2- تابع - التكامل -

نذ/ $(|f_n|)_n$ متتالية متزايدة ; $|f_n| \in \mathcal{L}^+_1(\Omega)$
و $\lim_{n\to+\infty} |f_n| = |f|$ من نظرية التقارب المطرد لدينا

$$\int_\Omega |f|\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq N\ ;\ \int_\Omega (|f| - |f_n|)\,d\mu < \varepsilon/2$$

نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ ليكن $E \in \mathcal{A}$ بحيث $\mu(E) < \delta$

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu = \int_E (|f| - |f_N|)\,d\mu + \int_E |f_N|\,d\mu$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot \mu(E) = \varepsilon$$

مثال : في فضاء Lebesgue لتكن $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ ، $a<b$
لتكن $g : [a,b] \to \mathbb{R}$; $g(x) = \int_{[a,x[} f\,dm$

أثبت أن g دالة متصلة على $[a,b]$.

الحل : ليكن $x \in [a,b]$

$$|g(x+h) - g(x)| = \left|\int_{[a,x+h[} f\,dm - \int_{[a,x[} f\,dm\right|$$
$$= \left|\int_{I_h} f\,dm\right|$$

حيث I_h فترة أطرافها x و $x+h$

$$m(I_h) = |h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

وبالتالي : $\lim_{h\to 0} \left|\int_{I_h} f\,dm\right| = 0$ و g متصلة عند x.

نظرية 3 : نظرية التقارب المسغوف أو نظرية Lebesgue

Dominated Convergence Theorem

لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس على $\mathbb{R}$.

نفرض أن :

$\left.\begin{array}{l} \text{لدا} \\ \text{لدا} \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ a.e on $\mathbb{R}$

يوجد $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ بحيث $\forall n ; |f_n| \leq g$ a.e on $\mathbb{R}$

فان $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ويكون لدينا:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu$$

البرهان :

$f_n \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}), \forall n \Rightarrow f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R})$.

$|f_n| \leq g \ \forall n \Rightarrow |f| \leq g$ a.e ; $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

لدينا: $\forall n : 2g - |f_n - f| \geq 0$

حسب تمهيد Fatou فان:

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} (2g - |f_n - f|) \leq \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} (2g - |f_n - f|)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} 2g - \int_{\mathbb{R}} \overline{\lim} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{R}} 2g - \overline{\lim} \int |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{R}} \overline{\lim} |f_n - f| = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \leq \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu.$$

- 13 - تابع - التكامل -

مثال : تريب حساب : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$

الحل : نعتبر التكامل من نوع Lebesgue :

$\Omega = [0,+\infty[$; $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{-2x}\, \chi_{[0,n]}(x)$.

فيكون لدينا :

$$\int_\Omega f_n\,dm = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx.$$

لدينا :

$$\forall x\geq 0\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |f_n(x)| \leq e^{-2x} = g(x)$$

بما أن الدالة g متصلة وموجبة على $[0,+\infty[$ فان بالامكان حساب $\int_\Omega g\,dm$ باعتباره تكاملا ريمانيا معتد.

$$\int_\Omega g\,dm = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\, e^{-2x}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} < +\infty.$$

وبالتالي فإن $g\in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

$$\forall x\in\Omega\ ;\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, \chi_{[0,n]}(x)$$

$$= e^{-x}\cdot e^{-2x} = e^{-3x} = f(x)$$

نطبق نظرية التقارب المسقوف فنتحصل على :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,dm = \int_\Omega f\,dm = \int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}.$$

نتيجة 1 : نظرية التقارب المحدود :

Bounded Convergence Theorem

نفرض أن :
- $\mu(\Omega) < +\infty$ أي
- $(f_n)_n$ متتالية محدودة في $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ يعني يوجد $M>0$ بحيث $\forall x\in\Omega, \forall n\in\mathbb{N}$
$|f_n(x)| \leq M$

نشر / $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ a.e

فان $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و يكون لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu .$$

البرهان :

يوجد $M>0$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, $|f_n(x)| \le M$

نضع $g(x) = M$; $\forall x \in \Omega$.

$g \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$; $\int_\Omega g \, d\mu = M.\mu(\Omega) < +\infty$

وبالتالي فان $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

لدن :

$$\left.\begin{array}{l} (*)\ |f_n| \le g ;\ \forall n \\ (*)\ g \in \mathcal{L}^1(\Omega) \\ (*)\ \lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ a.e} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Lebesgue}]{\text{نظرية}} \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \\ \int_\Omega f = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \end{array}$$

مثال : نريد حساب : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \, dx$

الحل : نضع $\Omega = [0,1]$. $m(\Omega) = 1$

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$\forall x \in [0,1]$; $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f$.

سنبحث عن $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

ليكن $n \in \mathbb{N}$;

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

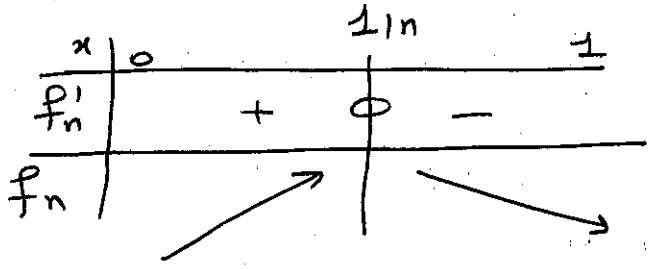
f_n قابلة للاشتقاق على $[0,1]$.

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

14 - تابع - التكامل -

- تحليل 2 -

$f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$.



$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

وبالتالي المتتالية $(f_n)_n$ لا تتقارب باتظام من الدالة f
لذن لا نستطيع لدخال النهاية تحت التكامل
باعتباره تكاملا ريمانيا. غير أنا يمكننا اعتباره
تكاملا من نوع Lebesgue.

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{e} \Rightarrow \forall x \in [0,1),\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{e},\ \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي $(f_n)_n$ متتالية محدودة.

حسب نظرية التقارب المحدود فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n \, dm = \int_{\Omega} f \, dm = 0.$$

مثال: $\Omega = [0,1]$. $m(\Omega) = 1$.

المجموعة $\mathbb{D} \cap [0,1]$ قابلة للعد. نكتب

$$\mathbb{D} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$$

لتكن $(f_n)_n$ المتتالية المعرفة كالتالي:

$f_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1; & x = r_1 \\ 0; & x \neq r_1 \end{cases}$$

$f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1; & x \in \{r_1, r_2\} \\ 0; & x \notin \{r_1, r_2\} \end{cases}$$

$f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = \begin{cases} 1; & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \\ 0; & x \notin \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \end{cases}$

لدينا لكل $x \in \Omega$; $|f_n(x)| \leq 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f \quad ; \quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\} \\ 0 ; & x \notin \{r_1, \dots, r_n, \dots\} \end{cases}$$

بعني أن :

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

حسب نظرية التقارب المحدود فان

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} f_n \, dm = \int_{\Omega} f \, dm = 1 . \, m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0 .$$

ملاحظة : الدالة f_n في المثال السابق هي دالة قابلة لتكامل ريمان بما أن مجموعة عدم اتصالها مجموعة منتهية . ولكنها تتقارب من الدالة f وهي دالة غير قابلة للتكامل في مفهوم ريمان .
f قابلة لتكامل Lebesgue .

نتيجة :

لتكن $f \in \mathcal{R}(a,b)$ و $f \in \mathcal{L}^1(a,+\infty)$ لكل $b > a$.
فان للدالة f تكاملا ريمانيا معتلا يتساوى مع تكامل Lebesgue على $[a,+\infty[$. ويكون لدينا :

$$\int_{[a,+\infty[} f \, dm = \int_a^{+\infty} f(x) \, dx .$$

ملاحظة

1/ إذا كان لكل من f و $|f|$ تكاملا ريمانيا معتلا على $[a,+\infty[$ فان

$$\int_{[a,+\infty[} f \, dm = \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$$

2/ مجرد وجود التكامل الريماني المعتل للدالة f على $[a,+\infty[$ لا يكفي لوجود $\int_{[a,+\infty[} f \, dm$.

نتيجة 3 :

لتكن $(f_n)_n$ متتالية في $\mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega |f_n| \, d\mu < +\infty$$

فانه يوجد $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ (a.e on Ω)

ويكون لدينا :

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

نتيجة 4 :

لتكن $f_t \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ لكل $t \in I$. حيث I فترة في $\mathbb{R}$.

نفرض أن :

نذ/ $\lim_{t \to t_0} f_t = f$ a.e

نذ/ يوجد دالة $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$; g بحيث

$$\forall t \in I \; ; \; |f_t| \leq g \text{ (a.e on } \Omega)$$

فان $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ويكون لدينا.

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \int_\Omega f_t \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu .$$

مثال : نريد حساب : $\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} \, dx$

الحل : نضع $\Omega = [0, +\infty[$.

$$\forall t \in [0, +\infty[\; ; \; f_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_t(x) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$$

f_t دالة متصلة وموجبة على Ω . $f_t \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

$\forall t \in [0,+\infty[\,;\ \forall x \in \mathbb{R};\ |f_t(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$.

g دالة متصلة وموجبة على $\mathbb{R}$. ولديها تكامل ريمانيا معتلا على $[0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

وبالتالي $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. إذن $\forall t;\ f_t \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \to +\infty} f_t(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} = 0.$$

حسب النتيجة 4 فإن:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_t \, dm = 0.$$

تمرين: أوجد النهايات التالية:

1) $$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty[} \cos\left(\frac{n+x}{n^2+x^2}\right) \cdot e^{-x}\, dm$$

2) $$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{nx+1}{n^2+2x}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dm$$

3) $$\lim_{n \to +\infty} \int_{[-1,2]} \cos\left(\frac{n^2 x}{n^2+1}\right) \cdot x\, dm$$

الباب الرابع : الفضاءات L^p تحليل 2
والتكامل الثنائي

I الفضاءات L^p :

تعريف : ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.
ليكن p , $0 < p < +\infty$. نعرف :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}^0(\Omega) ; \int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

لكل $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ نعرف : $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$

مثال : الدالة : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

$f \in \mathcal{L}^p(1, +\infty) \iff \alpha p > 1$.

في هذه الحالة :

$$\|f\|_p = \left(\int_{[1,+\infty[} x^{-\alpha p} \right)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\alpha p} \left[\frac{1}{x^{\alpha p - 1}} \right]_1^{+\infty} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\alpha p - 1} \right)^{1/p}$$

مثال : الدالة $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{L}^p(0,1) \iff \alpha p < 1$.

في هذه الحالة :

$$\|f\|_p = \left(\int_{]0,1]} x^{-\alpha p} \right)^{1/p} = \left[\frac{1}{1-\alpha p} \left[x^{-\alpha p + 1} \right]_0^1 \right]^{1/p}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\alpha p} \right)^{1/p}.$$

تمرين : $\|f\|_p = \|e^{\alpha x}\|_p = ?$; $e^{\alpha x} \in \mathcal{L}^p(0, +\infty) \iff \alpha < 0$

مثال : في الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث μ قياس العد.

$\ell^p(\mathbb{N})$ مكون من كل متتالية $a_n = f(n)$ من الأعداد المركبة التي تحقق :

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < +\infty .$$

تعريف : ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

نعرف $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ على النحو التالي :

تكون $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ إذا وجد $M > 0$ بحيث :

$$\mu\left(\{ x \in \Omega ; \ |f(x)| > M \} \right) = 0$$

يعني : يوجد $M > 0$ بحيث : $|f| \leq M$ a.e on Ω

حينئذ نعرف :

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 ; \ |f| \leq M \ \text{a.e on} \ \Omega \}.$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 ; \ \mu(\{ x \in \Omega ; |f(x)| > M \}) = 0 \}$$

ولدينا :

$$|f| \leq \|f\|_\infty \quad \text{a.e on } \Omega$$

مثال : الدالة $f(x) = x \cdot \chi_{\mathbb{N}}(x)$ يعني :

$$f(x) = \begin{cases} x ; & x \in \mathbb{N} \\ 0 ; & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

في الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ فإن $f = 0$ a.e on $\mathbb{R}$ وبالتالي

$$f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}).$$

ولكن في الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث μ قياس العد فإن :

$$\forall x \in \mathbb{N} ; \quad f(x) = x$$

و f دالة غير محدودة وبالتالي $f \notin \mathcal{L}^\infty(\mathbb{N})$.

ملاحظة: في الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث μ قياس العد.
$\ell^\infty(\mathbb{N})$ مكون من كل متتاليات $a_n = f(n)$ من الأعداد المركبة وتكون متتالية محدودة. ونرمز له بـ ℓ^∞
بينما نرمز لـ $\ell^p(\mathbb{N})$ بالرمز ℓ^p.

نظرية 1: لكل $1 \leq p \leq +\infty$. الفضاء $\mathcal{L}^p(\Omega)$ هو فضاء خطي. يعني لدينا $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ فإن $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ \lambda f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

البرهان: ليكن $1 \leq p < +\infty$.
ليكن $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_\Omega |\lambda f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \cdot \|f\|_p < +\infty$$

وهذا يثبت أن $\lambda f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

لإثبات أن $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ ونعلم أن الدالة $x \mapsto x^p$ دالة محدبة على $[0, +\infty[$ فإن لكل $a, b \in [0, +\infty[$ لدينا:

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1} a^p + 2^{p-1} b^p$$

وبالتالي:

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p$$
$$\leq 2^{p-1} |f|^p + 2^{p-1} |g|^p$$
$$\Rightarrow \int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \int_\Omega |f|^p \, d\mu + 2^{p-1} \int_\Omega |g|^p \, d\mu$$
$$< +\infty$$
$$\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega).$$

لذا كان $p=+\infty$: ليكن $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$; $\lambda \in \mathbb{R}$

فانه يوجد $M>0$, $K>0$ بحيث

$|f| \leq M$ a.e on Ω ; $|g| \leq K$ a.e on Ω.

$\Rightarrow |\lambda f| \leq |\lambda| \cdot M$ a.e on Ω $\Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

$|f+g| \leq |f|+|g| \leq M+K$ a.e on Ω.

$\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

وبالطبع لكل $1 \leq p \leq +\infty$ فان $\mathcal{L}^p(\Omega) \neq \emptyset$

بما أن الدالة الصفرية تنتمي لـ $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

لذلك : لكل $1 \leq p \leq +\infty$; $\mathcal{L}^p(\Omega)$ فضاء خطي :

خاصيات :

لذا لكل $1 \leq p \leq +\infty$; لكل $\lambda \in \mathbb{C}$ أو $\lambda \in \mathbb{R}$ فان :

$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$

لذا لكل $1 \leq p \leq +\infty$;

$\|f\|_p = 0 \iff \int_\Omega |f|^p \, d\mu = 0 \iff f = 0$ a.e on Ω.

نظرية : نظرية Hölder :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس وليكن $1 \leq p \leq +\infty$

و q مرافق له يعني $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

ليكن $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$; $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$

فان $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ويكون لدينا :

$$\|f\cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

البرهان:

نذكر إذا كان $\|f\|_p = 0$ أو $\|g\|_q = 0$ فإن $f = 0$ a.e أو $g = 0$ a.e وبالتالي $f\cdot g = 0$ a.e والمتباينة متحققة.

نذكر إذا كان $p = +\infty$ و $q = 1$ فإن لدينا:

$$|f\cdot g| \leq \|f\|_\infty \cdot |g| \quad a.e$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f\cdot g|\, d\mu \leq \|f\|_\infty \cdot \int_\Omega |g|\, d\mu$$

$$\Rightarrow \|f\cdot g\|_1 \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$$

والمتباينة متحققة.

نذكر نفس العمل إذا كان $q = +\infty$ و $p = 1$.

نذكر نفرض الآن أن $1 < p < +\infty$.

نعرف: $H = \dfrac{|f|}{\|f\|_p}$ ، $G = \dfrac{|g|}{\|g\|_q}$

لدينا:

$$\int_\Omega H^p\, d\mu = 1 = \int_\Omega G^q\, d\mu$$

لكل $x \in \Omega$ بحيث $0 < H(x)G(x) < +\infty$ نضع:

$$A(x) = p\cdot Ln(H(x)) \quad , \quad t(x) = q\cdot Ln(G(x))$$

بما أن الدالة الأسية محدبة $t \to e^t$ فإن:

$$\exp\left(\frac{1}{p}A(x) + \frac{1}{q}t(x)\right) \leq \frac{1}{p}\exp(A(x)) + \frac{1}{q}\exp(t(x))$$

$$\Rightarrow H(x)\cdot G(x) \leq \frac{1}{p}H^p(x) + \frac{1}{q}G^q(x)$$

نكامل الطرفين نتحصل على:

$$\int_\Omega H.G\,d\mu \le \frac{1}{p}\int_\Omega H^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int_\Omega G^q\,d\mu = 1$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{|f|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g|}{\|g\|_q}\,d\mu \le 1.$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |fg|\,d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

وهذا هو المطلوب.

نظرية 3: متباينة MinKowSKi :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس. ليكن $1 \le p \le +\infty$

ليكن $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ فان $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

ولدينا :

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

البرهان :

اذا كان $p=1$ او $p=+\infty$ فان العلاقة صحيحة.

ليكن $1 < p < +\infty$. نلاحظ أن :

$$|f+g|^p \le 2^p\,(|f|^p + |g|^p).$$

وبالتالي :

$$\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega).$$

لدينا أيضا :

$$|f+g|^p \le |f|\cdot|f+g|^{p-1} + |g|\cdot|f+g|^{p-1}$$

ليكن q مرافق العدد p يعني $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وبالتالي $p = q\cdot(p-1)$.

نطبق متباينة Hölder نتحصل على :

$$\int_\Omega |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,d\mu \le \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q$$

وكذلك : $\int_\Omega |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q$

وبالتالي :

$$\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

ملاحظة :

الدالة :

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$f \longmapsto \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}$$

كادت أن تكون دالة معيار على $\mathcal{L}^p(\Omega)$ فهي تحقق : ذ/ $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$

ذ/ $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

ولكن $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ a.e

لهذا سنأخذ $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $\mathcal{L}^p(\Omega)$

$$f \mathcal{R} g \iff f = g \text{ a.e on } \Omega.$$

هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ على $\mathcal{L}^p(\Omega)$ وبالتالي تجزيء $\mathcal{L}^p(\Omega)$ إلى مجموعات جزئية منفصلة مثنى مثنى وهي فصول التكافؤ.

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega) ; \ f = g \text{ a.e on } \Omega\}.$$

وليكن $L^p(\Omega)$ المجموعة المكونة من كل فصول التكافؤ

يعني أن $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \mathcal{R}$ وهو فضاء اتجاهي وتكون الدالة :

$$\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[f] \longmapsto \|f\|_p$$

دالة معيار على $L^p(\Omega)$. ويكون $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ فضاء معياريا.

في كثير من الأحيان يقع المزج بين فصل تكافؤ f وهو $[f]$ مع الدالة f نفسها ونكتب $\|f\|_p$ عوضا عن $\|[f]\|_p$

تعريف:

لتكن $(f_n)_n$ متتالية في $L^p(\Omega)$ و $f \in L^p(\Omega)$

نقول أن المتتالية (f_n) تتقارب من الدالة f في $L^p(\Omega)$ إذا كان: $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

نقول أن المتتالية $(f_n)_n$ كوشية في $L^p(\Omega)$ إذا كان: $\|f_n - f_m\|_p \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0$

ملاحظة:

كل متتالية متقاربة تكون كوشية ولكن العكس غير صحيح.

نظرية 3: Riez - Fischer

الفضاء $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ هو فضاء بناخ (Banach) يعني أنه فضاء معياري حيث كل متتالية من نوع كوشي تكون متقاربة.

البرهان:

لتكن $(f_n)_n$ متتالية كوشية في $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$.

نأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ في التعريف نجد أنه توجد متتالية جزئية $(f_{n_k})_k$ تحقق: $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$

5- تابع- الفضاء L^p - تحليل 2 -

نضع :

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

$$g = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

بالاعتماد على متباينة Minkowski نرى أن

$$\|g_k\|_p < 1$$

وبالتقارب المطرد نجد : $\|g\|_p < 1$

وبالتالي : $g(x) < +\infty$ a.e on Ω ومن ثم فإن:

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

تتقارب تقريبا في جميع النقاط من f إذا:

$$f = \lim_{k \to +\infty} f_{n_k}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ بما أن (f_n) من نوع كوشي في $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ فيوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث : $\forall n, m \geq N$

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

باعتماد تمهيدية Fatou :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu \leq \lim_{k \to +\infty} \int |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon^p$$

وهذا يبين أن $f \in L^p(\Omega)$ و $(f_n)_n$ تتقارب من f في $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$.

ملاحظة: في البرهان السابق أثبتنا أيضا هذه النظرية :

نظرية 4 : ليكن $1 \leq p < +\infty$. لتكن $(f_n)_n$ متتالية تتقارب من f في $L^p(\Omega)$ فان لها متتالية جزئية $(f_{n_k})_k$ تتقارب تقريبا من f.

نظرية 5 : ليكن $1 \leq p < +\infty$. مجموعة الدوال البسيطة والقابلة للتكامل تكون كثيفة في $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$.

البرهان : يكفي ان نثبت انه لكل $f \in L^p(\Omega)$; $f \geq 0$ ولكل $\varepsilon > 0$ يوجد ψ دالة بسيطة تحقق

$$\|f - \psi\|_p < \varepsilon .$$

نعلم انه توجد متتالية من الدوال البسيطة $(\psi_n)_n$ تتصاعد نحو f.

باعتماد التقارب المطرد فان : $\lim_{n \to +\infty} \|f - \psi_n\|_p = 0$

وبالتالي لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث :

$$\|f - \psi_N\|_p < \varepsilon .$$

نظرية 6 : ليكن $1 \leq p < +\infty$.

نرمز C_c مجموعة الدوال المتصلة والتي تساوي الصفر خارج مجالات compact Compactly supported continuous functions فان C_c مجموعة كثيفة في $(L^p(\mathbb{R}), \|.\|_p)$.

نتيجة :

ليكن $1 \leq p < +\infty$. فان مجموعة الدوال السلمية والقابلة للتكامل تكون كثيفة في $L^p(\mathbb{R}, \|.\|_p)$

البرهان :

ليكن $f \geq 0$ ، $f \in L^p(\mathbb{R})$. ليكن $\varepsilon > 0$ حسب النظرية السابقة فانه يوجد $g \in C_c$, $g \geq 0$ بحيث

$$\| f - g \|_p < \varepsilon/2 .$$

بما أن $g \in C_c$ فهي منتظمة الاتصال ويوجد متتالية من الدوال السلمية (φ_n) تتقارب نحو g وبالتالي يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\forall n \geq N$

$$\| \varphi_n - g \|_p < \frac{\varepsilon}{2} .$$

نستنتج أن :

$$\| f - \varphi_n \|_p \leq \| f - g \|_p + \| g - \varphi_n \|_p$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ; \forall n \geq N$$

نظرية 7 : العلاقة بين $L^p(\Omega)$ و $L^q(\Omega)$

نفرض أن : $\mu(\Omega) < +\infty$ و $1 \leq p < q$.

فان : $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

البرهان : ليكن $f \in L^q(\Omega)$.

نضع $A = \{ x \in \Omega ; |f(x)| < 1 \}$.

$\forall x \in A^c ; |f(x)| \geq 1 \Rightarrow |f(x)|^p \leq |f(x)|^q$.

لدينا

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_A |f|^p \, d\mu + \int_{A^c} |f|^p \, d\mu$$

$$\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \leq \mu(A) + \int_{A^c} |f|^q \, d\mu$$

$$\leq \mu(\Omega) + \int_{\Omega} |f|^q \, d\mu < +\infty .$$

$$\Rightarrow f \in L^p(\Omega).$$

ملاحظة :

العلاقة السابقة بين $L^p(\Omega)$ و $L^q(\Omega)$ غير صحيحة لو كان $\mu(\Omega) = +\infty$

مثال : في فضاء Lebesgue :

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن :

$$f \in L^p(1, +\infty) \iff \alpha p < -1 \iff \alpha < -\frac{1}{p} .$$

وبالتالي لو كان $p < q$ فإن $-\frac{1}{p} < -\frac{1}{q}$

لذلك لو أخذنا :

$$-\frac{1}{p} < \alpha < -\frac{1}{q}$$

فإن : $f(x) = x^\alpha \in L^q(1, +\infty)$

و $f \notin L^p(1, +\infty)$

لدينا أيضا هذه الملاحظة : $f(x) = x^\alpha$

$$f \in L^p(0,1) \iff \alpha p > -1 .$$

II التكامل الثنائي :

تعريف :

i/ $\mathcal{M}$ تمثل عائلة المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ والتي تكون قابلة لقياس Lebesgue .

ii/ لتكن S المجموعة :

$$S = \{ A \times B \; ; \quad A, B \in \mathcal{M} \}$$

$$\subset \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

حيث $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ فئة القوة للمجموعة $\mathbb{R}^2$

نعرف $\mathcal{M}^2$ بأنه أصغر جبر سيجما يحتوي على المجموعة S.

iii/ لذا كانت $A, B \in \mathcal{M}$ فإننا نعرف قياس المجموعة $A \times B$ بأنه :

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B) .$$

iv/ لتكن $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس .

نقول أن الدالة :

$$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

دالة قابلة للقياس لذا كان لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ المجموعة

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{ (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \; ; \; f(x, y) > \alpha \}$$

تكون مجموعة قابلة للقياس .

يعني أن لكل $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{M}^2$$

نظرية 1 : نظرية Tonelli

ليكن $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس.

ولتكن $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty[$ دالة قابلة للقياس.

$$(x, y) \longmapsto f(x,y)$$

فإن :

أ/ لكل $x \in \Omega_1$; الدالة $f_x : \Omega_2 \longrightarrow [0,+\infty[$ تكون

$$y \longmapsto f_x(y) = f(x,y)$$

دالة قابلة للقياس.

ب/ لكل $y \in \Omega_2$; الدالة $f_y : \Omega_1 \longrightarrow [0,+\infty[$ تكون

$$x \longmapsto f_y(x) = f(x,y)$$

دالة قابلة للقياس.

ج/

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, dx \right) dy .$$

مثال : ليكن $0 < a < b$.

$$f :]0,+\infty[\times]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x,y) = e^{-xy}$$

أثبت أن الدالة f قابلة للتكامل على $]0,+\infty[\times]a,b[$

استنتج قيمة العبارة

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

الحل : f دالة قابلة للقياس وموجبة.

حسب نظرية Tonelli لدينا.

$$\int_{]0,+\infty[\times]a,b[} f = \int_{]a,b[} \left(\int_{]0,+\infty[} e^{-xy}\, dx \right) dy$$

$$= \int_{]a,b[} \left(\left[-\frac{1}{y} e^{-xy} \right]_0^{+\infty} \right) dy$$

$$= \int_{]a,b[} \frac{1}{y}\, dy = \text{Log}\, b - \log a < +\infty$$

و بالتالي f قابلة للتكامل على $]0,+\infty[\times]a,b[$

و دائما حسب نظرية Tonelli لدينا:

$$\int_{]0,+\infty[\times]a,b[} f = \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]a,b[} e^{-xy}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{]0,+\infty[} \left(\left[-\frac{1}{x} e^{-xy} \right]_a^b \right) dx$$

$$= \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

و بالتالي:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$$

$$= \text{Log}\, b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

نظرية 2 : نظرية Fubini :

لتكن $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للتكامل في مفهوم lebesgue
$(x, y) \longmapsto f(x,y)$

فإن :

i/ تقريبا لكل $x \in \Omega_1$ ، الدالة

$f_x : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longmapsto f(x,y)$

تكون قابلة للتكامل على Ω_2 .

ii/ تقريبا لكل $y \in \Omega_2$ ، الدالة

$f_y : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x,y)$

تكون قابلة للتكامل على Ω_1 .

iii/ الدالة : $x \longmapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy$ تكون قابلة للتكامل على Ω_1

iv/ الدالة : $y \longmapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\, dx$ تكون قابلة للتكامل على Ω_2

v/
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, dx \right) dy .$$

مثال : لتكن

$$f: [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ادرس تكامل الدالة f .

(9) تابع التكامل الثنائي -

الحل : f متصلة على $[-1,1]\times[-1,1]\setminus\{(0,0)\}$ وبالتالي فهي قابلة للتكامل على $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]$.

إذا كان $y=0$ فإن الدالة $f_y = f_0 = 0$ وبالتالي

$$\int_{[-1,1]} f_0 \, dx = 0 .$$

إذا كان $y \neq 0$ فإن الدالة

$$f_y : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_y(x) = f(x,y).$$

$$\int_{[-1,1]} f_y \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, dx = 0$$

لأن الدالة $x \longmapsto \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ فردية على $[-1,1]$.

وبالتالي لكل $y \in [-1,1]$ لدينا : $\int_{[-1,1]} f_y \, dx = 0$

$$\Longrightarrow \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f_y \, dx \right) dy = 0 .$$

وبالمثل أيضا : لكل $x \in [-1,1]$

$$\int_{[-1,1]} f_x \, dy = 0 \Longrightarrow \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f_x \, dy \right) dx = 0 .$$

لدينا :

$$\int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y) \, dx \right) dy = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y) \, dy \right) dx$$

ولكن f غير قابلة للتكامل على $\Omega = [-1,1]^2$ لأن :

$$\int_{[-1,1]} |f(x,y)|\,dx = 2\int_0^{-} \frac{x\cdot|y|}{(x^2+y^2)^2}\,dx = |y|\int_0^1 2x\,(x^2+y^2)^{-2}\,dx$$

$$= |y|\,\frac{1}{-2+1}\,(x^2+y^2)^{-1}\Big]_0^1 = \frac{-|y|}{1+y^2} + \frac{1}{|y|}.$$

$$\int_{[-1,1]}\left(\int_{[-1,1]} |f(x,y)|\,dx\right)dy = 2\int_0^1 \left(\frac{-y}{1+y^2} + \frac{1}{y}\right)dy$$

$$= \left[-\log(1+y^2) + 2\log y\right]_0^1 = +\infty.$$

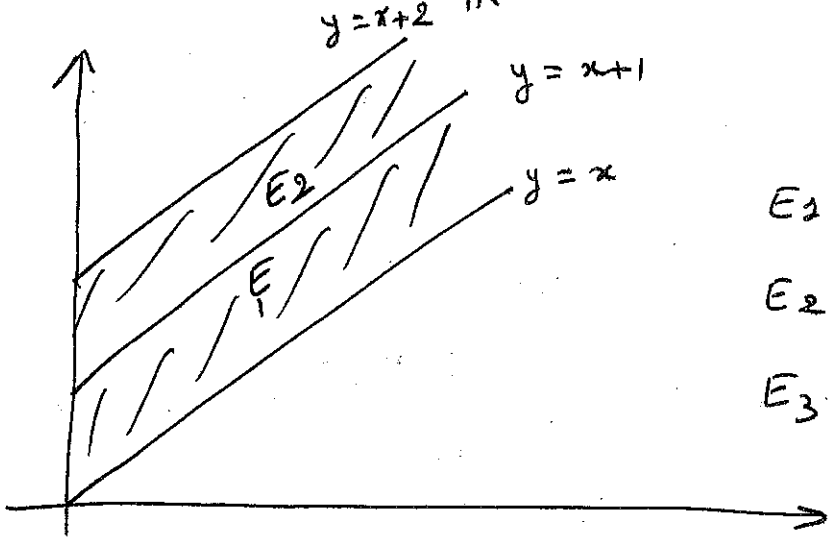
مثال:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 1; & x\geq 0;\ x\leq y\leq x+1 \\ -1; & x\geq 0;\ x+1<y<x+2 \\ 0; & \text{Other Wise} \end{cases}$$

هل تقبل f التكامل على $\mathbb{R}^2$.

احسب كلا من التكاملات: $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f_y(x)\,dx\right)dy$; $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\,dy\right)dx$



الحل:

نضع

$$E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0;\ x\leq y\leq x+1\}$$

$$E_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0;\ x+1<y<x+2\}$$

$$E_3 = \mathbb{R}^2 \setminus (E_1\cup E_2).$$

f دالة بسيطة.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f| = 1\cdot m(E_1) + 1\cdot m(E_2) + 0\cdot m(E_3) = +\infty.$$

f غير قابلة للتكامل على $\mathbb{R}^2$.

نحدد $x \in \mathbb{R}$.

لذا كان $x<0$ فان الدالة $f_x = 0$ وبالتالي $\int_{\mathbb{R}} f_x \, dy = 0$

لذا كان $x \geq 0$

$$f_x(y) = \begin{cases} 1 ; & x \leq y \leq x+1 \\ -1 ; & x+1 < y < x+2 \\ 0 ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, dy = \int_x^{x+1} 1 \, dy + \int_{x+1}^{x+2} -1 \, dy = x+1-x-(x+2-x-1) = 0.$$

وبالتالي :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, dy \right) dx = 0.$$

⊙ نحدد الآن $y \in \mathbb{R}$.

لدينا :

$x \geq 0 ;\ x \leq y \leq x+1 \iff x \geq 0 ;\ y-1 \leq x \leq y.$

$x \geq 0 ;\ x+1 < y < x+2 \iff x \geq 0 ;\ y-2 < x < y-1.$

وبالتالي :

لذا كان $y \leq 0$ فان $f_y(x) = 0$ يعني أن $\int_{\mathbb{R}} f_y(x)\, dx = 0$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_y(x)\, dx \right) = 0$$

لذا كان $0 < y \leq 1$ فان :

$$f_y(x) = \begin{cases} 1 ; & 0 \leq x \leq y \\ 0 ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_y(x)\, dx = \int_0^y 1 \, dx = y$$

لذا كان $1 \le y \le 2$ فان:

$$f_y(x) = \begin{cases} 1; & y-1 \le x \le y \\ -1; & 0 < x < y-1 \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{IR} f_y(x)\,dx = \int_{y-1}^{y} 1\,dx + \int_{0}^{y-1} -1\,dx = 2-y$$

لذا كان $y > 2$ فان:

$$f_y(x) = \begin{cases} 1; & y-1 \le x \le y \\ -1; & y-2 < x < y-1 \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{IR} f_y(x)\,dx = \int_{y-1}^{y} 1\,dx - \int_{y-2}^{y-1} 1\,dx = 0.$$

وبالتالي:

$$\int_{IR}\left(\int_{IR} f_y(x)\,dx\right)dy = \int_0^1 y\,dy + \int_1^2 (2-y)\,dy + \int_2^{+\infty} 0\,dy$$

$$= \frac{y^2}{2}\Big]_0^1 + \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 1.$$

ملاحظة أن $\int_{IR}\int_{IR} f\,dx\,dy \neq \int_{IR}\int_{IR} f\,dy\,dx$

(ب)

تابع - التكامل الثنائي :

نظرية : فاتون التعويض :

ليكن Ω و Δ مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}^2$.

$\varphi : \Delta \longrightarrow \Omega$ دالة تحقق.

$$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$$

نفرض φ دالة تناظر أحادي:

- تذ / $\varphi \in C^1(\Delta)$
- تذ / $\forall (u,v) \in \Delta \; ; \; J_\varphi(u,v) \neq 0$

حيث :

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

لتكن $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة فإن :

$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

f قابلة للتكامل على Ω $\Longleftrightarrow$ $f \circ \varphi$ قابلة للتكامل على Δ

ويكون لدينا:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Delta f(\varphi(u,v)) \cdot J_\varphi(u,v)\,du\,dv.$$

مثال :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

مثال : حساب :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \; .$$

الحل : الدالة $x \longmapsto e^{-x^2}$ متصلة وموجبة على $[0,+\infty[$

تكون $x \longmapsto e^{-x^2}$ فإن $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ وبما أن

قابلة للتكامل على $[0, +\infty[$:

نضع $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

لتكن $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x \ , \ y) \longmapsto e^{-(x^2+y^2)}$$

نأخذ $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

وبالتالي :

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta .$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2} \Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

سلسلة تمارين التكامل :

في كل مايلي $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

تمرين 1 :

لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$; $\varepsilon > 0$.

أثبت أن : $\mu(\{x \in \Omega ; |f(x)| \geq \varepsilon\}) < +\infty$

تمرين 2 :

لتكن $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$. نضع : $E = \{x \in \Omega ; f(x) \geq 0\}$

أثبت أن لكل $\varepsilon > 0$:

$$\mu(\{x \in \Omega ; f(x) > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E f \, d\mu$$

تمرين 3 :

ليكن $E, F \in \mathcal{A}$. f دالة قابلة للقياس بحيث $f \in \mathcal{L}^1(E)$. نفرض أن $\mu(E \Delta F) = 0$

أثبت أن $f \in \mathcal{L}^1(F)$ وأن : $\int_F f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$

تمرين 4 :

ليكن μ قياس العد على $\mathbb{N}$.

نضع $\mathcal{A}$ القبيلة المولدة من المجموعة $\{1\}$.

a/ أوجد $\mathcal{A}$.

b/ أثبت أن كل دالة قابلة للقياس على $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ تكون بسيطة.

c/ أوجد كل الدوال القابلة للتكامل في $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$.

تمرين 5 :

نرمز μ : قياس العد على $\mathbb{N}$.

1a لتكن $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. أثبت أن $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{N})$

وأن : $$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

1b لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $f_n = \chi_{\{1,n\}}$

أوجد $\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu$; $\underline{\lim} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu$; $\int_{\mathbb{N}} \underline{\lim} f_n \, d\mu$

نفس السؤال للمتتاليات :

$$g_n = \chi_{\{n, n+1, \dots, n^2\}} \quad , \quad \psi_n = \frac{1}{n+1} \chi_{\{n, n+1, \dots, 2n\}}$$

تمرين 6 : لتكن

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x > 0 ; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}} ; & 0 < x < 1. \\ 7x - 8 ; & x \in [1, 6[\\ x^2 - 2 ; & x \geq 6 \end{cases}$$

هل تقبل الدالة f لتكامل Lebesgue على $]0, +\infty[$.

تمرين 7 :

1a $\Omega =]0, 1]$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. أثبت أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

وأن $f \notin \mathcal{L}^2(\Omega)$.

1b $\Omega = [1, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x}$. أثبت أن :

$f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$, $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

ماذا نستنتج ؟

- 2 - متابع سلسلة التمارين :

تمرين 8 :

ليكن $f, g \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ بحيث $f^2, g^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

a/ أثبت أن : $f.g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وأن :

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |g|^2 \, d\mu\right)^{1/2}$$

وهي متراجحة Cauchy-Schwartz .

b/ إذا كان $\mu(\Omega) < +\infty$ استنتج أن :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{L}^1(\Omega).$$

حيث : $\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}^0(\Omega) ; \int_\Omega |f|^2 \, d\mu < +\infty \right\}$

تمرين 9 :

لتكن $(f_n)_n$ متتالية في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; f_n \leq f \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n = f \; ;$$

a/ أثبت أن :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

b/ استنتج :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n \, dm$$

حيث $f_n(x) = \frac{n+1}{n+x^2} e^{-x} \; ; \; \forall x \in \Omega$

و $\Omega = [1, +\infty[$

تمرين 10 :

لتكن $(f_n)_n$ متتالية متناقصة في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ بحيث $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$

ونفرض أنه يوجد $K \in \mathbb{N}$ بحيث

$\int_{\mathbb{R}} f_k \, d\mu < +\infty$. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ أن $\mathbb{N}$ $k \in$ هناك مثالا يبين ضرورة الشرط وجود

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu$$

بحيث $\int_{\mathbb{R}} f_k \, d\mu < +\infty$.

تمرين 11 : لتكن (f_n) متتالية في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}; \ |f_n| \leq |f| \ \text{a.e on } \mathbb{R}$

أثبت أن :

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \leq \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} \overline{\lim} f_n \, d\mu$$

لإرشاد : تطبيق Fatou على $g_n = |f| + f_n$ و $h_n = |f| - f_n$.

تمرين 12 : أوجد نهاية المتتالية $(a_n)_n$ في الحالات التالية :

أ/ $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$; ب) $a_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

ج) $a_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} \, dt$; د) $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^n}$.

تمرين 13 : في الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$:

نفرض أن $M = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ حيث $\forall n \ ; \ E_n \in \mathcal{A}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى . لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

أثبت أن :

$$\int_M f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

3 - تابع - تمارين التكامل

تمرين 14 : لتكن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

لكل $E \in \mathcal{A}$ نضع : $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$

نريد أن نثبت أن ν قياس على $\mathcal{A}$.

نريد أن نثبت أن لكل دالة g قابلة للقياس

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g \cdot f \, d\mu$$

تمرين 15 :

لتكن $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto f(x) = e^{-(1+i)x}$$

ادرس تكامل الدالة f على $[0, +\infty[$.

تمرين 16 :

ليكن $1 \leq p, q < +\infty$ بحيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

لتكن $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$

أثبت أن $f \in L^2(\Omega)$ وأن :

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_p \cdot \|f\|_q .$$

تمرين 17 :

لتكن $(f_n)_n$ المتتالية : $f_n = \sqrt{n} \cdot \chi_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}$

نريد أوجد f النهاية النقطية للمتتالية $(f_n)_n$.

نريد أوجد الأعداد الحقيقية p , $p \geq 1$, بحيث

$(f_n)_n$ تتقارب من f في $L^p(\mathbb{R})$.

نذا لتكن $g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. أثبت أن $g \in L^1(\mathbb{R})$

تمرين 18 :

ليكن $\Omega = [1, +\infty[$. $f \in L^p(\Omega)$; $p > 1$

لتكن $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

نذا أثبت أن $g \in L^p(\Omega)$ و أن :

$\|g\|_p \leq \|f\|_p$.

نذا أثبت أن الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ تنتمي لـ $L^q(\Omega)$ حيث q هو مرافق العدد p

نذا استنتج أن $g \in L^1(\Omega)$ و أن :

$\|g\|_1 \leq (p-1)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|f\|_p$.