الباب الثاني: "المتتابعات الجزئية ونظرية بولزانو-فايرشتراس
Bolzano-Weirstrass's Theorem"

تعريف 1: نُسمّي متتابعة حقيقية (x_n) من نوع كوشي (Cauchy sequence) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq n \geq N, \ |x_m - x_n| \leq \varepsilon$$

نظرية 1: إذا كانت (x_n) متقاربة فهي من نوع كوشي.

البرهان: لنفرض أنّ $x_n \to x$. ليكن $\varepsilon > 0$. بما أنّ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ فإنّه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall n \geq N; \quad |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي فلكلّ $m \geq n \geq N$ لدينا

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا هو المطلوب.

نظرية 2 "مُسلّمة": كلّ متتابعة حقيقية من نوع كوشي تكون مُتقاربة.

ملاحظة: النظرية السابقة مهمّة ففي تمكننا في بعض الأحيان من إثبات أن متتابعة متقاربة دون معرفة مُسبقة بنهايتها، إذ يكفي أن نثبت أنها من نوع كوشي.

تعريف 2: لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة جزئية غير فارغة

(1) نقول أن A محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي M بحيث:

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

نسمي M حدّا علويّا للمجموعة A

(2) نقول أن A محدودة من الأسفل إذا وُجد عدد حقيقي m بحيث:

$\forall x \in A;\quad m \leq x$

نسمي m حدّا سُفليّا للمجموعة A

(3) نقول أنّ A محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل أي يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث:

$\forall x \in A;\quad a \leq x \leq b$

نظرية 3: "مسلّمة التمام": لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير فارغة.

(1) إذا كانت A محدودة من الأعلى فإنّ لها حدّا علويّا أصغر نرمز إليه بالرمز $\sup A$.

$\sup A$ لها الخصائص الثلاثة الآتية

* $\sup A \in \mathbb{R}$
* $\forall x \in A;\quad x \leq \sup A$
* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A:\quad \sup A - \varepsilon < x$

(2) إذا كانت A محدودة من الأسفل فإنّ لها حدّا سُفليا أعلى نرمز إليه بالرمز $\inf A$.

$\inf A$ له الخصائص الثلاثة الآتية

* $\inf A \in \mathbb{R}$
* $\forall x \in A;\quad \inf A \leq x$
* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A,\quad x < \inf A + \varepsilon$

مثال:

$\sup\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$

$\inf\{x \in \mathbb{Q}^+:\ x^2 \geq 3\} = \sqrt{3}$

ملاحظة: إذا كانت المجموعة A غير محدودة من الأعلى فنكتب $\sup A = +\infty$ وإن كانت غير محدودة من الأسفل فنكتب $\inf A = -\infty$

تعريف 3: لتكن (x_n) متتابعة حقيقية

① نقول أن المتتابعة (x_n) متزايدة إذا حققت الشرط الآتي:

$$\forall n \in \mathbb{N};\quad x_n \leq x_{n+1}$$

② نقول أنّ المتتابعة (x_n) متناقصة إذا حققت الشرط الآتي:

$$\forall n \in \mathbb{N};\quad x_n \geq x_{n+1}$$

③ نقول أنّ المتتابعة (x_n) مطّردة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

نظرية 4: ① إذا كانت (x_n) متتابعة متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة ونهايتها هي

$$\lim x_n = \sup\{x_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$$

② إذا كانت (x_n) متتابعة متناقصة ومحدودة من الأسفل فإنّها متقاربة ونهايتها هي

$$\lim x_n = \inf\{x_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$$

البرهان: إثبات التقريرين ①، ② متشابهين. إذا سوف نكتفي بإثبات التقرير ①: بما أن المتتابعة (x_n) محدودة من الأعلى فإنّ المجموعة

$$A = \{x_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$$

محدودة من الأعلى وهي كذلك غير فارغة إذا باستعمال مسلمة التمام لها حدّاً علوياً أصغر

$M = \sup A$

لنثبت الآن أنّ $x_n \longrightarrow M$

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أنّ M هو أكبّ العلوي الأصغر لـ A فإنّه يوجد $x_N \in A$ بحيث

$M - \varepsilon < x_N$

الآن بما أنّ (x_n) متزايدة فإنّه

$\forall n \geq N \qquad x_n \geqslant x_N > M - \varepsilon$

نذكّر أنّ M هو حدّ علوي للمجموعة A إذا

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M - \varepsilon < x_n \leq M \Rightarrow |x_n - M| \leq \varepsilon$

وهذا هو المطلوب.

<u>نتيجة مباشرة</u>: كلّ متتابعة مطّردة ومحدودة تكون متقاربة.

<u>تعريف 4</u>: لتكن (x_n) و (y_n) متتابعتين حقيقيتين نقول أنّ (y_n) متتابعة جزئية من (x_n) إذا كان:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = x_{g(n)}$

حيث $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ دالة متزايدة. فظهرا نكتب عادة:

$g(1) = n_1 \; ; \; g(2) = n_2 \; ; \; \dots \; ; \; g(k) = n_k$

وبالتالي فنرمز عادة للمتتابعة الجزئية بالرمز التالي: (x_{n_k}) حيث

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

<u>أمثلة</u>: لتكن (x_n) متتابعة

(x_{n+1}) و (x_{2n}) و (x_{2n+1}) و (x_{n^2}) كلّها متتابعات جزئية من المتتابعة (x_n)

لتكن المتتابعة (y_k) المعرّفة بما يلي

$y_1 = x_{100}$; $y_2 = x_{205}$; $y_3 = x_{300}$; $y_4 = \dots$

ليست متتابعة جزئية من (x_n) لأنّ:

$$n_2 = 205 > n_3 = 300$$

نظرية 5: إذا كانت (y_n) متتابعة جزئية من (x_n) و (z_n) متتابعة جزئية من (y_n) فإنّ (z_n) تكون متتابعة جزئية من (x_n)

البرهان: من التعريف السابق توجد دالتان متزايدتان قطعا $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ و $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N};\ y_n = x_{g(n)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad z_n = y_{f(n)}$$

وبالتالي فإنّ

$$\forall n \in \mathbb{N};\ z_n = x_{g(f(n))} = x_{h(n)}$$

حيث $h = g \circ f$ بما أنّ g و f متزايدتان فإنّ $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ دالة متزايدة قطعا، وهذا هو المطلوب

نظرية 6: إذا كانت $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ متزايدة قطعا فإنّ

$$\forall n \in \mathbb{N};\ g(n) \geqslant n$$

البرهان: سوف نثبت النظرية باستعمال الاستقراء الرياضي: $g(1) \in \mathbb{N}$ وبالتالي فإنّ $g(1) \geqslant 1$

لنفرض الآن أن $g(n) \geqslant n$ ولنثبت أنّ النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لـ $n+1$ أي $g(n+1) \geqslant n+1$

بما أنّ الدالة g متزايدة قطعا فإنّ

$$g(n+1) > g(n) \geqslant n$$

وبالتالي فإنّ

$$\begin{cases} g(n+1) > n \\ g(n+1) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذا $g(n+1) \geqslant n+1$ وهذا هو المطلوب.

نظرية 7: إذا كانت $x_n \longrightarrow x$ فإن كل متتابعة جزئية (x_{n_K}) تتقارب إلى x.

البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $x_n \longrightarrow x$ فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$\forall n \geq N \; ; \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$$

ليكن $K \geq N$. النظرية السابقة تخبرنا أن

$$n_K = g(K) \geq K \geq N$$

وبالتالي فإن:

$$|x_{n_K} - x| \leq \varepsilon$$

إذا:

$$\forall K \geq N \Longrightarrow |x_{n_K} - x| \leq \varepsilon$$

ومنه نستنتج أن:

$$x_{n_K} \longrightarrow x$$

نظرية 8: كل متتابعة محدودة لها متتابعة جزئية متقاربة.

هذه النظرية الأساسية تُسمى نظرية بولزانو - فايرشتراس Bolzano- Weierstrass

نتيجة: كل متتابعة (x_n) من الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ لها متتابعة جزئية (x_{n_K}) تتقارب من عنصر x ينتمي إلى $[a,b]$

سؤال: أثبت هذه النتيجة باستعمال نظرية بولزانو - فايرشتراس.

" تمارين لمراجعة الباب الثاني "

تمرين رقم 1: لنجعل (x_n) المتتابعة المعرفة بما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(1) أثبت أن المتتابعة (x_n) متزايدة

(2) أثبت أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$$

(3) استنتج أن (x_n) ليست من نوع كوشي

(4) اثبت أن (x_n) غير متقاربة وأن $\lim x_n = +\infty$

تمرين رقم 2: ليكن $x_1 \in [0,1]$ ولنجعل

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$$

(1) أثبت أن المتتابعة (x_n) متزايدة

(2) أثبت أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* , \ x_n \in [0,1]$

(3) استنتج أن (x_n) متقاربة ثم أوجد نهايتها.

تمرين رقم 3: باستعمال النظرية 7 أثبت أن المتتابعة $u_n = (-1)^n$ غير متقاربة

(*) **تمرين رقم 4:** ليكن $a > 0$ عددا مُعطى، ولنجعل

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{cases} , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(1) أثبت أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad x_n > 0$

$$x_{n+1} \geq \sqrt{a}$$

(2) أثبت أن لكل $n \geq 2$ لدينا $x_{n+1} \leq x_n$

(3) استنتج أن (x_n) متقاربة وأوجد نهايتها

تمرين رقم 5: لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ غير فارغة ومحدودة من الأعلى. أثبت أن للمجموعة A حدا علويا أصغر وحيد
ثم أثبت أنه توجد متتابعة (x_n) من A بحيث $x_n \longrightarrow \sup A$