# - حل التمارين -

**تمرين 1 - الأخطاء وتمثيل الأرقام**

**نفرض أن العدد $x>0$ قد تم تمثيله بصيغة النقطة العائمة مع $n$ موضع ثنائي ونفرض أنه استخدم القطع في التقريب للوصول للعدد $fl(x)$**

**أ- اثبت(ي) أن $0 \le x - fl(x) \le 2^{e-n+1}$**

**ب- اثبت(ي) أنه إذا كان $x \ge 2^e$ وأن (أ) صحيحة فإن: $0 \le \frac{x-fl(x)}{x} \le 2^{-n+1}$**

**ج- أعط(ي) حدودا للخطأ النسبي في تمثيل النقطة العائمة للعدد الثنائي $fl(x)$ عندما $x \ge 2^e$**

## الحل :

أ- $x = \sigma . \overline{x} . 2^e$

حيث $\overline{x} = (1, a_2, \dots a_n a_{n+1} \dots)$

*إذا كان تمثيل* $x$ *بصيغة النقطة العائمة مع* $n$ *موضع ثنائي هو* $fl(x) = \sigma(1, a_2, \dots a_n) \times 2^e$

*فإن* $x - fl(x) = \sigma(0,0, \dots 0, a_{n+1} \dots) \times 2^e$

$$x - fl(x) = (0,0, \dots 0 a_{n+1}, a_{n+2}, \dots) \times 2^e$$

$$x - fl(x) = 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots \times 2^{e-n+1}$$

*بما أن* $0 < 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots < 1$ فإن $0 \le x - fl(x) \le 2^{e-n+1}$

ب- إذا كان $x \ge 2^e$ فإن $\frac{1}{x} \le 2^{-e}$ ونحصل إذا على :

$$0 \le \frac{x - fl(x)}{x} \le 2^{-e} \times 2^{e-n+1}$$

$$0 \le \frac{x - fl(x)}{x} \le 2^{-n+1}$$

ج- حدود الخطأ النسبي معطاة بالمتباينة : $\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \le 2^{-n+1}$

**تمرين 2 - التقريب بكثيرات حدود تايلور**

**أ- أوجد(ي) كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الدرجة n بالقرب من $x = 2$ للدالة: $f(x) = \ln(x)$**

**ب- اوجد(ي) صيغة الخطأ $R_n(x)$ عند تقريب $f(x)$ ب $P_n(x)$ .**

**ج- احسب(ي) درجة التقريب n التي يلزم الوقوف عندها عند تقريب العدد $\ln(2.1)$ بالعدد $P_n(2.1)$ ليكون الخطأ في حدود $10^{-6}$.**

الحل :

أ- باستخدام نظرية التقريب بكثيرات حدود تايلور يمكن أن نكتب

$$f(x) = \ln(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \ \ldots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$f(x) = ln(x) \quad , f'(x) = \frac{1}{x} \ , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \ , \quad \ldots \ , \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad k \geq 1$$

$$P_n(x) = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$$

$$P_n(x) = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k k!}(x-2)^k$$

$$P_n(x) = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k.2^k}(x-2)^k$$

ب-

$$f(x) = ln(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \ , \ c_x \in (x,2) \ or \ c_x \in (2,x)$$

$$R_n(x) = \frac{\frac{(-1)^n n!}{{c_x}^{n+1}}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \ , \ c_x \in (x,2) \ or \ c_x \in (2,x)$$

$$= \frac{(-1)^n}{{c_x}^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1}$$

ج-

$$\ln(2.1) = P_n(2.1) + R_n(2.1)$$

$$R_n(2.1) = \frac{(-1)^n}{{c_x}^{n+1}(n+1)}(2.1-2)^{n+1} \ , c_x \in (2,2.1)$$

$$|R_n(2.1)| = \frac{1}{{c_x}^{n+1}(n+1)}(0.1)^{n+1}$$

$$2 < c_x < 2.1 \Rightarrow {c_x}^{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |R_n(2.1)| < \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}(0.1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_n(2.1)| < \frac{(0.05)^{n+1}}{(n+1)}$$

للحصول على خطأ لا يتعدى $10^{-6}$ يكفي أن يتحقق $\frac{(0.05)^{n+1}}{(n+1)} < 10^{-6}$

عندما $n = 3$ فإن $\frac{(0.05)^{n+1}}{(n+1)} = 1.56 \times 10^{-6}$ وهذا لا يكفي ليكون خطأ التقريب أقل من $10^{-6}$

عندما $n = 4$ فإن $\frac{(0.05)^{n+1}}{(n+1)} = 6.25 \times 10^{-8}$ وهذا يكفي لتحقق $|R_n(2.1)| < 10^{-6}$.

إذا درجة التقريب n المطلوبة هي $n = 4$.

**تمرين 3 - الحل العددي للمعادلات الغير الخطية**

**لنفرض المعادلة :** $\mathbf{f(x) = x^3 - 2 = 0}$

**أ- استخدم(ي) طريقة التنصيف وطريقة الموضع الزائف (توقف(ي) عند التقريب الثالث) لإيجاد تقريب لحل المعادلة المعطاة وضع(ي) النتائج في جدول**

**ب- أوجد(ي) نطاقا للتقارب لمتتابعة نيوتن للمعادلة المعطاة واحسب(ي) تقريبا للجذر الموجب .**

الحل :

أ- المعادلة المعطاة لها حل $\alpha$ على الفترة . (1,2). الجدول التالي يحتوي على تقريب الحل باستخدام طريقة التنصيف وطريقة الموضع الزائف.

طريقة التنصيف

| a | b | f(a) | f(b) | $c_1 = \frac{a+b}{2}$ | $f(c_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | -1 | 6 | 1.5 | 1.375 |
| 1 | 1.5 | -1 | 1.375 | 1.25 | -0.04 |
| 1.25 | 1.5 | -0.04 | 1.375 | 1.375 | 0.6 |
| 1.25 | 1.375 | -0.04 | 0.6 | 1.3125 | |

طريقة الموضع الزائف

| a | b | f(a) | f(b) | $c_2 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ | $f(c_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | -1 | 6 | 1.1428 | -0.5 |
| 1.1428 | 2 | -0.5 | 6 | 1.2097 | -0.23 |
| 1.2097 | 2 | -0.23 | 6 | 1.2388 | -0.1 |
| 1.2388 | 2 | -0.1 | 6 | 1.2512 | |

ب- طريقة نيوتن : الصيغة التتابعية: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 \in I \end{cases}$

بفرض : $M = \frac{M_2}{2m_1}$ حيث $m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$ و $M_2 = max_{x \in I} |f''(x)|$ فإن الشرط التالي يمكن أن يكون شرطا للتقارب :

اختيار $x_0$ حيث $M|x_0 - \alpha| < 1$

المعادلة لها جذر في الفترة (1,2) . لنفرض مبدئيا أن $I = [1,2]$

$$f(x) = x^3 - 2 \quad , \quad f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f''(x) = 6x$$

$m_1 = \min_{x\in I}|f'(x)| = 3 \quad M_2 = max_{x\in I}\,|f''(x)| = 12$

نحصل اذا على قيمة $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{12}{6} = 2$ ويكون شرط التقارب $|x_0 - \alpha| < 1/2$

لتحقق الشرط يمكن استخدام طريقة التنصيف للحصول على نطاق يكون طوله أقل من $\frac{1}{2}$ . لنفرض النطاق $I_1 = [1.25\ ;\ 1.5]$

لكل $\forall\, x_0 \in I_1 :\ |x_0 - \alpha| < 1/2$ وبالتالي متتابعة نيوتن تتقارب نحو الجذر $\alpha$

**تمرين 4 - الحل العددي للمعادلات الغير الخطية**

**لتكن الدالة $\mathbf{f(x) = e^{2x} - 2}$ .**

**1- اثبت(ي) أن الدالة $\mathbf{f(x)}$ لها جذر في الفترة $[\mathbf{0, 1}]$.**
**2- أكتب(ي) الصيغة التتابعية لطريقة نيوتن .**
**3- أوجد(ي) نطاق التقارب لتتابع نيوتن.**

**<u>الحل</u>**

1- الدالة $f(x)$ متصلة على $[0,1]$ و $\begin{cases} f(0)=-2<0 \\ f(1)=e^2-2>0 \end{cases}$ اذا المعادلة $f(x) = 0$ لهل جذر في الفترة $[0,1]$

2- الصيغة التتابعية: $\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 \in I \end{cases}$ حيث $I$ نطاقا للتقارب

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{2x_k} - 2}{2e^{2x_k}}$$

3- لنفرض أن $I = [0,1]$

الشرط: اختيار $x_0$ حيث $M\,|x_0 - \alpha| < 1$ يكفي لأن يكون شرطا للتقارب

$M = \frac{M_2}{2m_1}$ حيث $m_1 = \min_{x\in I}|f'(x)|$ و $M_2 = max_{x\in I}\,|f''(x)|$

$f''(x) = 4e^{2x} \quad , \quad f'(x) = 2e^{2x} \quad , \quad f(x) = e^{2x} - 2$

$m_1 = \min_{x\in I}|f'(x)| = 2 \quad M_2 = max_{x\in I}\,|f''(x)| = 4e^2$

نحصل اذا على قيمة $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{4e^2}{2*2} = e^2$ ويكون شرط التقارب $|x_0 - \alpha| < \frac{1}{e^2} \simeq 0.27$

يمكن استخدام طريق التنصيف للحصول على نطاق للتقارب يحوي الجذر $\alpha$ وطوله لا يتعدى $\frac{1}{e^2} \simeq 0.27$.

$$f\left(\frac{0+1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = e^1 - 2 > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(0\,;\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$$

يمكن اذا أن نأخذ النطاق $I_1 = \left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$ كنطاق لتقارب تتابع نيوتن.

**تمرين 5 - الحل العددي للمعادلات الغير الخطية**

**لنفرض المعادلة التالية : $f(x) = x^2 - 2 = 0$**

**أوجد(ي) نطاق التقارب لمتتابعة نيوتن للمعادلة المعطاة واحسب(ي) التقريب الثاني للجذر الموجب $(\alpha = \sqrt{2})$**

**الحل:**

الدالة f(x) متصلة على [1,2] و $\begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(2)=2>0 \end{cases}$ اذا المعادلة $f(x) = 0$ لهل جذر في الفترة [1,2]

لنفرض أن $I = [1,2]$

الشرط: اختيار $x_0$ حيث $|x_0 - \alpha| < 1$ M يكفي لأن يكون شرطا للتقارب

$M = \frac{M_2}{2m_1}$ حيث $m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$ و $M_2 = max_{x \in I} |f''(x)|$

$f(x) = x^2 - 2$ , $f'(x) = 2x$ , $f''(x) = 2$

$m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)| = 2$ $M_2 = max_{x \in I} |f''(x)| = 2$

نحصل اذا على قيمة $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{2}{2*2} = \frac{1}{2}$ ويكون شرط التقارب $|x_0 - \alpha| < 2$

لكل $\forall x_0 \in [1,2] : |x_0 - \alpha| < 2$ وبالتالي متتابعة نيوتن تتقارب نحو الجذر $\alpha$

لنفرض $x_0 = 1$

من تتابع نيوتن:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$= x_k - \frac{{x_k}^2 - 2}{2x_k}$$
$$= \frac{{x_k}^2 + 2}{2x_k}$$
$$= \frac{1}{2}(x_k + \frac{2}{x_k})$$

$k = 0$ $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1.5$

$k = 1$ $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.4167$

**تمرين 6**

**أوجدي صيغة تكرارية باستخدام طريقة نيوتن لإيجاد قيمة كل من:** $\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}, \sqrt[n]{a}$

**ثم أوجدي قيمة كل منها عندما a=5, n=2 وذلك حتى دقة ثلاثة مواضع عشرية .**

## الحل:

العدد $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب للمعادلة $f(x) = x^n - a = 0$

باستخدام طريقة نيوتن يمكن تقريب الحل بالصيغة التتابعية التالية:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$= x_k - \frac{{x_k}^n - a}{n x_k^{n-1}}$$
$$= \frac{n{x_k}^n - {x_k}^n + a}{n x_k^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n}\left[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$$

- القيمة الابتدائية $x_0$ يقع اختيارها في نطاق يسمى نطاق التقارب.
- لتقريب $\sqrt{a}$ نستخدم التتابع السابق مع $n = 2$
- لتقريب $\frac{1}{\sqrt{a}}$ نستخدم التتابع السابق مع $n = -2$

عندما $a = 5\ ,\ n = 2$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left[x_k + \frac{5}{x_k}\right],\ x_0 = 1$$

يتم توقيف التكرار عندما نحصل على : $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$

$$k = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{5}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{1}\right) = 3$$

$$k = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{5}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = 2.3333$$

$$k = 2 \qquad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{5}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(2.3333 + \frac{5}{2.3333}\right) = 2.2381$$

$$k = 3 \qquad x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{5}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2.2381 + \frac{5}{2.2381}\right) = 2.2361$$

$$k = 4 \qquad x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{5}{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(2.2361 + \frac{5}{2.2361}\right) = 2.2361$$

-