واجب 3 - تحليل عددي- الفصل الدراسي الثاني 1436

المطلوب حل التمارين : 3 ، 4

تمرين 1

نفرض الدالة : $f(x) = e^{2x}$

أ- أوجد كثيرة حدود لاجرانج $P_2(x)$ **التي تستكمل الدالة عند النقاط :** $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}$

ب- أوجد(ي) حدود الخطأ عند تقريب $f(x)$ **ب** $P_2(x)$ **لأي نقطة** x **في الفترة** $[0, \frac{2}{3}]$

تمرين 2

نفرض الدالة $f(x) = \ln(x+1)$ **ولتكن** $P_3(x)$ **كثيرة حدود لاجرانج التي تستكمل الدالة عند النقاط :**

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{4}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{3}{4}$$

أوجد(ي) حدود الخطأ عند تقريب $f(x)$ **ب** $P_3(x)$ **لأي نقطة** x **في الفترة** $[0, \frac{3}{4}]$

تمرين 3

نفرض الدالة $f(x) = e^x$ **و النقاط** $x_0,\ x_1, \dots\ x_n$ **تقسيم منتظم للنطاق** $[0, 1]$ **. لتكن** $P_{1,i}(x)$ **كثيرة حدود لاجرانج الخطية التي تستكمل الدالة عند النقاط** $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$; $(x_i, f(x_i))$

أوجد(ي) عدد التقسيمات n **الكافية للحصول على خطأ لا يتعدى** 10^{-6}.

الحل

باستخدام نظرية حدود الخطأ في طريقة لاجرانج لاستكمال الدالة $f(x)$ عند النقاط $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$; $(x_i, f(x_i))$ على الفترة $[x_i, x_{i+1}]$ يمكن أن نكتب أن القيمة المطلقة للخطأ تحقق: $|R(x)| \le \max_{[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f''(x)|}{2!} \max_{[x_i,x_{i+1}]} |(x-x_i)(x-x_{i+1})|$

$$\max_{[x_i,x_{i+1}]} |(x-x_i)(x-x_{i+1})| = \frac{h^2}{4}\ ; \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x, \qquad f''(x) = e^x, \dots\dots$$

$$\max_{[x_i,x_{i+1}]} \frac{|f''(x)|}{2!} = \max_{[x_i,x_{i+1}]} \frac{e^x}{2!} = \frac{e^{x_{i+1}}}{2} \le \frac{e}{2}$$

نحصل اذا على $|R(x)| \le \frac{e}{2}\frac{h^2}{4} = \frac{e}{8n^2}$. يكفي أن نأخذ $\frac{e}{8n^2} \le 10^{-6}$ حتى يتحقق $|R(x)| \le 10^{-6}$

$$\frac{e}{8n^2} \le 10^{-6}$$
$$n^2 \ge \frac{e}{8} \times 10^6$$
$$n^2 \ge 3.4 \times 10^6$$
$$n \ge 582.9$$

تمرين 4 نفرض الدالة $f(x) = \sin(\pi x)$.

أ- أوجد(ي) كثيرة حدود لاجرانج $P_2(x)$ التي تستكمل الدالة عند النقاط : $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{2}$

ب- أوجد(ي) حدود الخطأ عند تقريب $f(x)$ ب $P_2(x)$ لأي نقطة x في الفترة $[0, \frac{1}{2}]$

الحل أ-

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	$Sin(\pi \times 0) = 0$	$Sin\left(\pi \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$Sin\left(\pi \frac{1}{2}\right) = 1$

كثيرة حدود لاجرانج $P_2(x)$ التي تستكمل الدالة عند النقاط x_i تكتب على الصورة:

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)} = 12\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} = -18x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} = 6x\left(x-\frac{1}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0 \times L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + 1 \times L_2(x) \\ &= -9x\left(x-\frac{1}{2}\right) + 6x\left(x-\frac{1}{6}\right) \\ &= -3x^2 + \frac{7}{2}x \end{aligned}$$

ب- باستخدام نظرية حدود الخطأ في طريقة لاجرانج لاستكمال الدالة $f(x)$ على الفترة $[x_0, x_2]$ يمكن أن نكتب أن القيمة المطلقة للخطأ تحقق:

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) = R_2(x) &= \frac{f'''(c)}{3!}\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), c \in [x_0, x_2] \\ &= \frac{f'''(c)}{3!}x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right), c \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x)$$

$$R_2(x) = \frac{-\pi^3\cos(\pi c)}{6}x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

وحيث أن $|\cos(\pi x)| \le 1\ \ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ فان: $|R_2(x)| = \frac{\pi^3}{6}x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

مثلا لو أخذنا $x = \frac{1}{3}$ فان: $\left|R_2\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{\pi^3}{6}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right| \cong 0.048$