ تحوى كل نقاط نهايتها من (نظرية 3.8). أي أن :

$$(\overline{A})^{`}\subseteq \overline{A} \qquad (3)$$

وبما أن $A\subseteq \overline{A}$ فمن نظرية (3.8)، نجد أن :

$$A^{`}\subseteq (\overline{A})^{`} \qquad (4)$$

من (3) ,(4) نحصل على أن :

$$A^{`}\subseteq (\overline{A})^{`}\subseteq \overline{A} \qquad (5)$$

أي أن $A^{`}\subseteq \overline{A}$ وبما أن $A\subseteq \overline{A}$ فإن :

$$A\cup A^{`}\subseteq \overline{A} \qquad (6)$$

من (1) ,(6) نحصل على أن $\overline{A}=A\cup A^{`}$.■

تمارين (3.2)

(1). اثبت أن العائلة $\tau = \{R, \phi, (a,\infty) : a \in R\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R، ثم :

- اوجد المجموعات المغلقة في R.
- اوجد $\{2,5,9,\ldots\}'$ و $\{3,7\}'$
- اثبت أن :

$\overline{[3,7)} = (-\infty,7], \overline{\{5,33,56,85\}} = (-\infty,85], \overline{\{2,5,8,\ldots\}} = R$.

(2). اثبت أن العائلة $\tau = \{N, \phi, E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\} : n \in N\}$. تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الطبيعية N، ثم اوجد المجموعات الكثيفة في N و اوجد $\overline{\{3,6,9,12,\ldots\}}$, $\overline{\{7,24,47,85\}}$

(3). بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $A, B \subseteq X$. اثبت أنه إذا كانت A مجموعة مفتوحة فإن $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

(4). بفرض أن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و أن $A, B \subseteq X$ اثبت أن $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$

(5). بفرض أن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و أن $A, B \subseteq X$.
ضع مثالا توضح فيه أن $\overline{A - B} \not\subset \overline{A} - \overline{B}$

(6). برهن أن المجموعة A تكون كثيفة في X إذا و فقط إذا كانت $A^c \cap (A')^c = \phi$.

(7). في الفضاء التوبولوجي (R,τ) حيث $\tau = \{(a,\infty) : a \in R\} \cup \{R, \phi\}$ اثبت أن المجموعتين $A = \{2,4,6,\ldots\}$, $B = \{1,3,5,\ldots\}$ مجموعات كثيفة في R بينما $C = \{-2,-4,-6,\ldots\}$ ليست كثيفة في R.

(8). برهن أن كل مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مغلقة بالنسبة للتوبولوجي المعتاد على R .

(9). بين أنه إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن $A` = \phi$ (بالنسبة للتوبولوجي المعتاد على R).

(10).نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X ، برهن أن:

(i) $\overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

(ii) $\overline{(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

(iii) $\overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$.

(11).بفرض أن $cl: P(X) \to P(X)$ دالة معرفة على مجموعة القوى $P(X)$ بحث تحقق الشروط التالية:

(i) $cl(\phi) = \phi;$

(ii) $A \subseteq cl(A), \forall A \subseteq X;$

(iii) $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B), \forall A, B \subseteq X;.$

(iv) $cl(cl(A)) = cl(A), \forall A \subseteq X;$

هذه الدالة تسمى مؤثر الانغلاق.

برهن أن العائلة

$$\Im = \{G \subseteq X : cl(X - G) = X - G\}$$

هي توبولوجي على X وهذا التوبولوجي وحيد.

(3.3) النقاط الداخلية والخارجية ونقاط الحدود للمجموعات

Interior, Exterior and Boundary points of sets

بعد أن عرفنا فيما سبق مفهوم نقاط التراكم للمجموعات . فيما يلي سنقوم بتعريف أنواعاً أخرى من النقاط للمجموعات مثل النقاط الداخلية والنقاط الخارجية و نقاط الحدود.

تعريف (3.8)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و A مجموعة جزئية من X .

(i) النقطة $p \in X$ ، تسمى نقطة داخلية للمجموعة A (interior point) إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة G بحيث يكون $p \in G \subseteq A$.

مجموعة كل النقاط الداخلية للمجموعة A تسمى داخلية A ، يرمز لها بالرمز A° أو $\operatorname{int}(A)$.

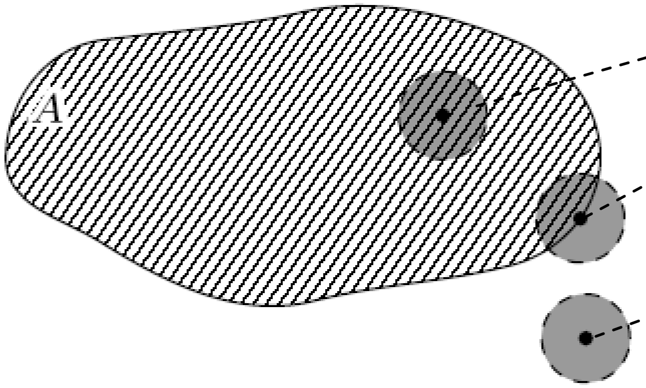
(ii) النقطة $q \in X$ ، تسمى نقطة خارجية (exterior point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة H بحيث يكون $q \in H \subseteq A^c = X - A$. أي أن $q \in (A^c)^{\circ}$.

مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A يرمز لها بالرمز $ext(A)$.

(iii) النقطة $r \in X$ تسمى نقطة حدودية (boundary point) للمجموعة A إذا كانت r ليست نقطة داخلية و ليست نقطة خارجية. أي أن

$$r \in X - (A^{\circ} \cup ext(A)).$$

ويرمز لمجموعة النقاط الحدودية للمجموعة الجزئية A بالرمز $b(A)$ وتسمى مجموعة حدود A .



شكل (3.2)

مثال (3.27)

اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ المعرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، و بفرض أن $A=\{b,c,d\}$ ، فمن السهل التأكد من أن :

(1) $A^{\circ}=\{c,d\}$

(2) $ext(A)=(A^{c})^{\circ}=\{a\}$

(3) $b(A)=\{b,e\}$.

مثال(3.28)

بفرض أن (X,D) الفضاء التوبولوجي المتقطع ، فإنه لأي مجموعة غير خالية $A\subseteq X$ نجد أن $A^{\circ}=A,\ ext(A)=A^{c},\ b(A)=\phi$.

مثال (3.29)

بفرض أن (X,I) الفضاء التوبولوجي الغير المتقطع ، فإنه لأي مجموعة جزئية $A\subset X$ ($A\neq X$) نجد أن $A^{\circ}=\phi,\ ext(A)=\phi,\ b(A)=X$.

نظرية (3.10)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و $A\subseteq X$ فإن :

(i) A° عبارة عن اتحاد كل المجموعات المفتوحة والجزئية من A .

(ii) A° مجموعة مفتوحة.

(iii) إذا كانت G مجموعة مفتوحة بحيث أن $G\subseteq A$ فإن $G\subseteq A^\circ$.

(iv) المجموعة A تكون مفتوحة إذا وإذا كان فقط $A=A^\circ$.

البرهان

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة كل المجموعات المفتوحـة والجزئية من A

(i) ونفرض أن $p\in A^\circ$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $G_0\subseteq A$ بحيث أن

$$p\in G_0\subseteq A$$

بما أن $G_0\in\{G_i\}$ فإن $p\in\cup_i G_i$ ومن ثم فإن هذا يؤدى إلى أن

$$A^\circ\subseteq\cup_i G_i \qquad (1)$$

من ناحية أخرى ، نفرض أن $q\in\cup_i G_i$ و هذا يؤدى إلى أنه توجد على الأقل مجموعـة مفتوحـة $G_0\subseteq A$ و تحتـوى النقطـة q - أي أن $q\in G_0\subseteq A$.

ومن ثم فإن q نقطة داخلية للمجموعة A ، أي أن $q\in A^\circ$ ، إذاً

$$\cup_i G_i\subseteq A^\circ \qquad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$$A^\circ=\cup_i G_i .$$

(ii) بما أن $A^\circ = \cup_i G_i$ فإن A° مجموعة مفتوحة.

(iii) بما أن G مجموعة مفتوحة وجزئية من A فإن $G \in \{G_i\}$ ومن ثم

فإن $G \subseteq \cup_i \{G_i\} = A^\circ \subseteq A$.

(iv) نفرض أن $A^\circ = A$ ، إذاً المجموعة A مفتوحة، و بفرض أن A

مجموعة مفتوحة مع الأخذ في الاعتبار أن $A \subseteq A$ ، فإننا نحصل من

على $A \subseteq A^\circ$ و لكن $A^\circ \subseteq A$ ، فإن $A^\circ = A$. ∎

نظرية (3.11)

ليكن (X, τ) فضاءً توبولوجياً و $A, B \subseteq X$ فإن :

(i) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(ii) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

البرهان

(i) لإثبات $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ نتبع الآتي:

$$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \qquad (1)$$

$$(A \cap B) \subseteq B \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ \qquad (3)$$

بما أن $A^\circ \subseteq A \, , \, B^\circ \subseteq B$ ، فإن $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)$. و لكن المجموعة

$A^\circ \cap B^\circ$ مجموعة مفتوحة محتواه في $(A \cap B)$، فإن اكبر مجموعة مفتوحة

في $(A \cap B)$ هي $(A \cap B)^\circ$.

إذاً $A \cap B \subseteq (A\cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$ ومن ثم فإن

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)^{\circ} \qquad (4)$$

من (3) و (4) نحصل على $(A\cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$.

(ii) لإثبات $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$ نتبع الآتي:

$$A \subseteq (A\cup B) \Rightarrow A^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$$

$$B \subseteq (A\cup B) \Rightarrow B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$$

$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ} \blacksquare$$

المثال التالي يوضح أن التساوي ليس صحيحاً دائما.

مثال (3.30)

بفرض أن $X = \{a,b,c\}$ و أن $\tau = \{X, \phi, \{c\}, \{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة X ، و بفرض أن $A = \{a,c\}$ و $B = \{b,c\}$.يتضح جلياً أن $A^{\circ} = \{c\}\ ,\ B^{\circ} = \{c\}\ ,\ A^{\circ} \cup B^{\circ} = \{c\}$ ولكن $A \cup B = X$ وعليه فإن $(A\cup B)^{\circ} = X$ أي أن $(A\cup B)^{\circ} = X \not\subset (A^{\circ} \cup B^{\circ}) = \{c\}$.

لذا فإن $(A\cup B)^{\circ} \neq (A^{\circ} \cup B^{\circ})$.

مثال (3.31)

بفرض أن $A = [0,1]$ و $B = [1,2]$ فإن $A \cup B = [0,2]$ و من ثم نجد أن $A^{\circ} = (0,1)$ و $B^{\circ} = (1,2)$.و كذلك $(A\cup B)^{\circ} = (0,2)$. بينما $A^{\circ} \cup B^{\circ} = (0,1) \cup (1,2)$. إذاً $A^{\circ} \cup B^{\circ} \neq (A\cup B)^{\circ}$.

نظرية (3.12)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن :

$(i)\ (\overline{A})^c=(A^c)^o$

$(ii)\ (A^o)^c=\overline{(A^c)}$

البرهان

1) إثبات الفقرة (i) نفرض أن $p\in X-\overline{A}$ فإن

$$p\in X-\overline{A}\Leftrightarrow x\notin\overline{A}\Leftrightarrow\exists G\in\tau,p\in G:G\cap A=\phi$$
$$\Leftrightarrow\exists G\in\tau,p\in G:p\in G\subseteq A^c$$
$$\Leftrightarrow p\in(A^c)^o$$

اي أن $(A^c)^o=(\overline{A})^c$

2) إثبات الفقرة (ii) بوضع $B=A^c$ في (i) نحصل على المطلوب ■.

نظرية (3.13)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن الخواص التالية متحققة:

$(i)\ b(A)=\overline{A}\cap\overline{(A^c)}$

$(ii)\ b(A)=b(A^c)$

$(iii)\ b(A)=\overline{A}-A^o.$

البرهان

إثبات الفقرة (i)

$$b(A)=\{x\in X:x\notin A^o\wedge x\notin ext(A)\}$$
$$=\{x\in X:x\notin A^o\wedge x\notin(A^C)^o\}$$

$$=\{x\in X : x\notin \left(\overline{A^{C}}\right)^{C} \wedge x\notin (\overline{A})^{C}\}$$

$$=\{x\in X : x\in \overline{A^{C}} \wedge x\in \overline{A}\}$$

$$=\{x\in X : x\in \overline{A^{C}} \cap \overline{A}\} = \overline{A^{C}} \cap \overline{A}.$$

إثبات الفقرة (ii) يأتي من التعريف.

إثبات الفقرة (iii)

$$b(A)=\overline{A^{C}} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap (A^{O})^{C} = \overline{A} \cap (X - A^{O})$$

$$=(\overline{A}\cap X)-(\overline{A}\cap A^{O})$$

$$=\overline{A}-(\overline{A}\cap A^{O})$$

$$=\overline{A}-A^{O}.\blacksquare$$

نتيجة (3.1)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن $b(A)$ مجموعة مغلقة.

البرهان

الإثبات يأتي من الفقرة (i) في النظرية السابقة حيث أن $b(A)=\overline{A}\cap \overline{A^{C}}$.■

نتيجة (3.2)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن $\overline{A}=b(A)\cup A^{\circ}$

البرهان

بما أن $A^{\circ}\subseteq A\subseteq \overline{A}$ فإنه من الفقرة (iii) من النظرية السابقة نجد أن

$$A^{O}\cup b(A)=A^{O}\cup(\overline{A}-A^{O})=\overline{A}.\blacksquare$$

تمارين (3.3)

(1). إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة ، و عُرف عليها التوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

فإذا كانت $A=\{c,d,e\}$ و $B=\{b\}$ ، فأوجد كل من :

$$ext(A)\ ,\ b(A)\ ,\ A^{\circ}\ ,\ ext(B)\ ,\ b(B)\ ,\ B^{\circ}$$

(2). اوجد $b(A)$ لأي مجموعة $A\subseteq X$ في الفضاء المتقطع $(X\ ,D)$.

(3). برهن أن $b(A)\subset A^{c}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.

(4). برهن أن $b(A)\subset A$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مغلقة.

(5). برهن أن $b(A)=\phi$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد .

(6). بفرض أن $(X\ ,\tau)$ فضاء توبولوجي وأن $A,B\subseteq X$.

- برهن أن :

(1) $b(A\cup B)\subseteq b(A)\cup b(B).$

(2) $ext(A\cup B)=ext(A)\cap ext(B).$

- وضع بمثال أن $b(A\cup B)\neq b(A)\cup b(B).$.

(7). بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. حدد مجموعة جزئية $A\subseteq X$ بحيث يكون $A^{o}=\{a\},ext(A)=\{d\}\ ,b(A)=\{b,c\}\ ,A^{'}=\{c\}$.

(8). بين أن المجموعة A كثيفة في X إذا و فقط إذا كانت $A^{c}\cap(A^{`})^{c}=\phi$.

(3.4) القواعد و القواعد الجزئيه Bases and Subbases

رأينا في بداية هذا الفصل أنه يمكن تعريف توبولوجي على مجموعة غير خالية X عن طريق تعريف المجموعات المفتوحة أو المجموعات المغلقة، ولكن هذه الطريقة قد تكون صعبة في بعض الأحيان. فهل توجد ثمة وسيلة أخرى للتعرف على التوبولوجي غير هذه الوسيلة ؟.

توجد طريقة أخرى للتعرف على التوبولوجي و ذلك عن طريق معرفة أصغر تجمع (جماعة) من المجموعات المفتوحة وهى ما يسمى بقاعدة أو أساس (Base) التوبولوجي.

تعريف (3.9)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و لتكن β مجموعة جزئية من τ. تسمى β قاعدة (أو أساساً) للتوبولوجي τ إذا كان كل عنصر غير خالي من عناصر τ يمكن كتابته كاتحاد لعناصر من β . كل عنصر في β يطلق عليه اسم عنصر أساس.

تعريف (3.10)

إذا كان β اساساً لتوبولوجي على مجموعة غير خالية X ، التوبولوجي τ المولد بالأساس β يمكن وصفه كالتالي: المجموعة الجزئية G من X تكون مفتوحة في X (أي ان $G\in\tau$) إذا كان لكل x في G يوجد عنصر اساس $B\in\beta$ بحيث أن $x\in B\subseteq X$

مثال (3.32)

ليكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ فإن:

1) المجموعة $\beta_1=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ تمثل قاعدة للتوبولوجي τ .

2) المجموعة $\beta_2=\{\{a\},\{b\}\}$ لا تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

مثال (3.33)

في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، تعتبر τ أساس (قاعدة) لنفسها.

مثال (3.34)

إذا كان (X,τ) الفضاء التوبولوجي المتقطع على المجموعة X ، فإن المجموعة $\beta=\{\{x\}:x\in X\}$ تكون اساس (قاعدة) للتوبولوجي المتقطع.

مثال (3.35)

في فضاء التوبولوجي الإقليدي (R,τ) على الأعداد الحقيقية، مجموعة كل الفترات المفتوحة تشكل اساس (قاعدة) للتوبولوجي الإقليدي ، وذلك لأنه لأي مجموعة مفتوحة $H\in\tau$ و لأي نقطة $p\in H$ توجد فترة مفتوحة $I=(p-\varepsilon,p+\varepsilon)$، بحيث يكون $p\in I\subseteq H$.

نظرية (3.15)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و β عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة. فإن β تكون أساس للتوبولوجي τ إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة H ولكل عنصر $x\in H$ يوجد عنصرأساس B من β بحيث أن $x\in B\subseteq H$

البرهان

لتكن β قاعدة للتوبولوجي τ و $x\in H\in\tau$. فإنه من التعريف نجد أن $H=\bigcup_{i\in I}\{B_i : B_i\in\beta\}$. ومنها يمكن إيجاد $i_0\in I$ بحيث أن

$x \in B_{i_0} \subseteq H$.

في المقابل نفرض أن $H \in \tau$ و أنه لكل $x \in H$ يوجد $B_x \in \beta$ بحيث أن $x \in B_x \in H$ و هذا يؤدى إلى أن $H = \cup\{B_x : x \in H\}$ ، أي أن كل عنصر من τ عبارة عن اتحاد عناصر من β و هذا هو إثبات أن β أساس للتوبولوجي τ.■

بعد كل هذه الأمثلة ، فرُب سائلٍ قد يسأل :ما هى الشروط اللازم توافرها في عائلة من المجموعات الجزئية في X لكي تكون أساس لتوبولوجي ما. ولشرح مدى أهمية هذا السؤال نورد المثال التالي:

مثال (3.36)

لتكن $X = \{a,b,c\}$ مجموعة و $\beta = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X .و لو افترضنا أن β هذه هي أساس لتوبولوجي ما على X و ليكن τ ، يجب أن تكون كل من $\{a,b\},\{a,c\}$ عنصر في τ ونظراً لكونهما عنصران في التوبولوجي τ، فيجب أن يكون تقاطعهما أيضا عنصر في τ ، أي أن $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau$.

إلا أن هذا العنصر الجديد $\{a\}$ لا يمكن التعبير عنه كاتحاد عناصر من β. لهذا يجب علينا عند اختيار β يجب أن يتوفر فيه الشرط التالي:

$$B_1, B_2 \in \beta \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \beta\}$$

إذاً، فأي عائلة من المجموعات الجزئية لا تصلح أن تكون أساس لأي توبولوجي إلا إذا حققت الشرط السابق ، وهذا ما سوف نراه من خلال النظرية التالية:

نظرية (3.16)

لتكن β عائلة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X. فإن β تكون أساس لتوبولوجي τ على X إذا و فقط إذا كان :-

(i) $X=\cup\{B:B\in\beta\}$

(ii) لأي $B_1,B_2\in\beta$، فإنه يمكن التعبير عن $B_1\cap B_2$ كاتحاد لعناصر من β أو بمعنى مكافئ لكل $p\in B_1\cap B_2$ توجد مجموعة جزئية B_p من β بحيث أن $p\in B_p\subseteq B_1\cap B_2$.

البرهان

اولاً: نفرض أن β أساس للتوبولوجي τ على X. من تعريف الأساس نجد الآتـي:

بمـا أن $X\in\tau$ فإنـه يمكـن التعبيـر عـن X كاتحـاد لعناصـر مـن الاسـاس. أي أن $X=\cup\{B:B\in\beta\}$. وايضـا إذا كانـت $B_1,B_2\in\beta$، فـإن $B_1,B_2\in\tau$ مـن ثـم يكون $B_1\cap B_2\in\tau$ و هذا يقتضي أن $B_1\cap B_2=\cup\{B_i:B_i\in\beta\}$.

ثانيا: نفرض أن β عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من X التي تحقق الشرطين (i) و (ii) وأن عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من X التي يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β. أي أن

$$\tau=\{G\subseteq X:G=\cup B_i:B_i\in\beta\}$$

سوف نحاول الآن اثبات أن τ توبولوجي على X و بالتالي β تكون اساس لهذا التوبولوجي.

الشرط الأول من شروط التوبولوجي:

من (i) نجد أن $X \in \tau$ و بما أن $\phi = \cup\phi$ حيث أن $\phi \in \beta$. أي أن ϕ يمكن التعبير عنها كاتحاد لعناصر من β و عليه يكون $X, \phi \in \tau$.

الشرط الثاني من شروط التوبولوجي:

نفرض أن $G, H \in \tau$ ، فإن

$$H = \underset{j\in J}{\cup}\{B_j : B_j \in \beta\} \text{ و } G = \underset{i\in I}{\cup}\{B_i : B_i \in \beta\}$$

و من ثم نجد أنه لكل $i \in I$ و لكل $j \in J$

$$G \cap H = (\underset{i\in I}{\cup} B_i) \cap (\underset{j\in J}{\cup} B_j) = \underset{(i,j)\in I\times J}{\cup} (B_i \cap B_j)$$

و لكن $(B_i \cap B_j)$ عبارة عن اتحاد لعناصر من β، فإن $G \cap H$ عبارة عن اتحاد عناصر من β و من ثم نجد أن $G \cap H \in \tau$.

الشرط الثالث من شروط التوبولوجي:

نفرض أن $G_i \in \tau$. إذاً لكل $i \in I$ $G_i = \cup\{B : B \in \beta\}$ وعليه يكون $\underset{i\in I}{\cup} G_i$ عبارة عن اتحاد عناصر من β و من ثم فإن $\underset{i\in I}{\cup} G_i \in \tau$.

أي أن τ توبولوجي X على اساسه β.■

نظرية (3.17)

بفرض أن X مجموعة غير خالية. لتكن β_1 اساس للتوبولوجي τ_1 على X و β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 على X . فإن الشروط التالية متكافئة:

(i) التوبولوجي τ_1 تكون أقوى (finer) من التوبولوجي τ_2 .

(ii) لكل $x \in X$ و لكل عنصرأساس $B_2 \in \beta_2$ يحوي x ، يوجد

عنصر أساس $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subseteq B_2$.

البرهان

$(i) \Leftarrow (ii)$ نفــرض أن $x \in X$ و $B_2 \in \beta_2$ بحيــث أن $x \in B_2$. بمــا أن $\tau_2 \subseteq \tau_2$ ، فمن التعريف و من كون $\tau_2 \subseteq \tau_1$ نجد أن $\beta_2 \subseteq \tau_1$. بما أن β_1 أســاس للتوبولــوجي τ_1 ، فإنــه يوجــد عنصــر قاعــدة $B_1 \in \beta_1$ بحيــث أن $x \in B_1 \subseteq B_2$.

$(i) \Leftarrow (ii)$

نفرض أن $H \in \tau_2$ و نحاول إثبات أن $H \in \tau_1$. و لكي نصل إلى ذلك نفرض أن $x \in H$. بمــا أن β_2 اســاس للتوبولــوجي τ_2 ، فإنــه يوجــد عنصــر $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن $x \in B_2 \subseteq H$. من الشرط (ii) نجد أنه يوجد العنصر $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subset B_2$ و من ثم يكون $x \in B_1 \subseteq H$ وهذا يؤدى إلى أن $H \in \tau_1$، أي أن τ_1 تكون أقوى (finer) من التوبولوجي τ_2.■

تعريف (3,11)

إذا كانت $d : X \times X \to R$ دالة مسافة على X . عائلة الكرات المفتوحة $\beta = \{B(x,\varepsilon) : x \in X , \varepsilon > 0\}$ تشكل أساس لتوبولوجي على X ، يسمي التوبولوجي المتري المولد بدالة المسافة d .

تعريف (3,12)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه قابل للتمتر (Metrizable) إذا و فقط إذا كان τ مولداً بواسطة دالة مسافة على X .

مثال (3,37)

الفضاء التوبولوجي الاقليدي (R,u) هو فضاء قابل للتمتر، حيث أن دالة المسافة عليه هي دالة المسافة العادية التي تولد التوبولوجي المعتاد u.

مثال (3,38)

الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D) هو فضاء قابل للتمتر، حيث أن دالة المسافة البديهية هي التي تولد التوبولوجي المتقطع لأنه لكل $x \in X$، فإن

$$B_d(x,1) = \{y \in X : x \neq y\} = \{x\}$$

هي كرة مفتوحة ومن ثم فإن كل مجموعة أحادية العنصر هي مجموعة مفتوحة ومن ثم أي مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة.

بعد أن عرفنا أن التوبولوجي المولد بالأساس β يمكن أن يوصف على أنه عائلة من الاتحادات الاختيارية لعناصر من القاعدة β. فرب سؤال قد يقع: ماذا لو بدأنا بجماعة من المجموعات الجزئية و أخذنا تقاطعات منتهية لها تماماً مثل الاتحادات الاختيارية؟. هذا السؤال يقودنا نحو ، نوعية جديدة من الأساسات (القواعد) للتوبولوجي ، تسمى الأساسات (القواعد) الجزئية.

تعريف (3,13)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً ، العائلة $S \subseteq \tau$ تسمى قاعدة جزئية (أو أساساً جزئياً) للتوبولوجي τ إذا كانت العائلة الناتجة من تقاطعات منتهية لعناصر من S تشكل أساس β للتوبولوجي τ .

وهذا يعني أن كل عنصر أساس B من عناصر الأساس β عبارة عن تقاطع لعدد منتهٍ من عناصر S مع الأخذ في الاعتبار أن التقاطع الخالي يعطى المجموعة X.

مثال (3,39)

إذا كانـــت $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ فـــإن العائلـــة $S=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ تشـكل قاعـدة جزئيـة للتوبولـوجي τ. بأخـذ تقاطعـات عناصر S لإيجاد القاعدة β كما يلي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{b\}\cap\{b\}=\{b\}\ ,\ \{a\}\cap\{b\}=\phi$$

العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ أساس للتوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

مثال (3,40)

هل العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$.

الحل

التقاطعات المنتهية لعناصر العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ كالتالي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{c\}\cap\{c\}=\{c\}\ ,\ \{a\}\cap\{c\}=\phi$$
$$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\}\ ,\ \{a,b\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{a,b\}\cap\{c\}=\phi$$

واضح أن العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ أساس للتوبولوجي τ . إذاً S هي أساس جزئي لهذا التوبولوجي.

مثال (3,41)

في الفضاء التوبولوجي المنفصل (X,D)، العائلة $S=\{\{a,b\}:a,b\in X\}$ اساس جزئي للتوبولوجي المتقطع (القوي) D على X. ولتوضيح ذلك نفرض أن $X=\{a,b,c\}$. التوبولوجي المتقطع يأخذ الصورة

$$D=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

فإن العائلة $S=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي D .

لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ والتي تعتبر

اساس للتوبولوجي D على X .

مثال (3,42)

العائلة $S=\{(-\infty,b),(a,\infty):a,b\in R\}$ تعتبر اساس جزئي للتوبولوجي u على مجموعة الاعداد الحقيقية R وذلك لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,\infty):a,b\in R,a<b\}$ و هي أساس للتوبولوجي u على R .

نختتم موضوع الاساس و الأساس الجزئي بتعريف نوع خاص من الفضاءات التوبولوجية يسمى بالفضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional) و هذا الفضاء سيرد ذكره فيما بعد عند دراسة موضوع الفضاءات الغير مترابطة .

تعريف (3,14)

الفضاء التوبولوجي الذي عناصر أساسة أو أساسه الجزئي عبارة عن مجموعات مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت يسمي فضاء بعده صفري أو فضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional).

أمثلة

كل فضاء من الفضاءات التالية هو فضاء ذو بعد صفري:

(1) الفضاء المتقطع و الفضاء الغير متقطع.

(2) كل فضاء توبولوجي (X,τ) بحيث أن $A\in\tau \Leftrightarrow A^c\in\tau$ هو فضاء بعده صفري.

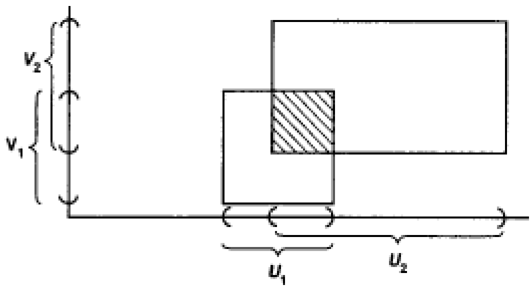
(3.5) توبولوجي الجداء (الضرب) Product topology

إذا كان كل من (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاء توبولوجي . هل توجد طريقة لتعريف توبولوجي على مجموعة الضرب الديكارتي $X_1 \times X_2$ ؟. فيما يلي سوف ندرس كيفية تعريف مثل هذا التوبولوجي و ما هي خواصه.

تعريف (3,15)

بفرض أن كل من (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاء توبولوجي. التوبولوجي الضربي (الجدائي) على $X_1 \times X_2$ هو التوبولوجي المولد بالأساس

$$\beta = \{U \times V : U \in \tau_1, V \in \tau_2\}.$$



شكل (3.3)

قبل الشروع في دراسة خواص هذا التوبولوجي دعنا نتأكد من أن هذا الأساس هو فعلاً أساس لتوبولوجي على $X_1 \times X_2$

الشرط الأول للأساس متحقق لأن $X_1 \times X_2 \in \beta$ و ذلك من تعريف β و من كون $X_1 \in \tau_1$, $X_2 \in \tau_2$.

الشرط الثاني للأساس متحقق لأنه إذا كانت $B_1, B_2 \in \beta$ حيث أن

$$B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$$

فإن

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$
$$= (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$
$$= U \times V$$
$$= B_3 \in \beta$$

و ذلك لأن $(U_1 \cap U_2) = U \in \tau_1$ بموجب أن τ_1 توبولوجي على X_1 ، و أيضاً $(V_1 \cap V_2) = V \in \tau_2$ بموجب أن τ_2 توبولوجي على X_2 .

إذاً β أساس للتوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$.

نظرية (3,18)

بفرض أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 على X_1 و β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 على X_2 . العائلة:

$$\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2\}$$

هي أساس لتوبولوجي على $X_1 \times X_2$.

البرهان

نفرض أن W مجموعة مفتوحة في $X_1 \times X_2$ و أن $q \in W$،حيث أن $q = (a,b)$. من تعريف التوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$ ، فإنه يوجد عنصر أساس $U \times V$ بحيث أن

$$q = (a,b) \in U \times V \subseteq W$$

و بما أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 ،فإنه توجد $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن

$$a \in B_1 \subseteq U$$

و بما أن β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 ، فإنه توجد $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن

$$b \in B_2 \subseteq V$$

أي أنه يوجد $B_1 \in \beta_1$ و $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن

$$q = (a,b) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq W$$

و هذا يعني أن $\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2\}$ هي أساس للتوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$. ■

مثال (3,43)

نحن نعلم أن عائلة كل الفترات المفتوحة في R هي أساس للتوبولوجي المعتاد (الاقليدي) على R. بناءً على هذا يمكن اعتبار العائلة

$$\beta = \{(a,b) \times (c,d) : a < b, c < d, a, b, c, d \in R\}$$

تشكل أساساً لتوبولوجي على $R \times R$ يسمى التوبولوجي العادي على $R \times R$.

(3.6) الفضاءات الجزئية و التوبولوجي النسبي

Subspaces and Relative topology

نظرية (3.19)

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي و A مجموعة جزئية من X. العائلة

$$\tau_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$$

تمثل توبولوجي على المجموعة الجزئية A.

البرهان

من السهل جداً اثبات أن العائلة $\tau_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$ يحقق الشروط الثلاث للتوبولوجي وذلك لما يلي:

أولا الشرط (i)

لأن $A,\phi \in \tau_A$

$\phi = \phi \cap A$ و $A = X \cap A$

حيث أن $X,\phi \in \tau$.

ثانياً الشرط (ii)

ليكن $V,W \in \tau_A$ أي أن توجد $G,H \in \tau$ بحيث أن

$W = H \cap A, V = G \cap A$

لذا نجد أن

$$\begin{aligned} V \cap W &= (G \cap A) \cap (H \cap A) \\ &= (G \cap H) \cap A \end{aligned}$$

و بما أن $G,H \in \tau$ ، فإن $G \cap H \in \tau$ و من ثم يكون $V \cap W \in \tau_A$.

ثالثاً الشرط (iii)

نفرض أن $\{V_i\}_{i \in I}$ عائلة جزئية من τ_A ، فإنه لكل $V_i \in \tau_A$ يوجد $G_i \in \tau$ بحيث يكون $V_i = A \cap G_i$. لكون $G_i \in \tau$ يقتضي أن $\cup_i G_i \in \tau$

و من ثم يكون $\cup_i V_i = \cup_i (A \cap G_i) = A \cap (\cup_i G_i)$ أي أن $\cup_i V_i \in \tau_A$.■

تعريف $(3,16)$

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و A مجموعة جزئية من X . التوبولوجي $\tau_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$ يسمى التوبولوجي النسبي (relative topology)

والفضاء التوبولوجي المولد (A,τ_A) يسمى فضاء جزئي (subspace) من الفضاء التوبولوجي (X,τ) .

مثال (3.44)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة و أن التوبولوجي المعرف عليها هو

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

فإذا كانت $A=\{a,d,e\}\subseteq X$ مجموعة جزئية فإن :

$$\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}=\{A,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{d,e\}\}$$

مثال (3.45)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية و ليكن

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,e\},$$
$$\{a,b,c,e\},\{a,b,c,d\}\}$$

توبولوجي معرف عليها .فأوجد عناصر التوبولوجي النسبي τ_A على المجموعة الجزئية $A=\{a,c,e\}\subseteq X$.

الحل

التوبولوجي النسبي يعطى من العلاقة

$$\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}=\{A,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,e\}\}.$$

مثال (3.46)

بفرض أن R مجموعة الأعداد الحقيقية ومعرف عليها التوبولوجي المعتاد (الاقليدي). التوبولوجي النسبي المعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة هو التوبولوجي المتقطع على Z حيث أنه لكل عدد صحيح a نجد أن

$$\{a\}=Z\cap(a-\tfrac{1}{2},a+\tfrac{1}{2}).$$

تمهيدية (3.2)

إذا كان β أساس للتوبولوجي τ على المجموعة X. العائلة

$$\beta_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$$

تكون اساس لتوبولوجي نسبي على المجموعة الجزئية A من X.

البرهان

نفرض أن $G \in \tau$ و أن $a \in A \cap G$. بما أن $a \in G$ و β أساس للتوبولوجي τ فيمكن اختيار عنصر أساس B من β بحيث يكون $a \in B \subseteq G$. و لكن $a \in A$ لذا نجد أن $a \in (B \cap A) \subseteq (G \cap A)$ ومن ثم تكون $\beta_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ أساس للتوبولوجي النسبي على A. ■

تمهيدة (3.3)

ليكن (A, τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X, τ). فإذا كانت $A \in \tau$ و $B \in \tau_A$. فإن B مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي τ.

البرهان

بما أن $B \in \tau_A$، فإنه توجد مجموعة $G \in \tau$ بحيث أن $B = A \cap G$. بما أن كل من $G, A \in \tau$ فإن $B = A \cap G \in \tau$. ■

مثال (3.47)

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و معرف عليها التوبولوجي T المولد بعائلة الفترات المفتوحة $(a,b) = \{x : a < x < b\}$ ولتكن $A = [0,1) \cup \{2\}$ مجموعة جزئية من R . المجموعة وحيدة العنصر $\{2\}$ مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي النسبي T_A لأنها عبارة عن تقاطع الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ مع

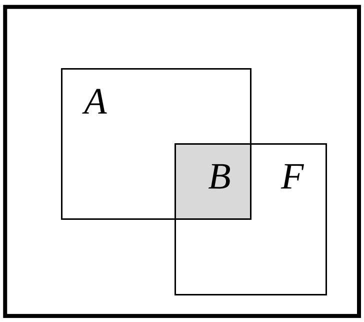
المجموعة A . أي أن $A \cap (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \{2\}$.

نظرية (3.20)

ليكن (A, τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X, τ). المجموعة $B \subseteq A$ تكون مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية F مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ بحيث أنه $B = F \cap A$.

البرهان

أولا : نفرض أن $B = F \cap A$ حيث أن F مجموعة مغلقة في X (انظر الشكل التالي).



شكل (3.4)

المكملة $F^c = X - F$ تكون مجموعة مفتوحة ، أي أن

$F^c = (X - F) \in \tau$ وهذا يؤدى إلى أنه

$(F^c) \cap A = (X - F) \cap A \in \tau_A$ (من تعريف الفضاء الجزئي)

وبما أن

$$A - B = A - (A \cap F) = A \cap (A \cap F)^c$$

$$= A \cap (A^c \cup F^c)$$

$$=(A\cap A^c)\cup(A\cap F^c)$$

$$=A\cap F^c=A\cap H:H\in\tau\,.$$

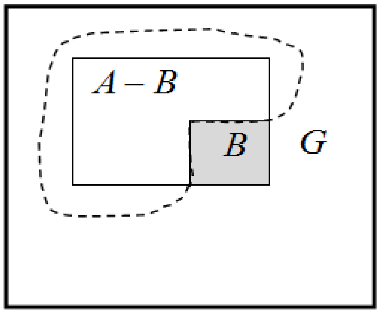
فإن $(A-B)\in\tau_A$ ومن ثم فإن B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ_A.

ثانيا : نفرض أن B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A.

وهذا يؤدى إلى أن $(A-B)\in\tau_A$. نفرض أن $H=(A-B)\in\tau_A$

ولذا فإنها تكون عبارة عن تقاطع مجموعة مفتوحة في X ولتكن $G\in\tau$

مع A (انظر الشكل التالي).



شكل (3.5)

أي أن $H=(A-B)=A\cap G:G\in\tau$ وهذا يؤدى إلى أن:

$$B=A-H=A-(A\cap G)=A\cap G^c=A\cap(X-G)=A\cap F$$

حيث أن F مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ.■

نظرية (3,21)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و أن $B\subseteq A$.

فإن $(\overline{B})_A=(\overline{B})_X\cap A$، حيث أن $(\overline{B})_A$ هو إغلاق المجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(\overline{B})_X$ هو إغلاق المجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

البرهان

سوف نستخدم تعريف إنغلاق المجموعة الجزئية B بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A كما يلي:

$$
\begin{aligned}
(\overline{B})_A &= \cap\{K : B \subseteq K, A - K \in \tau_A\} \\
&= \cap\{K = A \cap F : B \subseteq (A \cap F), F^c \in \tau\} \\
&= \cap\{A \cap F : B \subseteq F, F^c \in \tau\} \\
&= A \cap (\cap\{F : B \subseteq F, F^c \in \tau\}) \\
&= A \cap (\overline{B})_X . \blacksquare
\end{aligned}
$$

(3.7) المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية

Sequences in topological spaces

سوف نختم هذا الفصل بتعريف تقارب المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية حتى نلاحظ الفرق بين تقارب المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية والتقارب الذي درسناه سابقاً في مقررات التحليل.

تعريف (3.17)

بفرض أن (X,τ) فضاء التوبولوجي و $(x_n)_n \in X$ متتالية (متتابعة) . يقال أن المتتالية $(x_n)_n$ تتقارب من النقطة $x_0 \in X$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة $G \subseteq X$ تحوي x_0 يوجد عدد طبيعي $n_0 \in N$ بحيث أن $x_n \in G$ لكل $n \geq n_0$.

مثال (3.48)

ليكن (X,τ) الفضاء التوبولوجي التافه (الغير متقطع). المتتالية $(x_n)_n$ في X تتقارب من كل نقطة $x \in X$ لأن المجموعة الوحيدة المفتوحة والغير

خالية هي X .

مثال (3.49)

ليكن (X,D) الفضاء التوبولوجي المتقطع. المتتالية $(x_n)_n$ في X تكون تقاربية إذا و فقط إذا وجد $n_0 \in N$ بحيث أن $x_n = x_{n_0}$ لكل $n \geq n_0$.

مثال (3.50)

ليكن (N,C) فضاء توبولوجيا المكملات المنتهية على مجموعة الأعداد الطبيعية. لتكن $(x_n)_n \in N$ متتالية بحيث أن $x_n \neq x_m$ لكل $n \neq m$. إذاً $(x_n)_n$ متقاربة و كل عدد طبيعي هو نهاية لهذه المتتالية في (N,C).

نظرية (3.22)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي، و أن $A \subseteq X$. فإذا وجدت متتالية من نقاط المجموعة A تتقارب إلى النقطة x ، فإن $x \in \overline{A}$ و العكس يكون صحيحا إذا كان (X,τ) قابل للتمتر .

البرهان

نفرض أن $x_n \in A$ و أن $x_n \to x$. إذاً كل جوار G للنقطة x يحوي نقطة من A أي ان $G \cap A \neq \phi$ و هذا يعني أن $x \in \overline{A}$ (نظرية (3.4)).

من ناحية أخرى، نفترض أن الفضاء (X,τ) قابل للتمتر و أن $x \in \overline{A}$.

لإثبات أنه توجد متتالية $(x_n)_n$ بحيث أن $x_n \to x$ نفرض أن $d: X \times X \to R$ متري للتوبولوجي τ على X . لكل عدد صحيح موجب n نختار الكرة المفتوحة $B_d(x, \frac{1}{n})$ و التي مركزها x و نصف قطرها $\frac{1}{n}$. نختار

المتتالية x_n كنقطة من تقاطع الكرة $B_d(x,\frac{1}{n})$ مع المجموعة A ، أي أن

$$x_n \in A \cap B_d(x,\tfrac{1}{n})$$

نلاحظ الآن أن أي مجموعة مفتوحة G تحوي x فإنها تحوي أيضاً كرة مفتوحة $B_d(x,\varepsilon)$ مركزها x و نصف قطرها ε. بإختيار العدد الصحيح $n_0 \in N$ بحيث يكون $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$، فإن المجموعة المفتوحة G تحوي الحدود x_i لجميع قيم $i \geq n_0$ و هذا يعني أن $x_n \to x$. ■

تمارين (3.4)

(1) إذا كانت $X = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعة ، و عُرف عليها التوبولوجي $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$ و بفرض أن $A = \{a,c,d\} \subseteq X$ ، فأوجد التوبولوجي النسبي τ_A.

(2) إذا كان $(X\,,\tau)$ فضاء توبولوجي متقطع، $Y \subseteq X$. فبين أن الفضاء الجزئي $(Y\,,\tau_Y)$ هو ايضا فضاء توبولوجي متقطع على Y.

(3) إذا كان $(X\,,I)$ الفضاء التوبولوجي الغير متقطع، $Y \subseteq X$. فبين أن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هو ايضا فضاء غير متقطع على Y.

(4) بفرض أن $Y = (0,1]$ فضاء جزئي من مجموعة الأعداد الحقيقية R.
اوجد انغلاق المجموعة $A = (0,\frac{1}{2})$ في كل من الفضاء الجزئي Y و R.

(5) إذا كانت $X = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعة، و عُرف عليها التوبولوجي التالي: $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$
فإذا كانت $A = \{c,d,e\}$ و $B = \{b\}$ ، فأوجد

$$A' \,,\, \overline{A} \,,\, ext(A) \,,\, b(A) \,,\, A^{\circ} \,,\, B' \,,\, \overline{B} \,,\, ext(B) \,,\, b(B) \,,\, B^{\circ}$$

(6) ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و أن $B\subseteq A$. فاثبت أن:

- $(B)'_A=(B)'_X\cap A$ ، حيث أن $(B)'_A$ هو مجموعة نقاط النهاية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(B)'_X$ مجموعة نقاط النهاية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.
- $(B)^o_A=(B)^o_X\cap A$ ، حيث أن $(B)^o_A$ هو مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(B)^o_X$ مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

(7) إذا كانت $X=\{a,b,c\}$. بين أن العائلة $S=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ هي اساس جزئي للتوبولوجي

$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.

(8) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$. اوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(9) اعتبر كل من التوبولوجي $\tau_1=\{A:A\subseteq R\}$ والتوبولوجي $\tau_2=\{R,\phi\}$ على مجموعة الاعداد الحقيقية R. ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $a_n=\frac{1}{n}$ في الفضائين (R,τ_1) و (R,τ_2).

(10) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$. اوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(11) برهن أن العائلة $S\subset P(X)$ تكون أساس جزئي لتوبولوجي وحيد على المجموعة الغير خالية X.