جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات

التّحليل المركّب بكَالريوس

الفصل الثَّاني ١٤٣٠ - ١٤٣١

أ. د. حسين المير   *hassine_elmir@yahoo.fr*

رمز المقرّ ريض 444   عدَد الوحدَات 3   التّقويم الأعمَال الفصليّة من 40 النهَائِي من 60

المحتوَى

خصَائِص الأعدَاد المركبة ، نظرية دي موَافر *De Moivre* و جذور الأعدَاد المركبة . اَلدّوَال التّحليلية معدلَات كوشي ريمَان . اَلدّوَال التّوَافقيّة ، اَلمرَافقَات التّوَافقيّة. اَلتّكَامل المحدَّد و التّكَامل الخطّي . نظريّة كوشي قورسَاة ، صيغة تكَامل كوشي، متسلسلة لورَان. نظريّة البوَاقي. حسَاب بعض التّكَاملَات الحقيقيّة المعتلّة ، اَلروَاسم الحَافظة لِلزوَايَا : الخوَاص الأسَاسيّة

المرَاجع :

1. دويل ف. تشرشل ، جيمس وبرَاون التحليل المركب و تطبيقَاته

2.J.E.Marsdeen and M.J. Hoffman, Complex Analysis W.H. Freeman August 1999

3.M.J.Albowitz and A.S.Fokas, Complex Variables Introduction and applications, Combridge Texts in Applied Mathematics , No.16,1999

هذه الدروس كتبت بإِعتمَاد برنَامج *Latex* و برنَامج *arabtex* أنصح الطَّالب بإِتقَانهمَا . أرحب بجميع ملَاحظَاتكم و إِستفسَارَاتكم المطلُوب من الطَالب هومُحتوَى المُحَاضرَات المختصر في هذه المذكرة فيجب تحديد مَا لم يبرهن فهنَاك درجَات تحفيزيّة لِلإِستفسَارَات الجيّدة و لِلمحَاولَات الجيّدة لحلّ التّمَارين .

اَلأعدَاد المركبة

تعريف

يمكن تعريف العدَد المركب z عل أنّه زوج مرتّب من أعدَاد حقيقيّة نكتب $z = (x, y) = x + iy$ و هكذَا تكون مجموعة الأعدَاد المركبة $\mathbb{C}$ عبَارة عن $\mathbb{R}^2$. عندهَا يكون x هو الجزء الحقيقي لِلعدَد $z = (x, y) = x + iy$ فيمَا يسمّى y الجزء التّخيلي لِلعدَد $z = (x, y) = x + iy$. و نكتب $x = \mathcal{R}e(z)$ و $y = \mathcal{I}m(z)$

الخصَائِص الجبريّة

علَى $\mathbb{C}$ إِذَا كَان $z = (a, b)$ و $w = (x, y)$ فإِنَّنا نعرف عملية الجمع $z + w = (a + x, b + y)$ كمَا نعرف عملية الضرب $z.w = (ax - by, bx + ay)$

أمثلة

١) ليكن $i = (0, 1)$ فإِنّ $i^2 = i.i = (-1, 0)$

٢) ليكن $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإِنّ $j + j^2 + 1 = 0$

نظريّة

إِن $(\mathbb{C}, +, .)$ هو حقل إِبدَالي و $x \to (x, 0)$ هو تطَابق حقلي بين $\mathbb{R}$ و صورته

ملَاحظَات

من النظريّة السَابقة فإِنّ كلّ عدَد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ هو عدَد مركب $x = x + i0$ نعرف أنّ المعَادلة $x^2 = -1$ ليس لهَا حلول حقيقيّة لكنهَا في $\mathbb{C}$ لهَا حلَّان و همَا i و $-i$. هذَا أحد الأسبَاب التَاريخيّة لإِكتشَاف الأعدَاد المركبة

أمثلة

١) اَلمعكوس الضربي لِلعدَد $z = (x, y) = x + iy$ هو $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$

٢) صيغة ذَات الحدّين تنص علَى أنّه لكلّ عدَدين z و w مركّبين لنَا

$$(w + z)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k z^{n-k}$$

تعريف

لكل عدَد مركب $z=(x,y)=x+iy$ نعرّف القيمة المطلقة بأنّها $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ كمَا نعرّف مرَافق z بأنّه $\overline{z}=x-iy$

ملَاحظَات

١) لكل عدَد مركب $z=(x,y)=x+iy$ فإنّ $\overline{z}=x-iy$ هو صورة z بَالإنعكَاس حول محور السّينَات

٢) لكل عدَد مركب $z=(x,y)=x+iy$ فإنّ $x=\mathcal{R}e(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ و $y=\mathcal{I}m(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$ و $z.\overline{z}=|z|^2$

٣) لكلّ عدَدين z و w مركّبين لنَا $\overline{w+z}=\overline{z}+\overline{w}$ و $\overline{(w.z)}=\overline{z}.\overline{w}$ كمَا أنّ و $|w.z|=|z|.|w|$ فيمَا $|w+z|\leq|z|+|w|$ و هذه المتبَاينة تسمَّى متبَاينة المثلث.

الإحدَاثيَات القطبيّة

دَائِرة الوحدة $\gamma(0,1)$ هي $\gamma(0,1)=\{z\in\mathbb{C},|z|=1\}$. إِذَا كَان (x,y) ينتمي إِلَى دَائِرة الوحدة و $\pi<\theta\leq\pi$ هي الزَاوية التي تبدَأ من محور السينَات و تنتهي عند (x,y) فإنّ $x=cos\theta$ و $y=sin\theta$ وهكذَا يكون $(x,y)=cos\theta+isin\theta$

بصفة أعم إِذَا كَان z عدَد مركب غير صفري فإنّ $\frac{z}{|z|}$ ينتمي إِلَى دَائِرة الوحدة إِذًا توجد زَاوية وحيدة $-\pi<\theta\leq\pi$ هي الزَاوية التي تبدَأ من محور السينَات و تنتهي عند z بحيث $\frac{z}{|z|}=cos\theta+isin\theta$ أي أنّ

$$z=|z|(cos\theta+isin\theta)$$

الزَاوية الوحيدة $-\pi<\theta\leq\pi$ التي تحقّق $z=|z|(cos\theta+isin\theta)$ تسمَى **الإتّسَاع الأسَاسي** *Principal Argument* و رمزهَا هو $\theta=Argz$ إِذَا كَان $z=|z|(cos\theta+isin\theta)$ و كَان $n\in\mathbb{Z}$ فإنّ $z=|z|(cos(\theta+2n\pi)+isin(\theta+2n\pi))$ و هكذَا يكون $\theta+2n\pi$ إِتّسَاع ثَاني لِلعدَد z نرمز إِليه حسب $\theta+2n\pi=argz$

ملَاحظَات

اذَا كَان $z=|z|(cos\theta+isin\theta)$ و $w=|w|(cos\beta+isin\beta)$ فإنّ $z.w=|z||w|(cos\theta cos\beta-sin\theta sin\beta+i(cos\beta sin\theta+sin\beta cos\theta)=|z||w|(cos(\theta+\beta)+isin(\theta+\beta))$
و هكذَا يكون $argz+argw=argz.w$

لكلّ $z\in\mathbb{C}$ نعرّف

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}$$

نَلاحظ أنّ

$$e^z.e^w=e^{z+w}$$

و إِذَا كَانت $y\in\mathbb{R}$ فإِنّ $e^{iy}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}$ لنجمع الزوجي $n=2p$ و الفردي $n=2p+1$ كل علَى حدة فإِنّ

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2p}}{(2p)!}+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

أي أنّ

$$e^{iy}==\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(y)^{2p}}{(2p)!}+i\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(y)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

و نظرًا لمفكوك تيلور لِلدَالتين $siny=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(y)^{2p+1}}{(2p+1)!}$ و $cosy=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(y)^{2p}}{(2p)!}$ فإِنّ

$$e^{iy}=cosy+isiny$$

هذه هي صيغة أويلر **Euler's formula**

إِذَا كَان z عدَد مركب غير صفري و $\theta=argz$ فإِنّ

$$z=|z|(cos\theta+isin\theta)=|z|e^{i\theta}$$

و هي الصيغة **القطبيّة** لِلعدَد z

لكلّ $z=|z|e^{i\theta}\in\mathbb{C}$ و كل $k\in\mathbb{N}$ فإِنّ $z^k=|z|^ke^{ik\theta}$ **فمثلًا** عندمَا يكون $z=e^{i\theta}=(cos\theta+isin\theta)$ فإِنّ $z^k=(cos\theta+isin\theta)^k$ و $z^k=(e^{i\theta})^k=e^{ik\theta}=cosk\theta+isink\theta$

فنتحصل علَى صيغة دي موفر **De Moiver's formula** و التي نصهَا هو

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ (cos\theta+isin\theta)^p=cosp\theta+isinp\theta$$

جذور الوحدة

لتكن $n\in\mathbb{N}$ نقول أنّ $z\in\mathbb{C}$ هو جذور نوني لِلوحدة إِذَا تحقّق $z^n=1$ في الكتَابة القطبيّة $z=|z|e^{i\theta}$ إِذًا $z^n=|z|^ne^{in\theta}$ و لكلّ $k\in\mathbb{Z}$ فإِنّ $1=cos2k\pi+isin2k\pi=e^{i2k\pi}$ إِذًا $z^n=1$ يتكَافأُ مع $|z|^ne^{in\theta}=e^{i2k\pi}$ أي $|z|^n=1$ و $n\theta=2k\pi$ إِذًا $z=e^{i\frac{2k}{n}\pi}=cos\frac{2k}{n}\pi+isin\frac{2k}{n}\pi$ و عدَدهَا هو n لأنّ e^{iz} دوريّة و دورتهَا 2π .

تمرين

١) أوجد حلول $z^6=64$ و بين أنّهَا قمم سودَاسي متسَاوي الأضلَاع و منتظم

٢) لتكن $n \in \mathbb{N}$ بيّن أنّ $1 + cosx + cos2x + ...cosnx = \frac{1}{2} + \frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}}$

٣) ليكن $z \neq 1$ جذور نوني لِلوحدة أي $z^n = 1$ بين أنّ $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = 0$

الدّوَال التّحليلية

نذكر بأنّ $\mathbb{C}$ هو $\mathbb{R}^2$ حيث $z = x + iy = (x, y)$ و نقول أنّ x هي القيمة الحقيقية $(real)$ و y هي القيمة التّخيّلية $(imaginary)$ لِلعنصر z و نكتب $x = Rez$ و $y = Imz$ في حين أنّ القيمة المطلقة هي $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ أمَّا القرص $(disc)$ $D(z_0, r)$ ذو مركز $z_0 \in \mathbb{C}$ و نصف قطر $r \geq 0$ فهو

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$$

نقول أنّ المجموعة $\Omega \subset \mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة أو مفتوح إن و فقط إن تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall z \in \Omega, \exists r > 0; D(z, r) \subset \Omega$$

و نقول أنّ Ω نطَاق $(Domaine)$ إن كَان مفتوح و مترَابط

تعريف

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $z_0 \in \Omega$ و $f : \Omega \to \mathbb{C}$ نقول أنّ f قَابلة لِلإشتقَاق عند z_0 إن و فقط إن وجد $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ · عندهَا هذه النهَاية تسمَى إشتقَاق $(Derivative)$ f عند z_O و نرمز إليهَا كمَا يلي

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نقول أنّ الدَالة تحليلية $(holomorphic)$ علَى Ω إن كَانت قَابلة لِلإشتقَاق عند جميع عنَاصر Ω

ملَاحظَات

الدَالة f قَابلِةلِلإشتقَاق عند z_0 و $f'(z_0) = a$ إن و فقط إن وجدت دَالة ε تحقّق $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ بحيث

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + h\varepsilon(h)$$

لِلتّأكد من ذلك يكفَى أن نضع $h = z - z_0$ و $\varepsilon(h) = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - a$

إذًا كلّ دَالة قَابلة لِلإشتقَاق عند z_0 تكون متّصلة عند z_0 أي $\lim\limits_{h \to 0} f(z_0 + h) = f(z_0)$

أمثلة

١) كلّ كثيرة حدود $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + .. + a_0$ هي تحليلية في كَامل $\mathbb{C}$ (نقول أنّهَا كَاملة $entire$ أو صحيحة) و لنَا $P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + .. + a_1$

٢) اَلدَّالة الأسّية $e^z = e^x e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$ هي كَاملة و إشتقَاقهَا هو e^z

العلَاقة بين الإِشتقَاق و التّفَاضل

نذكّر بأَنّ

$f:\Omega\to\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ تكون قَابلة لِلتّفَاضل $(differentiable)$ عند $z_0=(x_0,y_0)$ إِن و فقط إِن وجدت دَالة خطّية $(linear)$ $l\in L(\mathbb{R}^2)$ و دَالة ε تحقّق $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ بحيث

$$f(z_0+h)-f(z_0)=l(h)+|h|\varepsilon(h)$$

إِذًا كلّ دَالة قَابلة لِلإِشتقَاق تكون قَابلة لِلتّفَاضل و إِذَا كَان $h=h_1+ih_2=(h_1,h_2)$ و $f'(z_0)=a+ib$ فلنَا

$$l(h)=(ah_1-bh_2,ah_2+bh_1)$$

و العكس صحيح لنفترض أنّ f قَابلة لِلتّفَاضل و تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان

$$f(x,y)=f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)=(U(x,y),V(x,y))$$

عند (x,y) فإِنّ تفَاضلهَا l يحقّق

$$l(h)=l(h_1,h_2)=(h_1\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)+h_2\frac{\partial U}{\partial y}(x,y),h_1\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)+h_2\frac{\partial V}{\partial y}(x,y))$$

إِذًا قَابلية f لِلإِشتقَاق تحتّم أنّ

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\quad,\quad\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\frac{-\partial V}{\partial x}(x,y)$$

و هذه هي معَادلَات كوشَى ريمَان $(Cauchy-Riemann\ equations)$ و هكذَا نتحصّل علَى

ملَاحظَات

تكون f قَابلة لِلإِشتقَاق عند (x,y) إِن و فقط إِن كَانت قَابلة لِلتّفَاضل و تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان

تمَارين

١) بيّن $z\to\overline{z}$ قَابلة لِلتّفَاضل مَالَانهَاية من المرَّات و لكنّهَا غير قَابلة لِلإِشتقَاق فَى أيٍ من نقَاط المركّب

٢) بيّن أنّ $z\to\overline{z}^2$ قَابلة لِلتّفَاضل مَالَانهَاية من المرَّات و لكنّهَا قَابلة لِلإِشتقَاق فقط عند الصّفر

٣) بيّن أنّ $z\to\frac{\overline{z}^2}{z}$ تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان عند الصّفر و لكنّهَا غير قَابلة لِلإِشتقَاق فَى أيٍ من نقَاط المركّب

بعض الدّوَال المهمة

الدَّالة الأسّية $(exponential)$

الدَّالة $z = x + iy \to e^z = e^x(cosy + isiny)$ هي دَالّة **صحيحة** $(entire)$ إذ هي قَابلة لِلإشتقَاق فى كَامل المركّب. أمَّا مدَاهَا فهو $\mathbb{C}^*$ وهي تحقّق

$$(e^z)' = e^z, \qquad e^{z+z'} = e^z.e^{z'}, \qquad |e^z| = e^x$$

و هي دوريّة و ليست تبَاين

$$(e^z = e^{z'}) \Leftrightarrow (e^{z-z'} = 1) \Leftrightarrow (z - z' = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z})$$

ملَاحظة

نستطيع أن نبرهن علَى جميع المعَادلَات المثلّثية $(trigonometric\ equations)$ العَاديّة بإستعمَال الدَّالة الأسّية فمثلًا إذَا كَان $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ فإنّ

$$e^{i(x-y)} = cos(x-y) + isin(x-y) = e^{ix}.e^{-iy} = (cosx + isinx)(cos(-y) + isin(-y))$$

إذًا $cos(x-y) = cosx.cosy + sinxsiny$ و $sin(x-y) = sinxcosy - cosxsiny$ و كذَالك

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

نمدّد هذَا لكَامل المركّب فنعرّف الجيب (sin) و جيب التّمَام (cos) كمَا يلَى

$$\forall z \in \mathbb{C}, cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

نستطيع أن نثبت بسرعة أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, cos'(z) = sinz, \qquad sin'(z) = cosz, \qquad cos^2 z + sin^2 z = 1$$

مَا هي أصفَار $(roots)$ هذه الدّوَال

$$(sinz = 0) \Leftrightarrow (e^{iz} = e^{-iz}) \Leftrightarrow (e^{2iz} = 1) \Leftrightarrow (z = k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

أمَّا

$$(cosz = 0) \Leftrightarrow (e^{iz} = -e^{-iz}) \Leftrightarrow (e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}) \Leftrightarrow (z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

و بهذَا تكون دَالّة الظّمَاس

$$tanz = \frac{sinz}{cosz}$$

تحليلية علَى $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

و كذَالك تمَاس التّمَام

$$cotanz = \frac{cosz}{sinz}$$

تحليلية علَى $\mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ و لنَا

$$(tan)'(z) = 1 + tan^2(z) = \frac{1}{cos^2(z)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ sin(2z) = \frac{2tan(z)}{1 + tan^2(z)}$$

$$cos(2z) = \frac{1 - tan^2(z)}{1 + tan^2(z)}$$

كذلك نمدّد الجيب الزّائِدي ($hyperbolic$) لكَامل المركّب فنعرّف الجيب الزّائِدي ($sinh$) و جيب التّمَام الزّائِدي ($cosh$) كمَا يلَى

$$\forall z \in \mathbb{C}, cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

فنتحصّل علَى

$$sinh' = cosh, \qquad cosh' = sinh, \qquad (cosh)^2 - (sinh)^2 = 1$$

الدّاوَال اللّوغَاريتميّة (نِسبة إِلَى الخوَارزمي)

نقول أنّ f هو تعيِين ($determination$) لِلّوغَارتم ($branch\ of\ logarithm$) علَى المفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ إِن و فقط إِن كَانت f متّصلة و تحقّق الشرط التّالَى

$$\forall z \in \Omega,\ e^{f(z)} = z$$

نظريّة

إِذَا كَان f تعيِين لِلّوغَارتم علَى المفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ فإِن f تكون تحليليّة علَى Ω و تحقّق

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

برهَان

عندنَا $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0 \Rightarrow} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ لنضع $w = f(z) \Leftrightarrow z = e^w$ و $w_0 = f(z_0) \Leftrightarrow z_0 = e^{w_0}$ نظرًا لأنّ f و الدّالة الأسّية متّصلتين فإِنّ

$$(z \to z_0) \Leftrightarrow (f(z) \to f(z_0))$$

إِذًا

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}$$

ملَاحظَات

١) بمَا أنّ مدَى الدَّالة الأسّية هو $\mathbb{C}^*$ فإنّه لَا يوجد أيّ تعيِين لِلوغَارتم فى أيّ مفتوح يحتوي علَى الصفر

٢) إذَا كَانت f تعيِين لِلوغَارتم علَى نطَاق Ω فإنّ $g:\Omega\to\mathbb{C}$ تكون تعيِين لِلوغَارتم علَى Ω إن و فقط إن وجد $k\in\mathbb{Z}$ بحيث $g=f+2ik\pi$ ذلك أنّه إن وجد $k\in\mathbb{Z}$ بحيث $g=f+2ik\pi$ فإنّ

$$e^g=e^{f+2ik\pi}=e^f=z$$

إذًا هو تعيِين لِلوغَارتم أمَّا إذَا كَان g تعيِين لِلوغَارتم فإنّه $e^g=e^f=z$ أي

$$\forall z\in\Omega,\exists k(z)\in\mathbb{Z}; f(z)-g(z)=2i\pi k(z)$$

إذًا الدَّالة k هي متّصلة علَى النطَاق Ω إذًا مدَاهَا هو جزءٌ متَرَابط من $\mathbb{Z}$ إذًا يحتوي علَى عنصرٍ وحيد و بهذَا تكون k ثَابتة . و كذلك

$$\forall z\in\Omega, g(z)=f(z)+2i\pi k$$

تعريف

علَى $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ ليكن $z=x+iy$ الدَّالة

$$Log(x+iy)=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+2iarctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})$$

هو تعيِين لِلوغَارتم يسمَّى التّعيِين الأسَاسَى و نرمز إليه $Log(z)$ أو $Ln(z)$

نلَاحظ أنّ

$$e^{Ln(z)}=\sqrt{x^2+y^2}(cos(2arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}))+isin(2arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})))$$

و نظرًا إلَى أنّ

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \ sin(2z)=\frac{2tan(z)}{1+tan^2(z)},\ \ cos(2z)=\frac{1-tan^2(z)}{1+tan^2(z)}$$

فإنّ $\forall z\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-), e^{Ln(z)}=z$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ لكلّ $z\in\mathbb{C}^*,$ يوجد $\theta(z)\in[\alpha,\alpha+2\pi[$ وحيد بحيث $\frac{z}{|z|}=e^{i\theta}$ بنفس الطّريقة نبيّن أنّ $log_\alpha(z)=Ln(|z|)+i\theta(z)$ هو تعيِين لِلوغَارتم علَى $\mathbb{C}\setminus\{te^{i\alpha},t\geq 0\}$ وجب حذف النصف المستقيم $\{te^{i\alpha},t\geq 0\}$ لأنّ الدَّالة $\theta(z)$ و بتَّالَى $log_\alpha(z)$ غير متّصلة في أيّ من نقَاطه إذ أنّ

$$\lim_{x\to\alpha^+}\theta(te^{ix})=\alpha,\qquad\qquad \lim_{x\to\alpha^-}\theta(te^{ix})=\alpha+2i\pi$$

تمَارين

١) هل يوجد تعيِين لِلوغَارتم علَى مفتوح يحتوي علَى دَئِرة مركزهَا 0

٢) أوجد أكبر مفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ يحقّق

$$\forall (z_1, z_2) \in \Omega \times \Omega, Ln(z_1 z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2)$$

٣) أوجد مجَال تعريف و قيمة الدَّالة $(Ln_{\frac{-\pi}{2}}) - Ln_{\frac{\pi}{2}})$ و بين أنّه $\forall n \in \mathbb{N}$ توجد بَالضبط n دَالة تحليليّة f علَى $\mathbb{C} \setminus \{it; t \geq 0\}$ تحقّق

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{it; t \geq 0\}, f^n(z) = z$$

التّكَامل

تعريف

نسمَّى قوسًا (arc) كلّ دَالة $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ قَابلةلِلإِشتقَاق نقول أنّ القوس أملس $(smooth)$ أو من صنف $\mathcal{C}^1$ إِذَا كَنت γ' متّصلة علَى $[a, b]$ و نقول أنّ القوس γ املس قطعًا $(piecewise)$ إِن و فقط إِن كَان متّصلًا و وجد $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ بحيث علَى $]x_j, x_{j+1}[$ القوس γ يتسَاوَى مع قوسٍ املس معرّف علَى $[x_j, x_{j+1}]$. اَلنقطة $\gamma(a)$ تسمَّى نقطة البِدَاية $(origin)$ و $\gamma(b)$ تسمَّى نقطة النِّهَاية و نقول أنّ القوس مغلق $(closed)$ إِن كَان $\gamma(a) = \gamma(b)$

أمثلة

١) اَلدَّائِرة $\gamma_{z_0,r}$ $(circle)$ اللّتي مركز $z_0 \in \mathbb{C}$ و نصف قطر $r \geq 0$ و هي معرّفة علَى $[0, 2\pi]$ كمَا يلي $\gamma_{z_0,r(t)} = z_0 + re^{it}$ و هو قوس املس لأنّ $\gamma'_{z_0,r}(t) = ire^{it}$ و هو مغلق

٢) اَلقطعة $[A, B]$ $(segment)$ حيث $A \in \mathbb{C}$ و $B \in \mathbb{C}$ و هي معرّفة علَى $[0, 1]$ كمَا يلي $[A, B](t) = A + (B - A)t$ هو قوس املس إِن و فقط إِن كَان $A \neq B$

٣) لتكن $y(t) = \begin{cases} e^{it}, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{2i}{\pi}t, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ بيّن أنّه ليس بأَملس لكنّه املس قطعًا و أرسم صورته

٤) ليكن $\Gamma(t) = t + it^2 sin(\frac{1}{t})$ بين أنّه قوس متّصل و ليس بأملس قطعًا.

تعريف

ليكن $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ قوسًا أملس قطعًا صورته γ^* و لتكن $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ دَالة متّصلة فإِنَّنا نعرّف تكَامل f علَى γ كَالتَّالي

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

أمثلة

١) عِذَا كَان $r > 0$

$$\int_{\gamma(z_0,r)} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi$$

٢) علَى القطعة $[A, B]$ عندنَا

$$\int_{[A,B]} zdz = \int_0^1 (A + (B - A)t)(B - A)dt = \frac{1}{2}(B^2 - A^2)$$

تعريف

ليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ قوسًا أملس قطعًا فإنّ القوس في الإتّجاه المعَاكس هو $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$ بحيث

$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$

القوسَان γ و γ^- لهمَا نفس الصّورة إلّا أنّ

$$\gamma(a) = \gamma^-(b), \qquad \gamma(b) = \gamma^-(a), \qquad \int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$$

نظريّة

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ يحتوي علَى صورة قوس املس قطعًا $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ فإنّ

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

برهَان

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [f \circ \gamma]'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

تطبيق

١) عندنَا $\int_{[A,B]} e^z dz = e^B - e^A$

٢) إذَا كَان γ قوس أملس قطعًا و مغلق من مفتوح Ω و f تحليليّة علَى Ω فانّ

$$\int_\gamma f'(z)dz = 0$$

إذًا لَا يوجد تعيِين لِلوغَارتم f علَى أيّ مفتوح يحتوي علَى دَائِرة γ مركزهَا الصّفر ذَالك أنّ

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$$

تعريف

ليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ قوسًا مغلقًا أملس قطعًا صورته γ^* لكلّ $z \notin \gamma^*$ فإنّ دَليل $(index)$ القوس γ بالنسبة إلَى العنصر z هو

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}$$

أمثلة

١) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و γ_n هو القوس المعرّف علَى $[0, 2\pi]$ حسب $\gamma_n(t) = z_0 + e^{int}$ فإنّ

$$I(\gamma_n, z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n}\frac{d\omega}{\omega - z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} nidt = n$$

٢) أمَّا $I(\gamma_n^-, z_0)$ فهو $-n$

و هكذَا يبدو $I(\gamma, z)$ هو عدَد المرَّات الّتى يدورهَا γ حول z في الإِتّجَاه المعَاكس لعقَارب السَّاعة. و هذَا يتأكّد بالنّظريّة التَّالية

نظريّة

ليكن $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ قوسًا مغلقًا أملس قطعًا صورته γ^* لكلّ $z \notin \gamma^*$ فإنّ $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ و هو ثَابت علَى كلّ جزءٍ مترَابطٍ من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ و يكون صفرًا علَى الجزء المترَابط الغير محدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$

برهَان

ليكن $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ قوسًا مغلقًا أملس قطعًا صورته γ^* و $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ لنعرّف

$$\psi(x) = e^{\int_a^x \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}}$$

هذه الدَّالة ψ قَابلة للأشتقَاق عند كلّ نقطة تكون فيهَا γ' متّصلة و لنَا

$$\psi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\psi(s)$$

و هذَا يعني أنّ

$$\left(\frac{\psi(s)}{\gamma(s) - z}\right)' = 0$$

أي أنّ الدَّالة $\frac{\psi(s)}{\gamma(s)-z}$ تكون ثَابتة علَى كلّ فترة تكون عليهَا γ' متّصلة و بمَا أنّه توجد $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$ بحيث علَى $[x_j, x_{j+1}]$ تكون γ' متّصلة. إذًا

$$\frac{\psi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\psi(x_1)}{\gamma(x_1) - z} = .. = \frac{\psi(b)}{\gamma(b) - z}$$

و بمَا أنّ $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإنّ

$$\psi(a) = \psi(b) = 1 = e^{2i\pi I(\gamma, z)}$$

إذًا

$$I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$$

علَى الجزء المترَابط الغير محدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ فإنّ $I(\gamma, z)$ يكون ثَابت إذًا

$$I(\gamma, z) = \lim_{z \to \infty}\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z} = 0$$

ملَاحظة

يوجد جزء مترَابط غير محدود وحيد من $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ ذَالك أنّ $\gamma([a,b])$ هو متزَاصّ لأنّه صورة متزَاصّ بدَالة متّصلة إِذًا يوجد $r>0$ بحيث $\gamma^*\subset D(0,r)$ بمَا أنّ $\mathbb{C}\setminus D(0,r)$ هو جزء مترَابط فهو ينتمَى إِلَى الجزء المترَابط الغير محدود الوحيد من $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ كلّ الأجزَاء الأخرَى هي موجودة دَاخل $D(0,r)$ ·

تطبيق

لنأخذ الحلزون $A=\{te^{it};t\geq 0\}$ هو قوس ينطلق من الصّفر و يذهب إِلَى مَا لَا نهَاية لكلّ قوسٍ مغلقٍ أملس قطعًا γ من $\mathbb{C}\setminus A$ فإِنّ $I(\gamma,0)=\int_\gamma \frac{dz}{z}=0$ ذَالك أنّ 0 موجود فِي الجزء المترَابط الغير محدود من $\mathbb{C}\setminus A$ · بالإِعتمَاد علَى نظريّة سَابقة نستنتج أنّ $\frac{1}{z}$ لهَا أصل f علَى $\mathbb{C}\setminus A$ إِذًا

$$(ze^{-f(z)})'=e^{-f(z)}-f'(z)ze^{-f(z)}=0$$

إِذًا $ze^{-f(z)}$ هي ثَابتة λ علَى المترَابط $\mathbb{C}\setminus A$ بمَا أنّ $\lambda\neq 0$ يوجد $c\in\mathbb{C}$ بحيث $\lambda=e^c$ إِذًا الدَّالة التّصلة g المعرّفة علَى كلّ $\mathbb{C}\setminus A$ حسب $g=f+c$ تحقِّق $z=e^{g(z)}$ · إِذًا g هي تعيِين متّصل لِلّوغرتم علَى $\mathbb{C}\setminus A$

و بنفس الطّريقة نبيّن أنّه مهمَا كَان الجزء المترَابط الغير محدود A اللّذِى يحتوِى علَى الصّفر فإِنّه يوجد تعيِين متّصل لِلوغرتم علَى $\mathbb{C}\setminus A$ هذَا و لقد أثبتنَا خلَال هذَا التطبيق النظريّة التَّالية

نظريّة

يوجد تعيِين متّصل لِلّوغرتم علَى مفتوحٍ $\Omega\subset\mathbb{C}$ إِن و فقط أن وجدت دَالة f تحليليّة علَى Ω تحقِّق

$$f'(z)=\frac{1}{z}$$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات

٢٤ صفر ١٤٢٤

تحليل مركب **الَاختبَار الَاول** **في سَاعتين**

التمرين الَاول

١) ليكن $y \in \mathbb{R}$,$x \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ ، أوجد القيمة الحقيقية و القيمة التخيلية لِلدَالة $f(z) = e^{\frac{1}{x-iy}}$
.

أين تكون الدَالة f تحليلية.

٢) أوجد القيمة الحقيقية لِلعدَد $\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}$ و أستنتج قيمة $cost + .. + cosnt$

التمرين الثَاني

ليكن γ_R القوس المعرف علَى $[0, \frac{\pi}{4}]$ بحيث $\gamma_R(t) = -1 + Re^{it}$

١) أرسم صورة γ_2

٢) أوجد $\lim_{R \to 0} \int_{\gamma_R} \frac{cosz}{z+1}$

٣) أوجد $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2}$

التمرين الثَالث

١) أوجد قيمة $log_{-\frac{\pi}{2}}(e^{1-i\frac{6}{5}\pi})$

٢) أشتقّ $zlog_{-\frac{\pi}{2}}(z)$ و أوجد قيمة $\int_{\gamma_2} log_{-\frac{\pi}{2}}(z)dz$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٦ ربيع الَاوّل ١٤٢٤

تحليل مركب الَاختبَار الثَاني في سَاعتين

التمرين الَاول

١) ليكن $y \in \mathbb{R}$,$x \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ ، أوجد القيمة الحقيقية و القيمة التخيلية لِلدَالة $f(z) = e^{(\frac{-i}{1-x-iy})}$. أين تكون الدَالة f تحليلية.

٢) أوجد النّقَاط الشَاذة لِلدَّالة $g(z) = \frac{f(z-1)}{z(z-1)}$ مَا طبيعتهَا و البَاقي فيهَا.

٣) أوجد قوسًا γ_r املس تكون صورته

$\{(x + iy) \in \mathbb{C}, y > 0, (x-1)^2 + y^2 = r^2\}$

و استنتِج قيمة $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z)dz$

التمرين الثَاني

أوجد جميع الدّوَال الصّحيحة h بحيث $\forall n \in \mathbb{N}^*, h(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$

٢) هل توجد دَالة صحيحة لهَا عدَد غير متهي من الَاصفَار دَاخل قرص الوحدة

٣) هل توجد دَالة صحيحة ϕ بحيث

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi(\frac{1}{n}) = \frac{cosn}{n+1}$

التمرين الثَالث

١) أكتب نصّ و برهَان تمهيدية شوَارتز

٢) أوجد جميع التّقَابلَات التّحليليّة $\psi : B(0,1) \to B(0,1)$

مفكوك تيلور $(Taylor's\ serie)$

نظريّة

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و ليكن Δ مثلّث محتوَى هو و دَاخله فِي Ω فإِنّ

$$\int_\Delta f(z)dz = 0$$

برهَان

لنفترض أنّ $|\int_\Delta f(z)dz| = a \neq 0$ بربط أنصَاف الأضلَاع نتحصّل علَى ٤ مثلّثَات مجموع التّكَامل عليه يسَاوِى $\int_\Delta f(z)dz$ اذًا إِحدَاهَا يكون التّكَامل عليه أكبر من $\frac{a}{4}$ نسمّيّه Δ_1 و لنَا طول Δ_1 نسمّيه $L(\Delta_1)$ يحقّق $L(\Delta_1) = \frac{L(\Delta)}{2}$ نعيد الكرّة انطلَاقًا من Δ_1 و هكذَا دوَاليك نبني متّتَابعة من المثلّثَات $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث Δ_{n+1} هي أحدَى الأجزَاء الأربعة المتسَاوية للّمثلّث Δ_n و

$$|\int_{\Delta_{n+1}} f(z)dz| \geq \frac{1}{4}|\int_{\Delta_n} f(z)dz|$$

اذَا أخذنَا $z_n \in \Delta_n$ فإِنّ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون كوشيّة و بمَا أنّ $\mathbb{C}$ كَامل فإِنّ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من $z_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ ولنَا

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)$$

إِذًا

$$|\frac{a}{4^n}| \leq |\int_{\Delta_n} f(z)dz| = |\int_{\Delta_n} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz + \int_{\Delta_n} (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)dz|$$

بمَا أنّ $(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))$ كثيرة حدود إِذًا لهَا أصل إِذًا

$$\int_{\Delta_n} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz = 0$$

أمّا اتّكَامل الثَّاني فإِنّه

$$|\int_{\Delta_n} (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)dz| \leq \frac{L}{2^n}\frac{L}{2^n} \sup_{z\in\Delta_n} |\varepsilon(z - z_0)|$$

أي أنّ

$$\frac{a}{L^2} \leq \sup_{z\in\Delta_n} |\varepsilon(z - z_0)|$$

و هذَا تنَاقض نظرًا إِلَى أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Delta_n} |\varepsilon(z-z_0)| = 0$$

نظريّة (موريرة $Morera$)

لتكن f دَالة متّصلة علَى قرص $D(a,r)$ بحيث تكَاملهَا علَى كلّ مثلّث من القرص يسَاوِى صفر فإِنّ f يكون لهَا أصل و بالتَّالِى تكون تحليليّة علَى القرص

برهَان

لتكن $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw$ و لتكن $h \in \mathbb{C}$ بحيث المثلّث $\Delta = [a, z, z+h]$ يكون دَاخل $D(a,r)$ بمَا أنّ

$$\int_\Delta f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,a]} f(w)dw = 0$$

فإِنّ

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt$$

و بهذَا يكون

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th)dt = f(z)$$

أي أنّ $F \in \mathcal{C}^1$ و $F' = f$

نظريّة

لتكن f دَالة متّصلة علَى نطاق Ω فإِنّ f يكون لهَا أصل أي أنّ f تكون مشتقّة دَالة F إِذَا و فقط إِذَا كَان تكَاملهَا علَى كلّ قوس مغلق أملس قطعًا يسَاوِى صفر

برهَان

لتكن $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw$ و لتكن $h \in \mathbb{C}$ بحيث المثلّث $\Delta = [a, z, z+h]$ يكون دَاخل $D(a,r)$ بمَا أنّ

$$\int_\Delta f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,a]} f(w)dw = 0$$

فإِنّ

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt$$

و بهذَا يكون

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\int_0^1 f(z+th)dt=f(z)$$

أي أنّ $F\in\mathcal{C}^1$ و $F'=f$

نظريّة

ليكن $a\in\mathbb{C}, r>0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإِنّ

$$\forall z\in D(a,r), f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(a,r)}}\frac{f(w)d\omega}{\omega-z}$$

برهَان

١) لنفترض أوّلًا أنّ $a=0$ و $r=1$ و f' متّصلة بمَا أنّ z دَاخل القرص $D(0,1)$ فإِنّ

$$I\gamma_{(0,1)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}dt}{e^{it}-z}=1$$

إِذًا

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(0,1)}}\frac{f(z)d\omega}{\omega-z}=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)e^{it}dt}{e^{it}-z}$$

لتكن

$$g(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(f(e^{it}+s(z-e^{it}))-f(z))e^{it}dt}{e^{it}-z}$$

عندنَا $g(1)=0$ و المطلوب أن نبيّن أنّ $g(0)=0$ بمَا أنّ

$$g'(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-(e^{it}-z)(f'(e^{it}+s(z-e^{it}))e^{it}dt}{e^{it}-z}=\frac{-1}{2i\pi(1-s)}\int_0^{2\pi}(f(e^{it}+s(z-e^{it})))'dt=0$$

ذلك أنّ $t\to f(e^{it}+s(z-e^{it}))$ دوريّة و طول دورتهَا 2π إِذًا g ثَابتة و بهذَا يكون
$g(0)=g(1)=0$

٢) فِي الحَالة العَامة فإِنّ ه إِن كَانت $\xi\in D(a,r)$ فإِنّ $z=\frac{\xi-a}{r}\in D(0,1)$

لنضع $g(z)=f(a+rz)$

فإِنّ g تكون تحليلية علَى $D(0,1)$ إِذًا

$$\begin{aligned}f(\xi)=g(z)&=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(0,1)}}\frac{g(w)d\omega}{\omega-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(e^{it})e^{it}dt}{e^{it}-\xi}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{it})e^{it}dt}{e^{it}-\frac{\xi-a}{r}}\\&=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(a,r)}}\frac{f(w)d\omega}{\omega-\xi}\end{aligned}$$

ملَاحظة

لقد إشتقَقنَا تحت علَامة التّكَامل وهذه العملية تكون صحيحة لو إفترضنَا من الأول أنّ $f \in \mathcal{C}^1$ فِي الحقيقة $f \in \mathcal{C}^\infty$ ذلك أنّه إن كَان f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإنّه يوجد $R > r$ بحيث f تكون تحليليّة علَى $D(a,R)$ نظرًا لما سبق فإنّ f لهَا أصل F يحقّق

$$\forall z \in D(a,r), F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(a+re^{it})re^{it}dt}{a+re^{it}-z}$$

بهذه الصّيغة تكون F قَابلة للإشتقَاق مَا لَا نهَاية من المرَّات و

$$\forall z \in D(a,r), F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(a+re^{it})re^{it}dt}{(a+re^{it}-z)^{n+1}}$$

إذًا $f = F' \in \mathcal{C}^\infty$

نظريّة مفكوك تيلور $(Taylor's\ serie)$

ليكن $a \in \mathbb{C}, r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإنّ

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

حيث

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

برهَان

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})re^{it}dt}{a+re^{it}-z} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})dt}{1-\frac{z-a}{re^{it}}} \end{aligned}$$

و بما أنّ $\forall |\lambda| < 1, \frac{1}{1-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ فإنّ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(a+re^{it})[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-a}{re^{it}})^n]dt$$

و بما أنّ التّقَارب منتظم فيمكن أن نبدّل الجمع مع التّكَامل فنتحصّل علَى

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

هذه المتسلسلة ت تقَارب بإِنتظَام علَى $D(a,r)$ إِذًا يمكن أن نشتقّهَا عدّة مرَّات حدًا بحد فنتحصّل علَى

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

تعريف

لتكن f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و $a \in \Omega$ ، يوجد $r > 0$ بحيث

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

حيث

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

هذه الصّيغة تسمَّى مفكوك تيلور $(Taylor's\ serie)$ للدَّالة f عند a

نظريّة متبَاينَات كوسي

ليكن $a \in \mathbb{C}, r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإِنّ

$$|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}| \leq \frac{1}{r^n}\sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

برهَان

نعرف أنّ

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

و كذلك

$$|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt| \leq \frac{1}{r^n}sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

و هذَا يفضَى إِلَى

$$|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}| \leq \frac{1}{r^n}sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

نظريّة (ليوفل $Liouville$)

كلّ دَالة كليّة $(entire)$ و محدودة تكون ثَابتة

برهَان

لتكن $M=\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$ فإنّ

$$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

حيث $\forall R>0, \forall n\in\mathbb{N}, |\frac{f^{(n)}(0)}{n!}|\leq\frac{M}{R^n}$ إذًا

$$\forall n\in\mathbb{N}, |\frac{f^{(n)}(0)}{n!}|\leq\lim_{R\to\infty}\frac{M}{R^n}=0$$

و بهذَا يكون

$$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)=f(0)$$

نظريّة (الأساسيّة فِي الجبر)

كلّ كثيرة حدود $P\in\mathbb{C}[z]$ غير ثَابتة لهَا علَى الأقلّ جذر

برهَان

لتكن $P\in\mathbb{C}[z]$ غير ثَابتة إن لم يكن لهَا جذر فإنّ $\frac{1}{P}$ تكون صحيحة و محدودة إذًا هي ثَابتة و بهذَا يكون P ثَابت و هذَا تنَاقض

ملَاحظة

إذَا كَانت درجة $P\in\mathbb{C}[z]$ تسَاوِى $n\in\mathbb{N}^*$ أي

$$P(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+..+\alpha_n z^n$$

فإنّه يوجد $z_1\in\mathbb{C}$ بحيث $P(z_1)=0$ بإعتمَاد مفكوك تيلور عند z_1 نرَى أنّه يوجد $P_1\in\mathbb{C}[z]$ درجته $n-1$ بحيث

$$P(z)=(z-z_1)P_1$$

إن كَان $n-1>1$ نعيد العمليّة بالنسبة لكثيرة حدود P_1 و هكذَا دوَاليك نبرهن أنّه يوجد اعدَاد مركّبة $z_1,..,z_n$ ليست بضرورة مختلفة بحيث

$$P(z)=\alpha_n(z-z_1)..(z-z_n)$$

نظريّة (اَلأصفَار المعزولة)

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطاق $\Omega\subset\mathbb{C}$ فإن العبَارَات التَّالية تكون متكَافِئة

١) اَلدَالة f تسَاوي صفر علَى كَامل Ω

٢) توجد $a\in\Omega$ بحيث لكلّ $n\in(\mathbb{N}\bigcup\{0\})$ فإنّ $f^{(n)}(a)=0$

٣) أصفَار f لهَا نقطة ترَاكم في Ω

برهَان

١) ⇐ ٢)

إِذَا كَانت الدَالة f تسَاوي الدَالة الصفريّة فلكلّ عدَدٍ كلّي n و لكلّ $a \in \Omega$ تكون $f^{(n)}(a) = 0$

٢) ⇐ ٣)

ليكن $a \in \Omega$ يحقّق $\forall n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, f^{(n)}(a) = 0$ بمَا أنّ Ω مفتوح يوجد $r > 0$ بحيث $B(a,r) \subset \Omega$ وعلَى $B(a,r)$ لنَا $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0$ · إِذًا $B(a,r)$ كلهَا نقَاط ترَاكم أصفَار f في Ω ·

٣) ⇐ ١)

لنفترض أنّ $a \in \Omega$ هي نقَاط ترَاكم لأصفَار f · بمَا أنّ Ω مفتوح يوجد $r > 0$ بحيث $B(a,r) \subset \Omega$ وعلَى $B(a,r)$ مفكوك تيلور f هو $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

إِن وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f^{(n)}(a) \neq 0$ ليكن $k \in \mathbb{N}$ أصغر الأعدَاد الطّبيعيّة $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f^{(n)}(a) \neq 0$ يصبح مفكوك تيلور f هو

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{n}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^k \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k}\right)$$

الدَالة $h(z) = (\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k})$ تحليلية إِذًا متّصلة و تحقّق $h(a) \neq 0$ إِذًا يوجد $\epsilon > 0$ بحيث h ليس لهَا أصفَار علَى $B(a,\epsilon)$ إِذًا الصفر الوحيد لِلدَالة $f(z) = (z-a)^k h(z)$ دَاخل $B(a,\epsilon)$ هو a · و هذَا ينَاقض أنّ a هي نقطة ترَاكم لأصفَار f نستنتج أنّ لكلّ $n \in \mathbb{N}$ فإِنّ $f^{(n)}(a) = 0$ و نلَاحظ أنّه لكلّ نقَاط ترَاكم a لأصفَار f و لكلّ $r > 0$ بحيث $B(a,r) \subset \Omega$ فإِنّ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0$ علَى $B(a,r)$

ليكن $A \subset \Omega$ نقَاط ترَاكم أصفَار f في Ω من الملَاحظة يكون A مفتوح من Ω و من ٣) يكون $A \neq \emptyset$ كي نثبت أنّه مغلق من Ω لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من A تتقَارب من $a \in \Omega$ فكلّ مفتوح $V \ni a$ سيحتوي a_n إِنطلَاقًا من رتبة معيّنة و بمَا أنّ a_n نقطة ترَاكم لأصفَار f فإِنّ V سيحتوي علَى مَالَانهَاية من لأصفَار f وهذَا هو تعريف أن a هي نقطة ترَاكم لأصفَار f إِذًا A هو كذلك مغلق بمَا أنّ Ω مترَابط فَالمجموعة الوحيدة المفتوحة من Ω و المغلقة من Ω و الغير فَارغة هي Ω فينتج أنّ $A = \Omega$ أي أنّ الدَالة f تسَاوي صفر علَى كَامل Ω ·

تطبيق

١) اَلدَّالة التّحليليّة الوحيدة علَى قرص الوحدة التي تحقِّق $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$ هي $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$ ذلك أنّه إِن وجدت دَالة g تحقِّق $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$ فإِنّ $(f-g)(\frac{1}{n}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ إِذًا 0 هو نقطة ترَاكم لأصفَار $f-g$ إِذًا $f-g$ تسَاوي صفر علَى كَامل Ω ·

٢) لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق $\Omega \subset \mathbb{C}$ ليست صفريّة فإِن وجد $a \in \Omega$ بحيث $f(a) = 0$ فإِنه يوجد $\epsilon > 0$ بحث a هو الصفر الوحيد لِلدَالة f دَاخل $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < \epsilon\}$ نقول أنّ الأصفَار معزولة· ليكن $K \Subset \Omega$ مترَاص فإِنّ عدَد أصفَار f دَاخل K يكون متهي · ذلك أنّ $A = K \bigcap \{z \in \Omega; f(z) = 0\}$ مترَاص لأنّه مغلق من مترَاص· و لكلّ $a \in A$ توجد $\varepsilon_a > 0$ بحيث $(A \bigcap B(a, \varepsilon_a)) = \{a\}$ يمكن أن نستخلص من الغطَاء المفتوح $\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a)$ غطاء متهي $B(a_1, \varepsilon_{a_1}), .., B(a_n, \varepsilon_{a_n})$ إِذًا $A = \{a_1, .., a_n\}$

تمرين

لتكن $f : B(0,1) \to \mathbb{C}^*$ دَالة تحليليّة غير ثَابتة و $A = \{z \in B(0,1); f(z) = 1\}$ ·

١)هل $A \bigcap B(0, \frac{1}{2})$ و $A \bigcap [0,1]$ همَا مجموعتين متهيتين

٢) بين أنّه لكلّ قوس γ من $B(0,1)$ و لكلّ دَالة تحليليّة g متّصلة علَى $\mathbb{C}^*$ ، فإِنّ
$$\int_{f\circ\gamma} g(z)dz = \int_{\gamma} g \circ f(z).f'(z)dz$$

٣) إِستنتج أنّه لكلّ قوس مغلق γ من $B(0,1)$ ، يكون
$$Ind_{f\circ\gamma}(0) = 0$$

في مَا تبقَّى نفترض أنّ f تبَاين·

٤) بيّن أنّه لكلّ قوس مغلق Γ من $f[B(0,1)]$ يوجد قوس مغلق γ من $B(0,1)$ بحيث $f \circ \gamma = \Gamma$ ·
إِستنتج أنّ $f[B(0,1)]$ نطَاق عليه تعيّين متّصل لِلوغَارتم

٥) بيّن $f[B(0,1)]$ لَا يمكن أن يحتوي دَائِرة مركزهَا الصّفر

الدّوَال التّوَافقيّة

تعريف

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $U : \Omega \to \mathbb{R}$ دَالة من نوع $\mathcal{C}^2$ نقول أنّ الدَّالة U توَافقيّة علَى Ω إن تحقَّقت علَى Ω المعَادلة التَّالية

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

أمثلة

لتكن f دَالة تحليليّة علَى مفتوح Ω

$$f(x, y) = f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$$

من معَادلَات كوشَي ريمَان $(Cauchy - Riemann\ equations)$ عند (x, y) فإنّ

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y = \frac{-\partial V}{\partial x}(x, y)$$

إذًا $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{-\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ إذًا $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

فمثلًا تكون $Log|z|$ تكون توَافقيّة علَى $\mathbb{C}^*$ لأنّها بجوَار كلّ نقطة هي قيمة حقيقيّة لدَالة تحليليّة $Log|z| = \mathcal{R}e(log_\pi z)$ علَى $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ و $Log|z| = \mathcal{R}e(log_{\frac{\pi}{2}} z)$ علَى $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$

تعريف

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $U : \Omega \to \mathbb{R}$ دَالة توَافقيّة علَى Ω نقول أن $V : \Omega \to \mathbb{R}$ هي مرَافق توَافقي لِلدَالة U إذَا و فقط إذَا كَانت الدَّالة $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ تحليليّة علَى Ω

أمثلة

أ) اَلدَّالة $2xy$ هو مرَافق توَافقي لِلدَالة $x^2 - y^2$

ب) إذَا أردنَا أن نبحث عن مرَافق توَافقي لِلدَالة التّوَافقيّة U

١) نَنطلق من معَادلَات كوشَي ريمَان $(Cauchy - Riemann\ equations)$ عند (x, y) فإنّ $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)$

٢) إذَا تحصلنَا علَى $\frac{\partial V}{\partial y}(x, y)$ نكَامل بالنسبة لِلمتغيرة y نجد $V(x, y) + c(x)$ نستعمل $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y = \frac{-\partial V}{\partial x}(x, y)$ لتحديد $c(x)$

٣) كمَا يمكن لِلبحث عن مرَافق توَافقي أن نستعمل برهَان النظرية التَّالية التي تبيّن أنّ علَى كلّ كرّة كلّ دَالة توَافقيّة لهَا مرَافق توَافقي

نظريّة

ليكن $R > 0$ و $a \in \mathbb{C}$ و $U : B(a, R) \to \mathbb{C}$ فإِنّ U تكون توَافقيّة علَى $B(a, R)$ إِذَا و فقط إِذَا وجدت دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$

برهَان

إِذَا كَانت f دَالة تحليليّة علَى $B(a, R)$ نعرف من معَادلَات كوشَى ريمَان و المثَال السَّابق أنّ $U = \mathcal{R}e(f)$ تكون توَافقيّة علَى $B(a, R)$

أمَّا إِذَا كَانت $U : B(a, R) \to \mathbb{C}$ دَالة توَافقيّة فنعرّف

$$h(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x, y)$$

لتكن $P = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y)$ و $R = -\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) =$ نلَاحظ أنّ $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y = \frac{-\partial R}{\partial x}(x, y)$ و كذلك نلَاحظ أنّ $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y)$ إِذًا h تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان إِذًا h دَالة تحليليّة علَى $B(a, R)$ من مفكوك تيلور فإِنّ h تسَاوي متسلسلة $\sum a_n(z - a)^n$ إِذًا لهَا أصل $F = \sum \frac{a_n}{n+1}(z - a)^{n+1}$ علَى $B(a, R)$ · لنَا

$$h(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = F' = \frac{\partial \mathcal{R}e(F)}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial \mathcal{I}m(F)}{\partial x}(x, y)$$

إِذًا $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{R}e(F)}{\partial x}(x, y)$ و $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{R}e(F)}{\partial y}(x, y)$ فحتمًا يوجد ثَابت $c \in \mathbb{R}$ يحقّق $U = \mathcal{R}e(F + c)$

رأينَا أنّ $Log|z|$ تكون توَافقيّة علَى $\mathbb{C}^*$ و لكن لَا توجد دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $Log|z| = \mathcal{R}e(f)$ ·

نظريّة (مبدَأ اَلقيمة العظمَى)

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω إِن وجد $a \in \Omega$ يحقّق $|f(a)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$ فإِنّ f تكون ثَابتة علَى Ω

برهَان

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و $a \in \Omega$ يحقّق $|f(a)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$ لتكن $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ بحيث $|f(a)| = e^{i\theta_0} f(a)$ و $g = e^{i\theta_0} f$ وليكن $t > 0$ بحيث $B(a, t) \subset \Omega$ نعرف أنّ

$$g(a) = |f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+te^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{R}eg(a+te^{i\theta})d\theta$$

الدّالة $\varphi(\theta) = g(a) - \mathcal{R}eg(a+te^{i\theta})$ موجبة و متّصلة و تحقّق $\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta = 0$ إذًا $\varphi(\theta)$ هي الدّالة الصفريّة ضف إلَى ذلك أنّ

$$\mathcal{R}eg(a+te^{i\theta}) = g(a) \geq |g(a+te^{i\theta})| = \sqrt{(\mathcal{R}eg(a+te^{i\theta}))^2 + (\mathcal{I}mg(a+te^{i\theta}))^2}$$

إذًا $\mathcal{I}mg(a+te^{i\theta})) = 0$ ينتج أنّه $\forall\theta\in\mathbb{R}, g(a) = g(a+te^{i\theta})$ إذًا الدّالة التحليليّة $(g - g(a))$ علَى النطَاق Ω لهَا أصفَار غير معزولة إذًا هي الدّالة الصفريّة ومن ثمّ فإنّ $\forall z\in\Omega, g(z) = g(a)$

ملَاحظة

ليكن Ω مفتوح محدود من $\mathbb{C}$ و لتكن f دَالة تحليليّة علَى Ω و متّصلة علَى $\overline{\Omega}$ فإنّ

$$\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| = \sup_{z\in\Omega}|f(z)|$$

ذلك أنّ الدّالة المتّصلة $|f|$ تصل إلَى قيمتهَا العظمَى علَى ال متراَص $\overline{\Omega}$ عند a كإن كَان $a\in\partial\Omega$ فإنّ $\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| = \sup_{z\in\Omega}|f(z)| = |f(a)|$ و إن كَان $a\in\Omega$ من مبدَأ القيمة العظمَى تكون f ثَابتة علَى الجزء المترَابط من Ω الذي يحتي علَى a حدود هذَا الجزء هي جزء من حدود Ω إذًا

$$\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| = \sup_{z\in\Omega}|f(z)|$$

تمرين تمهيديّة شوَارتز $(Lemme\ de\ SCHWARTZ)$

لتكن f دَالة تحليليّة علَى $D(0,1)$ تحقّق

$$f(0) = 0; \qquad \forall z\in D(0,1),\ \ |f(z)| \leq 1$$

١) بيّن أنّ $\forall z\in D(0,1),\ \ |f(z)|\leq |z|$ و $|f'(0)|\leq 1$ ·

٢) إستنتج أنّه إن كَان $|f'(0)| = 1$ ، أو إن وجد $z_0\in D(0,1)$ يحقّق $|f(z_0)| = |z_0|$ فإنّ $f(z) = \lambda z, \forall z\in D(0,1)$ حيث $|\lambda| = 1$

٣) بيّن أنّ كلّ تقَابل تحليلي $f : D(0,1)\to D(0,1)$ يثبّت 0 يكتب $f(z) = \lambda z$ ، حيث $|\lambda| = 1$ ·

٤) بيّن $\forall a\in D(0,1)$ ، اَلدّالة h_a المعرّفة حسب $h_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ هي تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$ · أوجد معكوسهَا

٥) بيّن أنّ كلّ تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$ هو من شكل λh_a حيث $|\lambda| = 1$ و $|a| < 1$

٦) بيّن أنّ كلّ دَالة تحليلية $f : D(0,1)\to D(0,1)$ تثبّت نقطتين تحقّق $f(z) = z$ ، $\forall z\in D(0,1)$ (أدرس $h_a\circ f\circ h_a$)

ينتج عن هذَا التّمرين النظريّة التَّالية

نظريّة

لتكن $f : D(0,1) \to D(0,1)$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد $\theta \in \mathbb{R}$ و يوجد $a \in D(0,1)$ وحيد يحقّق

$$\forall z \in D(0,1),\;\; f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

تطبيق

١) ليكن $P^{+} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, y > 0\}$ و $f : P^{+} \to D(0,1)$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد $\theta \in \mathbb{R}$ و يوجد $a \in P^{+}$ وحيد يحقّق

$$\forall z \in P^{+},\;\; f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

٢) ليكن $P^{+} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, y > 0\}$ و $f : P^{+} \to P^{+}$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد أعدَاد حقيقيّة a, b, c, d تحقّق $ad - bc = 1$ بحيث

$$\forall z \in P^{+},\;\; f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

صيغ كوشي

نظريّة

لتكن f دَالة متّصلة علَى علَى مفتوحٍ Ω و ليكن Δ مستقيم من $\mathbb{C}$ و لنفترض أنّ f تحليليّة علَى $\Omega \setminus \Delta$ فإنّ f تكون تحليليّة علَى كَامل Ω

برهَان

يكفي أن نثبت أنّه لكلّ مثلّث T يكون هو و دَاخله في Ω فإنّ $\int_T f(z)dz = 0$

١) إن كَان $T \bigcap \Delta = \emptyset$ فبديهي أنّ $\int_T f(z)dz = 0$ لأنّ f تكون تحليليّة علَى المفتوح $\Omega \setminus \Delta$ الذي يحتوي علَى المثلّث T و دَاخله.

٢) إن كَان Δ يحتوي علَى أحد أضلَاع المثلّث T لنقل أنّ $T = (A, B, C)$ و أنّ $[B, C] \subset \Delta$ لكلّ $0 < \epsilon < 1$ ليكن $B_\epsilon = A + (1-\epsilon)(B - A)$ و $C_\epsilon = A + (1-\epsilon)(C - A)$ $T_\epsilon = (A, B_\epsilon, C_\epsilon)$ بمَا أنّ f دَالة متّصلة علَى Ω فإنّ

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_\epsilon} f(z)dz$$

و بمَا أنّ $T_\epsilon \bigcap \Delta = \emptyset$ فمن المرحلة السّابقة $\int_{T_\epsilon} f(z)dz = 0$ إذًا

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_\epsilon} f(z)dz = 0$$

٣) إن كَان $T = (A, B, C)$ يتقَاطع مع Δ عند قمّة وحيدة لنقل $T \bigcap \Delta = C$ لتكن $C_\epsilon = A + (1-\epsilon)(C - A)$ بمَا أنّ f دَالة متّصلة علَى Ω فإنّ

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(A,B,C_\epsilon)} f(z)dz$$

فمن المرحلة الأولَى يكون

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(A,B,C_\epsilon)} f(z)dz = 0$$

٤) إن كَان $T = (A, B, C)$ يتقَاطع مع Δ في نقطتين لنقل $[A, B] \bigcap \Delta = B'$ و $[A, C] \bigcap \Delta = C'$ فانّ $\int_{(A,B,C)} f(z)dz = \int_{(A,B',C')} f(z)dz + \int_{(B,C',B')} f(z)dz + \int_{(C',B,C)} f(z)dz$ من فمن المرحلة الثّانية يكون $\int_{(A,B',C')} f(z)dz = \int_{(A,C',B')} f(z)dz = 0$ و من المرحلة الثّالثة يكون $\int_{(C',B,C)} f(z)dz = 0$

٥) إن كَان $T=(A,B,C)$ يتقَاطع مع Δ في نقطتين إحدَاهمَا قمّة لنقل A و $\Delta \ni A$ و $[c,B]\bigcap\Delta=A'$ فانّ $\int_{(A,B,C)}f(z)dz=\int_{(A,B,A')}f(z)dz+\int_{(A,A',C)}f(z)dz=0$ من المرحلة الثَّانية إذًا لكلّ مثلّث T يكون هو و دَاخله في Ω فإنّ $\int_T f(z)dz=0$ نتيجة لنظريّة موريرة تكون f دَالة تحليليّة علَى كَامل Ω

نتيجة

ليكن Ω مفتوحًا من $\mathbb{C}$ و $a\in\Omega$ و f دَالة تحليليّة علَى $\Omega\setminus\{a\}$ و محدودة فإنّه توجد دَالّة $\tilde{f}$ تحليليّة علَى كَامل Ω و تسَاوي f علَى $\Omega\setminus\{a\}$

برهَان

بمَا أنّ f محدودة فنتيجة تكون الدَّالة

$$F(z)=\begin{cases}(z-a)f(z) & , \quad z\in(\Omega\setminus\{a\})\\ 0 & , \quad z=a\end{cases}$$

متّصلة علَى Ω و لكلّ مستقيم Δ يحتوي علَى $\{a\}$ تكون F تحليليّة علَى $\Omega\setminus\Delta$ إذًا F تكون تحليليّة علَى كَامل Ω بمَا أنّ $F(a)=0$ فبجوَار a مفكوك F هو

$$F(z)=(z-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$$

لتكن $\widetilde{f(z)}=\frac{F}{z-a}$ فهي تحليليّة و تسَاوي f علَى $\Omega\setminus\{a\}$ و هي كذلك تحليليّة بجوَار a حيث $\widetilde{f(z)}=\frac{F}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$

تمَارين

١) هل يمكن أن نعوّض في النتيجة السَّابقة النّقطة $\{a\}$ بمستقيم Δ
(فكر في $f(z)=e^{iLog(z)}$)

٢) هل يمكن أن نعوّض في النظريّة السَّابقة المستقيم Δ بصورة قوس
(فكر في التّكَامل علَى المثّلثَات كمَا في برهَان تكَامل كوشي)

نظريّة *Schwarz reflection principle*

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ يحقّق $z\in\Omega\Rightarrow\overline{z}\in\Omega$ لتكن $f:\{z\in\Omega, Imz\geq 0\}\to\mathbb{C}$ دَالة متّصلة و تحليليّة علَى $\{z\in\Omega, Imz>0\}$ و حقيقيّة علَى الأعدَاد الحقيقيّة من Ω فإنّ

$$\widetilde{f}=\begin{cases} f(z) & , \quad z\in\{z\in\Omega, Imz\geq 0\} \\ \overline{f(\overline{z})} & , \quad z\in\{z\in\Omega, Imz<0\} \end{cases}$$

تكون تحليليّة علَى Ω

برهَان

لتكن $f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$ حيث $U=\mathcal{R}e(f)$ هي القيمة الحقيقيّة لِلدَالة f و $V=\mathcal{I}m(f)$ هي القيمة التّخيّليّة لِلدَالة f لنَا $\overline{f(\overline{z})}=U(x,-y)-iV(x,-y)$ لكلّ $(x,y)\in\{z\in\Omega, Imz<0\}$ لنضع $u(x,y)=U(x,-y)$ و $v(x,y)=-V(x,-y)$ فإنّ

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}(x,-y)=\frac{\partial V}{\partial y}(x,-y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y=\frac{-\partial V}{\partial x}(x,y)$$

و هذه هي معَادلَات كوشَى ريمَان $(Cauchy-Riemann\ equations)$ و هكذَا نتحصّل علَى أنّ $\widetilde{f}$ متّصلة علَى كَامل Ω و هي تحليليّة مَاعدَا علَى المحور الحقيقيّ إذًا من النّظريّة السَّابقة تكون $\widetilde{f}$ تحليليّة علَى كَامل Ω .

نظريّة كوشي $Cauchy's\ integral\ formula$

لتكن f تحليليّة علَى مفتوح Ω و ليكن $\gamma_1,..,\gamma_n$ أقوسًا مغلقة من Ω بحيث $\forall z\notin\Omega,\ \sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_j,z)=0$ فإنّه

$$\forall z\in(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*), \quad f(z)\sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$$

برهَان

لتكن $\Omega\times\Omega$ علَى

$$\varphi(z,w)=\begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & , \quad z\neq w \\ f'(z) & , \quad z=w \end{cases}$$

من تعريفهَا φ دَالة متّصلة علَى $\Omega\times\Omega$ كمَا أنّ لكلّ $w\in\Omega$ فإنّ $z\to\varphi(z,w)$ تكون تحليليّة علَى $\Omega\setminus\{w\}$ و متّصلة علَى كَامل Ω إذًا هي تحليليّة علَى كَامل Ω ليكن $V=\{z\in(\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*),\ \sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z)=0\}$ بمَا أنّ الدّليل ثَابت محليًّا فإنّ V يكون مفتوح و من المعطيّات يحتوي V علَى Ω^c لتكن

$$\Psi(z)=\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega & , \quad z\in\Omega \\ \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z} & , \quad z\in V \end{cases}$$

١) اَلدَّالة $\Psi(z)$ حسنة التعريف علَى $\mathbb{C}$ ذلك أنّ $\mathbb{C} = V\bigcup\Omega$ و أنّه أن كَان $z \in \Omega\bigcap V$ فإنّ

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{(f(\omega)-f(z))d\omega}{\omega-z} = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z} - f(z)\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{d\omega}{\omega-z} = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$$

لأنّ

$$f(z)\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{d\omega}{\omega-z} = f(z)\sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z) = 0$$

٢) نظرًا لإمكَانيّة الأشتقَاق تحت علَامة التّكَامل فإنّ الدَّالة $\Psi(z)$ تكون تحليليّة علَى V ليكن $a \in \Omega$ إذًا يوجد $r > 0$ بحيث $B(a,r) \subset \Omega$ لنأخذ مثلث $\Delta \subset B(a,r)$ لنَا من نظريّة فبيني *Fubini*

$$\int_{\Delta}\Psi(z)dz = \int_{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega dz = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}(\int_{\Delta}\varphi(z,\omega)dz)d\omega$$

بمَا أنّ $z \to \varphi(z,w)$ تحليليّة علَى Ω فإنّ $\int_{\Delta}\varphi(z,\omega)dz = 0$ إذًا $\int_{\Delta}\Psi(z)dz = 0$.

٣) نلَاحظ أنّ Ψ كليّة و تحقّق

$$\lim_{|z|\to\infty}\Psi(z) = \lim_{|z|\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z} = 0$$

إذًا Ψ دَالة كليّة و محدودة من نظريّة ليوفيل *Liouville* تكون Ψ دَالة ثَابتة و بمَا أنّ $\lim_{|z|\to\infty}\Psi(z) = 0$ إذًا لكلّ $z \in \Omega$ فإنّ $\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega = 0$ نلَاحظ أنّه لكلّ $z \in (\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*)$ و لكلّ $\omega \in (\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*)$ فإنّ $\varphi(z,w) = \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}$

إذًا لكلّ $z \in (\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*)$ فإنّ

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{(f(\omega)-f(z))d\omega}{\omega-z} = 0$$

و بمَا أنّ $\int_{\gamma_j}\frac{f(z)d\omega}{\omega-z} = f(z)Ind(\gamma_j,z)$ إذًا

$$\forall z \in (\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*),\qquad f(z)\sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$$

نظريّة

لتكن f تحليليّة علَى مفتوح Ω و ليكن $\gamma_1,..,\gamma_n$ أقوسًا مغلقة من Ω بحيث $\forall z \notin \Omega,\ \sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z) = 0$ فإنّه

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}f(\omega)d\omega$$

برهَان

ليكن $a \in (\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j^*)$ و $g(z) = (z-a)f(z)$ نلَاحظ أنّ $g(a) = 0$ و من النظريّة السَّابقة لنَا

$$0 = g(a) \sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_j, a) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{g(\omega)d\omega}{\omega - a}$$

و بمَا أنّ $f(\omega) = \frac{g(\omega)}{\omega - a}$ فإنّ

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(\omega)d\omega$$

عندمَا يكون لدينَا قوس وَاحد نتحصل علَى

نظريّة كوشي

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و ليكن γ قوسًا مغلقًا من Ω بحيث $\forall z \notin \Omega, \ Ind(\gamma, z) = 0$ فإنّه

$$\forall z \in \Omega \setminus \gamma^*, \quad f(z) Ind(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$$

نظريّة كوشي لهَا تطبيقَات جمَّا منهَا نظريّة البوَاقي و كذلك النظريّة التَّالية

نظريّة

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ فإنّه علَى $\{z \in \mathbb{C}, r < |z-a| < R\}$ يتحقَّق

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt\right)(z-a)^n$$

برهَان

لتكن $\gamma_1 = \gamma^-(a, r)$ و $\gamma_2 = \gamma(a, R)$ إذَا كَان $z \notin \Omega$ بمَا أنّ $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\} \subset \Omega$ فإمَّا $|z-a| < r$ عندهَا $Ind(\gamma_1, z) = -1$ و $Ind(\gamma_2, z) = 1$ و إمَّا $|z-a| > R$ عندهَا $Ind(\gamma_1, z) = Ind(\gamma_2, z) = 0$ في جميع الحَالَات $z \notin \Omega \Rightarrow Ind(\gamma_1, z) + Ind(\gamma_2, z) = 0$ من تكَامل كوشي لنَا

$$\forall z \in (\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{2} \gamma_j^*), \quad f(z) \sum_{j=1}^{2} Ind(\gamma_j, z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{2} \int_{\gamma_j} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$$

إذَا $z \in \{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ فإنّ $Ind(\gamma_1, z) + Ind(\gamma_2, z) = 1$ لأنّ z يكون دَاخل $B(0, R)$ و خَارج $B(0, r)$ عندهَا

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,R)}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,r)}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$$

لتكن $h(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,R)}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$ و $g(z)=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,r)}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$ بما أنّ

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{it})Re^{it}dt}{a+Re^{it}-z}$$

فمن برهان مفكوك تيلور $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(a+Re^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$ تكون تحليليّة في $\{z\in\mathbb{C},|z-a|\leq R\}$. أمّا بالنسبة لِلدَالة

$$g(z)=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,r)}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{it})re^{it}dt}{a+re^{it}-z}=\frac{1}{2\pi(z-a)}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{it})re^{it}dt}{1-\frac{re^{it}}{z-a}}$$

فنضع هذه المرّة $\lambda=\frac{re^{it}}{z-a}$ و بما أنّ $\forall|\lambda|<1,\frac{1}{1-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n$ فإنّ

$$g(z)=\frac{1}{2\pi(z-a)}\int_0^{2\pi}(f(a+re^{it})re^{it}[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{re^{it}}{z-a})^n]dt$$

و بما أنّ التّقارب منتظم علَى $[0,2\pi]$ فيمكن أن نبدّل الجمع مع التّكامل فنتحصّل علَى

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})(\frac{re^{it}}{z-a})^{n+1}dt)$$

و بوضع $k=-n-1$ فإنّ

$$g(z)=\sum_{k=-\infty}^{k=-1}(\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})e^{-ikt}dt)(z-a)^k$$

الدَّالة g تكون تحليليّة علَى كَامل $\{z\in\mathbb{C},r<|z-a|\}$ ينتج أنّ

$$f=g+h=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(a+Re^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n+\sum_{n=-\infty}^{n=-1}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

لتكن $r\leq t\leq R$ و $\Omega'=\Omega\setminus a$ لكلّ $n\in\mathbb{Z}$ الدَّالة $(z-a)^{n-1}f$ تحليليّة علَى Ω' و في جميع الحَالَات $z\notin\Omega'\Rightarrow Ind(\gamma(a,R),z)+Ind(\gamma^-(a,t),z)=0$ من النظريّة التي تلت تكَامل كوشي لنَا

$$\int_{\gamma(a,R)}\frac{f(\omega)d\omega}{(\omega-a)^{n+1}}+\int_{\gamma^-(a,t)}\frac{f(\omega)d\omega}{(\omega-a)^{n+1}}=0$$

ينتج أنّ لكلّ $n\in\mathbb{Z}$ و لكلّ $r\leq t\leq R$ فإنّ

$$\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi}f(a+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(a+Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

إذًا لكلّ $r\leq t\leq R$ و لكلّ $z\in\{z\in\mathbb{C},r\leq|z-a|\leq R\}$ فإنّ

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi}f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\{z\in\mathbb{C}, r\leq |z-a|\leq R\}$ و ليكن $r\leq t\leq R$ فإنّه علَى $\{z\in\mathbb{C}, r<|z-a|<R\}$ يتحقّق

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi}f(a+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta)(z-a)^n$$

هذَا المفكوك يسمّى مفكوك لورَان لِلدَّالة f $(Laurent's\ serie)$ من برهَان النّظريّة السَّابقة نرَى أنّ $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi}f(a+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta)(z-a)^n$ تكون تحليليّة في $\{z\in\mathbb{C}, |z-a|\leq R\}$.
في حين أنّ $g(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=0}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta)(z-a)^n$ تكون تحليليّة في $\{z\in\mathbb{C}, r\leq |z-a|\}$ و علَى $\{z\in\mathbb{C}, r\leq |z-a|\leq R\}$ لنَا $f=g+h$

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{C}$ و $r>0$ و f دَالة تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C}, 0<|z-a|<r\}$ نقول أنّ

١) اَلنقطة a شَاذة مزَالة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا أمكن تمديد f كدَالة تحليليّة علَى كَامل $\{z\in\mathbb{C}, |z-a|<r\}$ أي توجد دَالة $\tilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C}, |z-a|<r\}$ بحيث $f=\tilde{f}$ علَى $\{z\in\mathbb{C}, 0<|z-a|<r\}$.

٢) اَلنقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة $n\in\mathbb{N}$ إذَا و فقط إذَا وجدت دَالة $\tilde{g}$ تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C}, |z-a|<r\}$ بحيث $(z-a)^n f=\tilde{g}$ علَى $\{z\in\mathbb{C}, 0<|z-a|<r\}$ و $\tilde{g}(a)\neq 0$.

٣) اَلنقطة a شَاذة أسَاسيّة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا لم تكن شَاذة مزَالة و لَا قطب لِلدَّالة f

نظريّة (النّقَاط اَلشَاذة)

ليكن $a\in\mathbb{C}$ و $r>0$ و f دَالة تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C}, 0<|z-a|<r\}$ و $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$ هو مفكوك لورَان الدَّالة f فإنّه

١) تكون a نقطة شَاذة مزَالة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا كَان $\forall n<0, a_n=0$ إذَا و فقط إذَا وجدت $0<\epsilon<r$ بحيث f تكون محدودة علَى $\{z\in\mathbb{C}, |z-a|<\epsilon\}$

٢) تكون a قطب لِلدَّالة f إِذَا و فقط إِذَا وجد $p \in \mathbb{N}$ بحيث $a_{-p} \neq 0$ و $a_{-n} = 0, \forall n > p$ إِذَا و فقط إِذَا كَان $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$

٣) تكون a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدَّالة f إِذَا و فقط إِذَا $\forall n \in \mathbb{N}$ توجد $p > n$ بحيث $a_{-p} \neq 0$ إِذَا و فقط إِذَا $\forall 0 < \epsilon < r, \overline{f(\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\})} = \mathbb{C}$

برهَان

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ و $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ هو مفكوك لورَان الدَّالة f

١) إِذَا كَانت a نقطة شَاذة مزَالة لِلدَّالة f فإِنّه يوجد $r > 0$ و دَالة $\tilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ بحيث $f = \tilde{f}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$. الدَّالة $\tilde{f}$ لهَا مفكوك لورَان $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$ بمَا أنّ $f = \tilde{f}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ فإِنّ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$ من وحدَانيّة مفكوك لورَان نستنتج أنّ $\forall n < 0, a_n = 0$

أَمَّا إِذَا كَان $\forall n < 0, a_n = 0$ فإِنّه علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ تكون f مسَاوية لجزئِهَا التّحليلي أي $f(z) = \sum_{n=O}^{\infty} a_n (z-a)^n$ لنسمّي $\tilde{f} = \sum_{n=O}^{\infty} a_n (z-a)^n$ فإِنّ $\tilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ إِذًا هي متّصلة إِذًا $\forall \epsilon < r$ تكون $\tilde{f}$ محدودة علَى المترَاص $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| \leq \epsilon\}$ و من ثمّ فإِنّ $f = \tilde{f}$ تكون محدودة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| \leq \epsilon\}$

أَمَّا إِن وجدت $0 < \epsilon < r$ بحيث تكون f محدودة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| \leq \epsilon\}$ فإِنّ الدَّالة

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & , \quad 0 < |z-a| < r\} \\ 0 & , \quad z = a \end{cases}$$

تكون متّصلة علَى كَامل $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ و تحليليّة مَاعدَى عند a إِذًا هي تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ و لهَا مفكوك تيلور $g(z) = \sum_{n=O}^{\infty} \beta_n (z-a)^n$ لنَا $\beta_0 = g(a) = 0$ إِذًا $g(z) = (z-a)f(z) = (z-a)\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z-a)^{n-1}$ أي أنّ $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z-a)^{n-1}$ هذَا هو مفكوك لورَان لِلدَالة $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ إِذًا $\forall n < 0, a_n = 0$.

٢) اَلنقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة $p \in \mathbb{N}$ إِذَا و فقط إِذَا وجدت دَالة $\widetilde{g}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ بحيث $(z-a)^p f = \widetilde{g}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ و $\widetilde{g}(a) \neq 0$ · اَلدَّلة g لهَا مفكوك تيلور $g(z) = (z-a)^p f = g(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z-a)^k$ ينتج أنّ $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = g(a)(z-a)^{-p} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z-a)^{k-p}$ إِذًا لنَا $a_n = 0, \forall n > p$

أمَّا إِذَا وجد $p \in \mathbb{N}$ بحيث $a_{-p} \neq 0$ و $a_{-n} = 0, \forall n > p$ فإِنّ $f = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^{-p} \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-a)^{n+p} = (z-a)^{-p} \sum_{k}^{\infty} a_{k-p} (z-a)^k$ عندهَا $g(z) = \sum_{k}^{\infty} a_{k-p}(z-a)^k = (z-a)^p f(z)$ تكون دَالة تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ و تحقّق $g(a) = a_{-p} \neq 0$ إِذًا النقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة p كذلك يكون $\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} |g(z)(z-a)^{-p}| = +\infty$ لأنّ $g(a) \neq 0$

أمَّا إِذَا كَان $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ فإِنّ $\lim_{z \to a} |\frac{1}{f(z)}| = 0$ إِذًا تكون الدَّالة $\frac{1}{f}$ محدودة بجوَار a من المرحلة الأولَى لنَا $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (z-a)^n$ حيث $\lambda_0 = \lim_{z \to a} |\frac{1}{f(z)}| = 0$ لتكن p أصغر دَليل $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\lambda_n \neq 0$ لنَا $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n (z-a)^{n-p}$ إِذَا وضعنَا $(z-a)^p f(z) = \widetilde{g}(z) = (\sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n (z-a)^{n-p})^{-1}$ فإِنّ g تكون تحليليّة بجوَار a و تحقّق $g(a) = \lambda_p^{-1} \neq 0$ إِذًا النقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة p

٣) تكون a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدَّالة f إِذَا و فقط لم تكن شَاذة مزَالة و لَا قطب لِلدَّالة f إِذًا ممّا سبق تكون a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدَّالة $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ إِذَا و فقط $\forall n \in \mathbb{N}$ توجد $p > n$ بحيث $a_{-p} \neq 0$.

إِذَا كَان $\forall 0 < \epsilon < r, \overline{f(\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\})} = \mathbb{C}$ فإِنّ f ليست محدودة بجوَار a إِذًا a ليست شَاذة مزَالة و كذلك a ليست قطب لِلدَّالة f لأنّ f لَا تحقّق $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ لأنّ $\forall 0 < \epsilon < r$ المفتوح $B(0,1)$ يتقَاطع مع $f(\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\})$ إِذًا توجد z_ϵ تحقّق $0 < |z_\epsilon - a| < \epsilon$ و $|f(z_\epsilon)| < 1$ إِذًا a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدَّالة f

و أخيرًا لنفترض أنّه $\exists 0 < \epsilon < r, \overline{f(\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\})} \neq \mathbb{C}$ بمَا أنّ $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\})}$ مفتوح فهو يحتوي علَى كرة $B(y,t)$ أي $|f-y| \geq t$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\}$ إِذًا $|\frac{1}{f-y}| \leq \frac{1}{t}$ فالدَّالة $\frac{1}{f-y}$ تكون محدودة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\}$

من ١)توجد دَالة $\tilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < \epsilon\}$ بحيث $\tilde{f} = \frac{1}{f-y}$ · إذًا $f = y + \frac{1}{\tilde{f}}$ إذَا كَان $\tilde{f}(a) \neq 0$ فإنّ f تكون محدودة بجوَار a و من ثمّ فإنّ a تكون نقطة شَاذة مزَالة لِلدَّالة f أمَّا إذَا كَان $\tilde{f}(a) = 0$ فإنّ $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ و من ثمّ فإنّ a تكون قطب لِلدَّالة f

نظريّة البوَاقي *Residues theorem*

لتكن $\{a_1, .., a_n\}$ نقَاط مختلفة من مفتوح Ω لتكن f تحليليّة علَى $(\Omega \setminus \{a_1, .., a_n\})$ و ليكن $\gamma_1, .., \gamma_s$ أقوسًا مغلقة من $(\Omega \setminus \{a_1, .., a_n\})$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $\sum_{j=1}^{s} Ind(\gamma_j, z) = 0,$ فإنّه

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} f(\omega) d\omega = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_k, a_j) Res(f, a_j)$$

برهَان

بجوَار a_k الدَّالة f مفكوك لورَان

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a_k + re^{it}) e^{-int} dt\right)(z - a_k)^n$$

حيث $g_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a_k + re^{it}) e^{-int} dt\right)(z - a_k)^n$ تكون تحليليّة في $(\mathbb{C} \setminus a_k)$ إذًا $h(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} g_j(z)$ تكون تحليليّة علَى $\Omega \setminus \{a_1, .., a_n\}$ بجوَار a_k الدَّالة $f - g_k$ تكون تحليليّة و كذلك $\sum_{j \neq k}^{n} g_j$ تكون تحليليّة بجوَار a_k إذًا $h = f - \sum_{j=1}^{n} g_j$ تكون تحليليّة علَى كَامل Ω ينتج من النّظريّة السَّابقة أنّ

$$0 = \sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} h(\omega) d\omega$$

إذًا

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega) d\omega$$

بمَا أنّ $g_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \alpha_n (z - a_k)^n$ تتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متَراص من $(\mathbb{C} \setminus a_k)$ فإنّ

$$\int_{\gamma_j} g_k(\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \alpha_n \int_{\gamma_j} (\omega - a_k)^n d\omega$$

نلَاحظ أنّ لكلّ $n < -1$ الدَّالة $(\omega - a_k)^n$ لهَا أصل $\frac{1}{n+1}(\omega - a_k)^{n+1}$ إذًا $\int_{\gamma_j} (\omega - a_k)^n d\omega = 0$ و من ثمّ فإنّ

$$\int_{\gamma_j} g_k(\omega)d\omega = \alpha_{-1}\int_{\gamma_j}(\omega - a_k)^{-1}d\omega = Ind(\gamma_j, a_k)Res(f, a_k)$$

$$\sum_{j=1}^{s}\int_{\gamma_j} f(\omega)d\omega = 2i\pi\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_k, a_j)Res(f, a_j)$$

مَلاحظة

عندمَا نتعَامل مع قوس وَاحد نتحصل علَى النّظريّة التَّالية

لتكن $\{a_1,..,a_n\}$ نقَاط مختلفة من مفتوح Ω لتكن f تحليليّة علَى $(\Omega \setminus \{a_1,..,a_n\})$ و ليكن γ أقوسًا مغلقة من $(\Omega \setminus \{a_1,..,a_n\})$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma, z) = 0,$ فإنّه

$$\int_{\gamma} f(\omega)d\omega = 2i\pi\sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma, a_j)Res(f, a_j)$$

تطبيق

١) لكلّ $\lambda \notin [-1,1]$ بين أنّ $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}} = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{\lambda+cost}$

بصفة عَامة إِذَا كَانة $f(sint, cost)$ دَالة كسريّة فإِنّنَا نحسب $\int_0^{2\pi} f(sint, cost)dt$ بَالطريقة التَّالية نضع $z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$ و كذلك $sint = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ و كذلك $cost = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ فنتحصل علَى

$$\int_0^{2\pi} f(sint, cost)dt = \int_{\gamma(0,1)} f(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{dz}{iz} = 2i\pi\sum_{|a_j|<1} Res(f(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{1}{iz}, a_j)$$

حيث a_j يكون قطب لِلدَالة $\frac{f(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})}{iz}$ و يحقّق $|a_j| < 1$ لَا نعتبر الأقطَاب الأخرَى لأنّ دَليل دَائِرة الوحدة $\gamma(0,1)$ بَالنسبة لكلّ $|a_j| > 1$ يسَاوي صفر.

لتكن $P \in \mathbb{C}[X]$ و dP درَجة P و لتكن $Q \in \mathbb{C}[X]$ بحيث Q ليس لهَا أصفَار حقيقيّة

٢) لنفتض أنّ $dP + 1 \leq dQ$ و لتكن $\alpha > 0$ بيّن أنّ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}dx$ متقَاربة إِلَّا أنّ $\frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}$ ليست عَادة قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ و أنّ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}dx = 2i\pi\sum_{Q(a_j)=0, \mathcal{I}m(a_j)>0}\mathcal{R}es(\frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)}, a_j)$$

أوجد قيمة $\int_0^{\infty}\frac{cost dt}{t^2+1}$

٣) لنفترض أنّ $dP + 2 \leq dQ$ بيّن أنّ $\frac{P(x)Log|x|}{Q(x)}$ قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ و أوجد طريقة لحسَاب $\int_0^{\infty}\frac{P(x)Log|x|}{Q(x)}dx$ و $\int_0^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

٤) بين أنّ $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$ متقَاربة و أنّ $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ هل $\int_0^\infty \frac{cosx}{x}dx$ متقَاربة

تمرين

تأكد من تقَارب كلّ التّكَاملَات الوَاردة في هذَا التّمرين

١) بيّن أنّه لكلّ $0 < a < 1$ فإِنّ

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{sina\pi}$$

٢) بيّن أنّ $\int_0^\infty \frac{Logx}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$ و أنّه لكلّ $0 < a$ $\int_0^\infty \frac{cosax}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4}$

ليكن γ_n المستطيل المعرّف بقمَمه $n(1+i)+\frac{1}{2}, n(-1+i)-\frac{1}{2}, n(-1-i)-\frac{1}{2}, n(1-i)+\frac{1}{2}$

٣) بيّن أنّ لكلّ $a \not\ni \mathbb{Z}$ فإِنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\frac{\pi}{(z+a)^2}cot\pi z dz = 0$$

و إستنتج $\frac{\pi^2}{sin^2 a\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$

٤) بيّن أنّ لكلّ $a \not\ni \mathbb{Z}$ فإِنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\frac{\pi}{z^2-a^2}cot\pi z dz = 0$$

و إستنتج أنّ $\pi cot\pi a = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و $a_1,...a_n$ هي جميع أصفَار f بحيث a_1 هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m_1 ، ... و a_n هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m_n و ليكن γ قوس مغلق من $\Omega\setminus\{a_1,..,a_n\}$ بحيث كلّ $z \not\ni \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ فإِنّه

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^n m_j Ind(\gamma,a_j)$$

برهَان

نلَاحظ أنّ $\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{z-a_j}$ تحليليّة علَى كَامل Ω بمَا أنّه كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ فإِنّه

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{z-a_j})dz = 0$$

إِذًا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} m_j Ind(\gamma, a_j)$$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و a صفر لِلدَّالة f من الرتبة $m > 0$ فإنّه توجد $\delta > 0$ و $\epsilon > 0$ بحيث لكلّ $\omega \in \mathbb{C}$ و $|\omega| < \delta$ الدَّالة $f - \omega$ لهَا m أصفَار بسيطة دَاخل $B(a,\epsilon)$

برهَان

بمَا أنّ أصفَار ff' معزولة فإِنّه توجد $\epsilon > 0$ بحيث a هو الصّفر الوحيد لِلدَالة ff' الموجود دَاخل $\overline{B(a,\epsilon)}$ الدَّالة $|f|$ تصل إِلَى قيمتهَا الصّغرَى علَى المتَراص $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| = \epsilon\}$ لنسمّي هذه القيمة الصّغرَى $\delta = \inf_{\{z\in\mathbb{C},|z-a|=\epsilon\}} |f(z)|$ لنَا $\delta > 0$ الدَّلة

$$k : w \to \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z) - w}dz$$

من تعريفهَا تحليليّة علَى $B(0,\delta)$ وقيمهَا صحيحة لأنّهَا من النّظريّة السَّابقة تمثّل $k(w)$ عدَد أصفَار $z \to f(z) - w$ الموجود دَاخل $\overline{B(a,\epsilon)}$ إِذًا k تكون ثَابتة علَى $B(0,\delta)$ ينتج أنّ $k(w) = k(0) = m$ كلّ أصفَار $z \to f(z) - w$ تكون بسيطة لأنّ $(f-w)' = f'$ ليس لهَا أصفَار دَاخل $B^*(a,\epsilon)$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و غير ثَابتة فإِنّ الدَّالة f تكون مفتوحة

برهَان

ليكن ω مفتوح من Ω و $\xi \in f(\omega)$ يوجد $a \in \omega$ بحيث $f(a) = \xi$ بمَا أنّ f غير ثَابتة لتكن $m \geq 1$ رتبة a كصفر لِلدَّالة $(f - \xi)$ من النّظريّة السَّابقة فإِنّه توجد $\delta > 0$ و $\epsilon > 0$ بحيث لكلّ $x \in \mathbb{C}$ و $|x| < \delta$ الدَّالة $f - \xi - x$ لهَا m أصفَار بسيطة دَاخل $B(a,\epsilon) \subset \omega$ إِذًا $B(\xi,\delta) \subset f(\omega)$ و من ثمّ $f(\omega)$ مفتوح من $\mathbb{C}$

نتيجة

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و هي تبَاين فإِنّ $f : \Omega \to f(\Omega)$ يكون تقَابل بين نطَاقين و يكون معكوسه تحليليّ

برهَان

من النّظريّة السَّابقة يكون $f(\Omega)$ مفتوح إِذًا $f : \Omega \to f(\Omega)$ يكون تقَابل تحليلي بين نطَاقين بمَا أنّ f

مفتوحة فإنّ معكوسه f^{-1} متّصلة و هو تحليليّ

تعريف

نقول أنّ f دَالة مرومرفيّة علَى مفتوحٍ $\Omega \subset \mathbb{C}$ إذَا و فقط إذَا وجدت مجموعة $G \subset \Omega$ بحيث f تكون تحليليّة علَى $\Omega \setminus G$ و كلّ نقطة من G تكون قطبًا لِلدَّالة f .

مثَال

علَى نطَاق Ω لتكن g دَالة تحليليّة ليست صفريّة و f دَالة تحليليّة فإنّ $\frac{f}{g}$ تكون مرومرفيّة $(G = \{z \in \Omega, g(z) = 0\})$ و يمكن أن نبرهن أنّ كلّ دَالة مرومرفيّة تكتب علَى هذَا الشكل أي كسر لدَالتين تحليليّتين

نظرية

لتكن g دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و f دَالة مرومرفيّة علَى Ω و لتكن $z_1, .., z_n$ جميع أصفَار f و $m_1, ..., m_n$ هي بتّرتيب رتب هذه الأصفَار و لتكن $p_1, .., p_s$ جميع أقطَاب f و $k_1, ..., k_s$ هي بتّرتيب درجَاتها و لتكن γ قوس من $\Omega \setminus \{z_1, .., z_n, p_1, ..p_s\}$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقِّق $Ind(\gamma, z) = 0,$ فإنّه

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} m_j g(z_j) Ind(\gamma, z_j) - \sum_{j=1}^{s} k_j g(p_j) Ind(\gamma, p_j)$$

برهَان

من تعريف الرّتب نلَاحظ أنّ

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{g(z_j)}{z - z_j} + \sum_{j=1}^{s} k_j \frac{g(p_j)}{z - p_j}$$

تكون تحليليّة علَى كَامل Ω بمَا أنّ γ قوس من $\Omega \setminus \{z_1, .., z_n, p_1, ..p_s\}$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقِّق $Ind(\gamma, z) = 0,$ فإنّه

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{g(z_j)}{z - z_j} + \sum_{j=1}^{s} k_j \frac{g(p_j)}{z - p_j} dz = 0$$

إذًا

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} m_j g(z_j) Ind(\gamma, z_j) - \sum_{j=1}^{s} k_j g(p_j) Ind(\gamma, p_j)$$

ملَاحظة

إِذَا وضعنَا $Z(f,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} m_j Ind(\gamma, z_j)$ و $P(f,\gamma)=\sum_{j=1}^{s} k_j Ind(\gamma, p_j)$ فعندمَا تكون $g=1$ نتحصّل علَى

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)$$

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٣ رمضَان ١٤٢٤

تحليل مركب

التمرين الَاول

لتكن $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ دَالة متّصلة تحقّق $h(0)=0$ و لنعرّف

$$A=\{x+ih(x); x\in[0,+\infty[\}$$

١) بيّن أنّ A جزء متّرابط غير محدود

٢) إِستِنتج أنّه يوجد علَى $\mathbb{C}\setminus A$ تعيِين متّصل φ لِلوغَاريتم أوجد القيمة الحقيقيّة $Re\varphi$ و المشتقة φ'

٣) بيّن أنّه لكلّ $x_0>0$ يوجد مستطيل اضلَاعه موَازية لِلمحَاور و تقَاطعه مع A يحتوي فقط علَى $x_0+ih(x_0)$

٤) بين أنّ $Im\varphi$ لَا يمكن تمديده كدَالة متّصلة علَى $(\mathbb{C}\setminus A)\bigcup\{x_0+ih(x_0)\}$

٥) بيّن أنّ $O=\phi(\mathbb{C}\setminus A)$ هو نطَاق بسيط التّرَابط

التمرين الثَّاني

لتكن f دَالة كليّة غير ثَابتة لكلّ $r>0$ نعرّف $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$

١) بيّن أنّ M متصَاعدة قطعًا

٢) بيّن أنّ $\sup_{|z|=1}|f^{(n)}(z)|\leq n!M(2)$

لنفترض فَي بَاقي التّمرين أنّ $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

٣) بيّن أنّ $M(1)\geq 1$ و أنّه إِن كَان $M(1)=1$ فإِنّ $\forall r>0, M(r)=r$

٤) بيّن أنّه

$$\forall z\in\mathbb{C}, |f(z)|\geq |z|-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}|z|^n$$

٥) إِستنتج إِذَا كَان $|z|=\frac{1}{4M(1)}$ فإِنّ $|f(z)|\geq\frac{1}{6M(1)}$

التمرين الثّالث

لتكن f دَالة كليّة $entire$ أي تحليليّة في كَامل المركب و a,b عدَدين مركّبين مختلفين

١) بين أنّه

$$\forall R > \sup(|a|,|b|), \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$$

٢) إستنتج أنّ كلّ دَالة كليّة و محدودة تكون ثَابتة

التمرين الرَابع

لتكن f دَالة كليّة بحيث

$$\exists n\in\mathbb{N}, \exists M>0, \exists R>0, \qquad \forall |z|>R; \qquad |f(z)|\le M|z|^n$$

بين أنّ f هي كثيرة حدود من درجة أقل أو تسَاوي n .

ألتمرين الخَامس

لتكن f دَالة كليّة تحقّق $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|f(z)| = +\infty$.

١) بين أنّه يوجد $z_0\in\mathbb{C}$ بحيث $f(z_0)=0$.

٢) بين أنّ عدَد أصفَار f متنهِى .

٣) بين أنّه يوجد كثيرة حدود $P\in\mathbb{C}[X]$ بحيث الدَّالة $g=\dfrac{P}{f}$ تمدَّد كدَالة تحليليّة علَى كَامل $\mathbb{C}$.

٤) إستنتج أنّ f كثيرة حدود.

ألتمرين السَادس

بين أنّ صورة $\mathbb{C}$ بدَالة كليّة غير ثَابتة f يكون كثيف فِى $\mathbb{C}$. ($\forall a\notin f(\mathbb{C})$ ندرس $\frac{1}{f(z)-a}$.

ألتمرين السَابع

١) أوجد كلّ الدّوَال التّحليليّة f علَى $D(0,1)$ التى تحقّق $f(\dfrac{1}{n})=1$ ، $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

٢) هل تبقَى النّتيجة التى وصلت إلِيهَا صَالحة إن عوّضت $D(0,1)$ بالمجموعة $D(0,1)\setminus\{0\}$

التمرين الثّامن

ليكن $R>1$ و f دَالة تحليليّة علَى $D(0,R)$.

١) بيّن أنّ

$$\forall a\in D(0,1), f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+(0,1)} f(z)[\frac{1}{z-a}+\frac{\bar a}{1-\bar a z}]dz$$

.

٢) إستنتج

$$\forall r<1,\ \ f(re^{iu})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-u)+1}dt$$

٣) إستنتج $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-u)+1}dt=1$

٤) لنعتمد القيمة الحقيقيّة U لِلدّالة f حيث $f=U+iV$ و لتكن $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt+iV(0)$ ·

بيّن أنّ g دَالة تحليليّة علَى $D(0,1)$ و أنّ $U=Re(g)$ وكذلك $f=g$ على $D(0,1)$ ·

ألتمرين التّاسع

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و f دَالة تحليليّة علَى Ω و ليكن $R>0$ بحيث $\overline{D(a,R)}\subset\Omega$ ·

١) بيّن أنّ $Re(f)$ لَا تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى و لَا الصّغرَى فِى نقطة من $D(a,R)$ إِلّا إِذَا كَانت f ثَابتة· (يمكن أن نستعمل مبدَأ القيمة العظمَى لِلدَّالة e^f)·

٢) لنفترض أنّ $(|z-a|=R)\Rightarrow(f(z)=\overline{f(z)})$ بيّن أنّ f ثَابتة علَى Ω ·

ألتمرين العَاشر

ليكن $R>0$ و لتكن f دَالة تحليليّة و غير ثَابتة علَى $D(0,R)$ لكلّ $r<R$ ليكن $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$

١) بيّن أنّ M تكون متصَاعدة و متّصلة علَى $]0,R[$ ·

٢) بيّن أنّه إِن وجد $0<r<R$ بحيث $\theta\longrightarrow|f(re^{i\theta})|$ تكون ثَابتة و $f(z)\neq0$ لكلّ $|z|<r$ فإِنّ f تكون ثَابتة علَى $D(0,R)$ ·

ألتمرين الحَادَى عشر

تمهيديّة شوَارتز $(Lemme\ de\ SCHWARTZ)$

لتكن f دَالة تحليليّة علَى $D(0,1)$ تحقّق

$$f(0)=0;\qquad \forall z\in D(0,1),\ \ |f(z)|\leq1$$

١) بيّن أنّ $\forall z\in D(0,1),\ \ |f(z)|\leq|z|$ و $|f'(0)|\leq1$ ·

٢) إستنتج أنّه إِن كَان $|f'(0)|=1$ ، أو إِن وجد $z_0\in D(0,1)$ يحقّق $|f(z_0)|=|z_0|$ فإِنّ $f(z)=\lambda z,\forall z\in D(0,1)$ حيث $|\lambda|=1$

التمرين الثّانِى عشر

١) بيّن أنّ كلّ تقَابل تحليلي $f : D(0,1) \to D(0,1)$ يثبّت 0 يكتب $f(z) = \lambda z$ ، حيث $|\lambda| = 1$.

٢) بيّن $\forall a \in D(0,1)$ ، اَلدَّالة h_a المعرّفة حسب $h_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \bar{a}z}$ هي تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$. أوجد معكوسهَا

٣) بيّن أنّ كلّ تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$ هو من شكل λh_a حيث $|\lambda| = 1$ و $|a| < 1$

٤) بيّن أنّ كلّ دَالة تحليلية $f : D(0,1) \to D(0,1)$ تثبّت نقطتين تحقّق $f(z) = z$ ، $\forall z \in D(0,1)$ (أدرس $h_a \circ f \circ h_a$)

اَلتمرين الثَّالث عشر

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ ، $z_0 \in \Omega$ ، $r > 0$ بحيث $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ و f دَالة تحليليّة علَى Ω .

١) لنفترض أنّ $|f(z_0)| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt$. بيّن أنّ f تكون ثَابتة علَى Ω .

٢) لتكن $f_1, f_2, ..., f_n$ دوَال تحليليّة علَى Ω و $g(z) = |f_1(z)| + |f_2(z)| + ...|f_n(z)|$

ا) بيّن أنّ $g(z_0) \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it}) dt$ و المسَاوَات لَا تحدث فَى المتبَاينة السَّابقة إلَّا إذَا كَانت كلّ الدّوَال f_i ثَابتة.

ب) مَا نقول عن f_i إن وصلت g إلَى قيمتهَا العظمَى دَاخل Ω

ج) لنفترض أنّه توجد دَالة $f \neq 0$ تحليليّة علَى Ω بحيث $|f(z)| = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |f_i(z)|$ ، $\forall z \in \Omega$

اَ) بيّن أنّه إن وجد $a \in \Omega$ يحقّق $f(a) = 0$ فإنّ $f_i(a) = 0$ ، $\forall i = 1, 2, ..., n$

قَارن بين رتبة a كصفر لِلدَالة f و رتبة a كصفر لِلدَالة f_i

ب) بيّن أنّه يوجد دوَال تحليليّة h_i علَى Ω بحيث $h_i f = f_i$.

ج) بيّن أنّ الدّوَال h_i تكون ثَابتة.

اَلتمرين الرَّابع عشر

لتكن h دَالة توَافقيّة علَى $\mathbb{C}$ غير ثَابتة.

١) بيّن أنّ h تسَاوَى الجزء الحقيقي لدَالة كليّة.

٢) إستنتج أنّ f غير موجبة

٣) بيّن أنّ $h(\mathbb{C})$ هو فترة من $\mathbb{R}$ و إستنتج أنّ h شَاملة *surjective* .

٤) بيّن أنّه لكلّ مفتوح محدود Ω ذِى حدود $\partial\Omega$ مترَابطة يحقّق $h(\bar{\Omega}) = h(\partial\Omega)$.

٥) بيّن أنّ $Log(|z-a|)$ تكون توَافقيّة علَى $D(0,|a|)$ · إستنتج $\forall(z,r)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}_+^*,$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Log|z-re^{it}|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Log|r-|z|e^{it}|dt = \sup\{Log(|z|), Log(r)\}$$

٦) هل الدَّالة $Log|z|$ توَافقيّة علَى $\mathbb{C}^*$ · هل توجد دَالة تحليليّة f علَى $\mathbb{C}^*$ بحيث $Log|z| = Ref$ ·

كليّة العلوم بَالمنستير

إختبَار تحليل مركّب

الصّف الثّالث بكَالريوس الدورة الرّئِيسة ١٩٩٧

فِى سَاعتين ترجمة بتصرّف

التمرين الَاول

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و $z_0\in\Omega$ و $r>0$ بحيث $\bar{D}(z_0,r)\subset\Omega$ و لتكن f دَالة تحليليّة علَى Ω ·

١) بيّن أنّ $|f(z_0)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|dt$ ·

٢) لنفترض أنّ $|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|dt$ · بيّن أنّ f تكون ثَابتة فِى Ω ·

٣) بيّن أنّه يوجد $P\in\mathbb{C}[X]$ و دَالة h تحليليّة علَى Ω ليس لهَا أصفَار دَاخل $D(z_0,r)$ بحيث $f=Ph$ علَى Ω ·

٥) إستنتج وجود دَالة h_1 تحليليّة علَى $D(z_0,r)$ بحيث $f=P.exph_1$ علَى $D(z_0,r)$

٦) هل يوجد $P\in\mathbb{C}[X]$ و دَالة h تحليليّة علَى $\mathbb{C}^*$ بحيث

$$\forall z\in\mathbb{C}^*; \frac{1}{z}=P(z)exph(z)$$

التمرين الثَّاني

لتكن f دَالة تحليليّة علَى $\mathbb{C}$ غير ثَابتة·

١) بيّن أنّ مجموعة النّقَاط $a\in\mathbb{C}$ بحيث $f+a$ لهَاصفر من رتبة أكبر أو يسَاوي 2 فِى $D(0,1)$ هي مجموعة متنهية ·

٢) لنفترض أنّ $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$ ·

أَ) بيّن أنّ 0 هو قطب لِلدَالة $f(\frac{1}{z})$ و إستنتج أنّ $f \in \mathbb{C}[X]$ ·

ب) بيّن وجود متَرَاص $K \subset \mathbb{C}$ يحقّق $\forall a \in D(0,1)$ أصفَار $P + a$ تكون فَى K ·

٣) ليكن z_0 صفر لِلدَالة f من رتبة $k > 0$ ·

أَ) بين وجود $r > 0$ بحيث z_0 هو الصفر الوحيد لِلدَالة ff' الموجود دَاخل $\bar{D}(z_0, r)$ ·

ب) ليكن $t = inf_{|z-z_0|=r}|f(z)|$ بين $\forall a \in D^*(0,t)$ الدَّالة $f + a$ لهَا بَالضبط k صفر بسيط فَى $\bar{D}(z_0, r)$ ·

٤) لتكن g دَالة تحليليّة علَى $\mathbb{C}$ ليس لهَا أصفَار·

أَ) لنفترض وجود $a \in D(0,1)$ بحيث $f + ag$ لهَا صفر ذو رتبة 2 فَى $D(0,1)$ · بيّن وجود $\epsilon > 0$ بحيث $\forall a' \in \mathbb{C}$ تحقّق $0 < |a - a'| < \epsilon$ الدَالة $f + a'g$ ليس لهَا أصفَار غير بسيطة فَى $D(0,1)$ ·

ب) بيّن أنّ المجموعة النّقَاط $a \in \bar{D}(0,1)$ التي تحقّق $f + ag$ لهَا صفر غير بسيط فَى $D(0,1)$ هي مجموعة متهية ·

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٩ ذو الحجّة ١٤٢٩

الَاختبَار الفصلَى الأوّل تحليل مركّب في سَاعتين

التمرين الَاول

١) مَا هو نصّ و برهَان نظريّة مفكوك تَايلور لدَالة صحيحة f · و إستنتج متبَاينَات كوشي الّتي تربط بين $|f^{(n)}(a)|$ و $\sup_{|z-a|=r} |f(z)|$

٢) مَا هو نصّ و برهَان النّظريّة الَاسَاسيّة في الجبر·

٣) ليكن $P = \{x + iy \in \mathbb{C}, x > 0\}$ أوجد صيغة جميع التقَابلَات التّحليلية h من $D(0,1)$ إلَى P الّتي تحقّق $h(0) = 1$

التمرين الثّاني

لتكن f دَالة صحيحة و غير ثَابتة لكلّ $r > 0$ نعرّف $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$

١) بيّن أنّ $r \to M(r)$ متّصلة و متصَاعدة قطعًا علَى $]0,\infty[$

٢) بيّن أنّ $\sup_{|z|=1} |f^{(n)}(z)| \leq n!M(2)$

٣) لنفترض أنّ $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ بيّن أنّ $M(1) \geq 1$ و أنّه إن كَان $M(1) = 1$ فإنّ $\forall r > 0, M(r) = r$

٤) لنفترض أنّه

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists M > 0, \exists R > 0, \qquad \forall |z| > R; \quad |f(z)| \leq M|z|^n log|z|$$

بين أنّ f هي كثيرة حدود من درجة أقل أو تسَاوي n و هي شَاملة

التمرين الثَّالث

ليكن $A := \{-1 + it, t \in [0,\infty[\} \cup [-1,0]$.

١) صوّر A و بيّن أنّ A مغلق و مترَابط و غير محدود

٢) إستنتج أنّه يوجد علَى $\mathbb{C} \setminus A$ تعيين متّصل وحيد لِلوغَارتم ϕ يحقّق $\phi(i) = i\frac{\pi}{2}$.

٣) أوجد $Im\phi(\mathbb{C} \setminus A)$ حيث $Im\phi$ هي القيمة التخيّليّة لِلدَالة ϕ .

٤) هل توجد علَى $\mathbb{C} \setminus A$ دَالة تحليليّة محدودة و غير ثَابتة و إستنتج أنّ كلّ دَالة صحيحة $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus A$ تكون ثَابتة.

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٨ رمضَان ١٤٢٤

الَاختبَار الفصلَى الأوّل تحليل مركّب

التمرين الَاول ذكرنَا أنّ إحدَى برَاهين كنوَاي $Conway$ كَانت نَاقصة

١) أورد الطَريقة التّى أصلحنَا بهَا هذَا النقص

٢) لتكن f دَالة صحيحة و $a \neq b$ عددين من $\mathbb{C}$ أذكر صيغة كوشِى و بين أنّه

$$\forall R > \sup(|a|,|b|), \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

و إستنتج أنّ كلّ دَالة صحيحة و محدودة تكون ثَابتة

٣) لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دَالة صحيحة غير ثَابتة بحيث

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists M > 0, \exists R > 0, \qquad \forall |z| > R; \quad |f(z)| \leq M|z|^n$$

أذكر متبَاينة كوشِي و بين أنّ f هي كثيرة حدود من درجة أقل أو تسَاوي n و من ثمّ فهي شَاملة

التمرين الثّاني ليكن $A := \{1 + it, t \in [0, \infty[\} \cup [0, 1]$ ·

١) صوّر A و بيّن أنّ A مغلق و مترَابط و غير محدو

٢) بيّن أنّ دَليل كلّ قوس أملس قطعًا من $\mathbb{C} \setminus A$ بالنّسبة لكلّ نقطة من A يسَاوِى صفر ·

٣) إستنتج أنّه يوجد علَى $\mathbb{C} \setminus A$ تعيِين متّصل وحيد لِلوغَارتم ϕ يحقّق $\phi(i) = i\frac{\pi}{2}$ ·

٤) بيّن أنّ $Im\phi(3 + 3i) = \frac{9}{4}\pi$ · و إستنتج أنّ $Im\phi(\mathbb{C} \setminus A) =]0, \frac{5}{2}\pi[$ ·

٥) هل توجد علَى $\mathbb{C} \setminus A$ دَالة تحليليّة محدودة و غير ثَابتة و إستنتج أنّ كلّ دَالة صحيحة $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus A$ تكون ثَابتة·

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٧ - ١١ - ١٤٢٧

الاختبَار الفصلَى الأوّل تحليل مركّب

التمرين الاول

١) علَى نطَاق Ω بيّن كمَا في الدّرس أنّ أصفَار كلّ دَالة تحليليّة غير صفريّة تكون معزولة·

٢) إستنتج جميع الدّوَال التّحليليّة علَى $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ التي تحقّق $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n!$

٣) هل توجد دَوَال تحليليّة بجوَار 0 تحقّق $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = (n!)^2$ ·

٤) لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دَالة كليّة غير ثَابتة بحيث

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists M > 0, \exists R > 0, \qquad \forall |z| > R; \quad |f(z)| \leq M|z|^n log|z|$$

بين أنّ f هي كثيرة حدود من درجة أقل أو تسَاوي n و من ثمّ فهي شَاملة

التمرين الثّاني ليكن $A := \{2 - it, t \in [0, \infty[\} \cup [0, 2]$ ·

١) صوّر A و بيّن أنّ A مغلق و مترَابط و غير محدود

٢) أوجد دَليل كلّ قوس مغلق أملس قطعًا من $\mathbb{C} \setminus A$ بالنّسبة لكلّ نقطة من A ·

٣) إستنتج أنّه يوجد علَى $\mathbb{C} \setminus A$ تعيِين متّصل وحيد لِلوغَارتم ϕ يحقّق $\phi(i) = i\frac{\pi}{2}$

٤) أوجد $Im\phi(3 - 3i)$ · و إستنتج $Im\phi(\mathbb{C} \setminus A)$ ·

٥) بيّن أنّ $e^{i\phi}$ دَالة تحليليّة علَى $\mathbb{C}\setminus A$ و محدودة و إستنتج أنّ كلّ دَالة كلّية $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus A$ تكون ثَابتة.

ألتمرين الثَّالث ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و f دَالة تحليليّة علَى Ω و ليكن $R>0$ بحيث $\overline{B(a,R)}\subset\Omega$. لكلّ $r<R$ ليكن $|f(z)|$ $M(r)=\sup_{|z-a|=r}|f(z)|$

١) أورد كمَا جَاء في الدّرس نصّ و برهَان مبدَإ القيمة العظمَى بيّن أنّ $M(r)$ تكون متصَاعدة و متّصلة علَى $]0,R]$.

٢) بيّن أنّه إن كَانت $\theta\longrightarrow|f(a+Re^{i\theta})|$ ثَابتة علَى $\mathbb{R}$ و $f(z)\neq 0$ لكلّ $z\in B(a,R)$ فإنّ f تكون ثَابتة علَى Ω. (يمكن تطبيق القيمة العظمَى علَى f و $\frac{1}{f}$)

٣) لنفترض أنّ $(|z-a|=R)\Rightarrow(f(z)=\overline{f(z)})$ بيّن كمَا في الدّرس أنّ f ثَابتة علَى كَامل Ω .

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٩ ربيع الثَّاني ١٤٢٤

تحليل مركب الَاختبَار النّهَائي في سَاعتين

التمرين الَاول

١) ليكن $z=x+iy$,$x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$ ، أوجد القيمة الحقيقية و القيمة التخيلية لِلدَالة $f(z)=e^{(\frac{1}{2-x-iy})}$. و أوجد $|f(z)|$ أين تكون الدَالة f تحليلية.

٢) أوجد النّقَاط الشَاذة لِلدَّالة $g(z)=f(z)(z-2)$ مَا طبيعتهَا و البَاقي فيهَا.

٣) أوجد قوسًا γ_r املس تكون صورته

$$\{(x+iy)\in\mathbb{C},y\geq 0,x\geq 1,(x-1)^2+y^2=r^2\}$$

و استنتِج قيمة $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{g(z)}{(z-1)}dz$

التمرين الثَاني

١) مَا هو نصّ و برهَان النّظريّة الَاسَاسيّة في الجبر

٢) بيّن إن كَانت f صحيحة فإنّ $|f|$ تحقّق مبدء القيمة العظمَى

٣) بيّن إن كَانت f صحيحة و مغَايرة لصفر فإنّ جذورهَا تكون منعزلة

٤) بالإعتمَاد علَى e^z أوجد جميع الدّوَال الصّحيحة h بحيث $\forall n \in \mathbb{N}, h^{(n)}(0) = 1$

التمرين الثَالث

أوجد قيمة التّكَاملَات التَّالية

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cost}{1+t+t^2} dt$ و $\int_0^{\infty} \frac{cost}{(1+t^2)^2} dt$