التكامل المركب

1.1 القوس الأملس قطعاً

تعريف 1.1.1 نسمي قوس من $\mathbb{C}$ كل دالة $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ متصلة حيث $[a, b]$ فترة من $\mathbb{R}$, ونرمز لصورة القوس γ في $\mathbb{C}$ بالرمز γ^* . إذا كانت $\gamma'(t)$ موجودة لكل $t \in [a, b]$ و γ' متصلة فإن γ يسمى قوس أملس (*smooth path*). ونقول عن القوس المتصل γ بأنه أملس قطعاً (*pointwise smooth*) إذا وجدت تقسيمة $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ بحيث على الفترة (t_j, t_{j+1}) القوس γ يتساوى مع قوس أملس معرف على $[t_j, t_{j+1}]$. تسمى $\gamma(a)$ بداية القوس و $\gamma(b)$ نهايته. إذا كانت $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإن القوس γ يسمى قوس مغلق.

ملاحظة 1.1.2 المعني بقابلية اشتقاق الدالة γ عند أطراف الفترة $[a, b]$ هو وجود النهاية من جهة واحدة, أي أن

$$\gamma'(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}, \quad \gamma'(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{f(b+t) - f(b)}{t}$$

أمثلة 1.1.3 في ما يلي نعطي بعض الأمثلة على أقواس ملساء قطعاً.

• الدائرة التي مركزها $z_0 \in \mathbb{C}$ ونصف قطرها $r > 0$ والتي نرمز لها بالرمز $\gamma_{(z_0, r)}$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\gamma_{(z_0, r)} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = re^{it}$$

لاحظ أن القوس $\gamma_{(z_0, r)}$ أملس ومغلق.

• القطعة $[A, B]$ حيث A, B أعداد مركبة, تعطى بالعلاقة التالية

$$\gamma_{[A, B]} : [a, b] \rightarrow [A, B]$$

$$\gamma_{[A, B]}(t) = \frac{(b-t)A + (t-a)B}{b-a}$$

عندما $a = 0, b = 1$ فإن $\gamma_{[A, B]}(t) = (1-t)A + tB$.

• ليكن Γ معرف كما يلي:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} e^{it} & , 0 \leq t \leq \pi \\ \frac{2t-3\pi}{\pi} & , \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

نلاحظ أن Γ^* هو النصف العلوي لدائرة الوحدة اتحاد القطعة $[-1, 1]$ وبالتالي هو ليس بقوس أملس (لوجود انكسار عند $t = \pi$) ولكنه قوس أملس قطعاً ومغلق.

لاحظ أن تطابق صورتَي قوسين γ_1 و γ_2 لا يعني بالضرورة أن لهما نفس الخصائص. فعلى سبيل المثال إذا اعتبرنا الفترة $[0, 2\pi]$ فإن القوسين

$$\gamma_{(0,1)}(t) = e^{it}, \quad \gamma_{n(0,1)}(t) = e^{int}, n \in \mathbb{N}$$

لهما نفس الصورة على الرغم من أن $\gamma_{(0,1)}$ أحادية على الفترة $(0, 2\pi)$ بينما $\gamma_{n(0,1)}$ ليست كذلك. سنبين أثر هذا الاختلاف لاحقاً عندما ندرس دليل القوس المغلق والأملس قطعاً.

1.2 التكامل على القوس

تعريف 1.2.1 ليكن $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً فإن طول γ والذي نرمز إليه بالرمز L_γ هو

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

مثال 1.2.2 $L_{\gamma_{(0,1)}} = \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = 2\pi$ بينما $L_{\gamma_{n(0,1)}} = \int_0^{2\pi} |nie^{int}| dt = 2n\pi$

مثال 1.2.3 اعتبر القوس Γ كما في المثال 1.1.3, نجد أن

$$L_\Gamma = \int_0^\pi |ie^{it}| dt + \int_\pi^{2\pi} \left|\frac{2}{\pi}\right| dt = \pi + 2$$

تعريف 1.2.4 ليكن $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً و f دالة متصلة على γ^* فإن تكامل الدالة f على γ يعرف كالتالي

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

مثال 1.2.5 إذا كانت $f(z) = \frac{1}{z}$ و $r > 0$ فإن

$$\int_{\gamma_{(0,r)}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i$$

من ناحية أخرى نجد أن

$$\int_{\gamma_{n(0,r)}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{nit}} nire^{nit} dt = 2n\pi i$$

مثال 1.2.6 إذا كانت $f(z) = z$ و $A, B \in \mathbb{C}$ فإن

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{[A,B]}} f(z) dz &= \int_0^1 ((1-t)A + tB)(B-A) dt \\ &= (B-A) \left[At + \frac{t^2}{2}(B-A) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(B^2 - A^2) \end{aligned}$$

نظرية 1.2.7 ليكن $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً و f دالة تحليلية على مفتوح يحوي γ^* فإن

$$\int_\gamma f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

برهان من النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل نجد أن

$$\int_\gamma f'(z) dz = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b [f \circ \gamma]'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

■

ملاحظة 1.2.8 في برهان النظرية السابقة استخدمنا أن f' متصلة دون أن نبرهن ذلك. لاحقاً سنبين أن الدوال التحليلية تكون قابلة للاشتقاق مالا نهاية من المرات, وإلى ذلك الحين سنستخدم هذه الحقيقة.

1.2.7 تطبيقات على نظرية

$$1. \text{ لتكن } f(z) = e^z \text{ فإن } \int_{\gamma_{[A,B]}} e^z dz = e^B - e^A$$

2. علاوة على الشروط في النظرية إذا كان γ مغلق فإن $\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$ وبالتالي نرى أنه لا يوجد فرع دالة لوغاريتمية

f على أي مفتوح يحوي دائرة $\gamma_{(0,r)}$. لأنه لو وجد هذا الفرع للوغاريتم لكان

$$\int_{\gamma_{(0,r)}} f'(z) dz = 0$$

من ناحية أخرى وحيث أن $f'(z) = \frac{1}{z}$ فإنه كما رأينا في الأمثلة السابقة

$$\int_{\gamma_{(0,r)}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

وهذا تناقض.

مثال 1.2.9 ليكن $\gamma_1(t) = t + it, 0 \leq t \leq 1$ و $\gamma_2(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$. لاحظ أن $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$ و $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = 1 + i$ أي أن القوسين لهما نفس البداية والنهاية. الآن نقوم بحساب التكاملات التالية

$$\int_{\gamma_1} z dz, \int_{\gamma_2} z dz, \int_{\gamma_1} \bar{z} dz, \int_{\gamma_2} \bar{z} dz$$

لاحظ أن $\gamma_1 = [0, 1 + i]$ وبالتالي فإن

$$\int_{\gamma_1} z dz = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

وباستخدام التعريف نجد أن

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} z dz &= \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it) dt \\ &= \int_0^1 t + 3it^2 - 2t^3 dt = i \end{aligned}$$

مرة أخرى نستخدم التعريف لحساب التكاملين المتبقين، فنحصل على

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_0^1 (t - it)(1 + i) dt = (1 + i) \frac{1 - i}{2} = 1$$

بينما

$$\int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (t - it^2)(1 + 2it) dt = \int_0^1 t + it^2 + 2t^3 dt = 1 + \frac{i}{3}$$

العبرة من المثال السابق.

رأينا أن في المثال أعلاه أن $\int_{\gamma_1} z dz = \int_{\gamma_2} z dz$ وذلك لأن الدالة $f(z) = z$ لها أصل $\frac{z^2}{2}$ وبتطبيق نظرية 1.2.7 يتضح لنا سبب تساوي التكاملين. من جهة أخرى وجدنا أن $\int_{\gamma_1} \bar{z} dz \neq \int_{\gamma_2} \bar{z} dz$ وذلك لأن الدالة $\bar{z}$ ليس لها أصل في $\mathbb{C}$ على الرغم من كونها دالة متصلة. فلو افترضنا وجود دالة تحليلية $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ بحيث

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \bar{z} = x - iy$$

فإنه من معادلات كوشي-ريمان نجد أن

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y \implies \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2$$

أي أن الدالة U ليست توافقية، وهذا يتناقض مع كون F دالة تحليلية. وهنا يتجلي لنا أحد الفروق بين المركب والحقيقي. ففي الحقيقي كل دالة f متصلة على $\mathbb{R}$ $[a, b]$ يوجد لها أصل F بحيث لكل $x \in (a, b)$ فإن $F'(x) = f(x)$ وذلك بوضع

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

نظرية 1.2.10 (بعض خصائص التكامل)

ليكن $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً و f, g دالتين متصلتين على γ^* و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ فإن

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz . 1$$

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \text{ حيث } \gamma^- \text{ هو القوس المعاكس للقوس } \gamma \text{ والمعرف بالعلاقة } \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t) . 2$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z) dz| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| L_{\gamma} . 3$$

برهان سنثبت الفقرة 3 ونترك الفقرتين 1 و 2 كتمرين. ليكن $\int_{\gamma} f(z) dz = re^{i\theta}$, إذأ

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= r = \left| \int_{\gamma} e^{-i\theta} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| L_{\gamma} \end{aligned}$$

1.3 دليل الأقواس المغلقة

مفهوم الدليل هو أحد المفاهيم المهمة في التحليل المركب, وسنرى استخداماته عندما ندرس الصيغة العامة لتكامل كوشي وكذلك نظرية البواقي, وفي هذا الفصل نورد تعريف الدليل وأهم خواصه.

تعريف 1.3.1 ليكن γ قوس أملس قطعاً ومغلق و $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ فإن دليل القوس γ بالنسبة للعنصر z_0 هو

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

مثال 1.3.2 ليكن $\gamma_{n(z_0,1)}(t) = z_0 + e^{int}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ و $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$I(\gamma_{n(z_0,1)}; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n(z_0,1)}} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} n i dt = n$$

بنفس الطريقة نجد أن

$$I(\gamma_{n(z_0,1)}^-; z_0) = -n$$

من المثال السابق يبدو لنا وكأن الدليل هو عبارة عن عدد اللفات التي يصنعها القوس حول z_0 بإشارة موجبة عندما يكون الدوران باتجاه الطواف وإشارة سالبة عندما يكون عكسه. النظرية التالية تؤكد هذا الفهم للدليل.

نظرية 1.3.3 ليكن $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً ومغلق فإنه لكل $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ يكون $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ وهو ثابت على كل جزء مترابط من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ويكون صفرأ على الجزء المترابط غير المحدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

برهان ليكن $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ قوس أملس قطعاً ومغلق و ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. نعرف الدالة g على الفترة $[a, b]$ كما يلي

$$g(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

لاحظ أن الدالة g متصلة وتحقق أن $g(a) = 0$ و $g(b) = 2\pi i I(\gamma, z)$ وأن $g'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$. الآن نضع $\psi(x) = e^{g(x)}$ من الواضح أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة تكون فيها الدالة γ' متصلة ولنا

$$\psi'(s) = g'(s)e^{g(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\psi(s)$$

وبالتالي نجد أن

$$\left(\frac{\psi(s)}{\gamma(s)-z}\right)' = \frac{\psi'(s)(\gamma(s)-z) - \gamma'(s)\psi(s)}{(\gamma(s)-z)^2} = 0$$

أي أن الدالة $\frac{\psi(x)}{\gamma(x)-z}$ هي ثابتة على كل فترة تكون عليها الدالة γ' متصلة وبما أن γ قوس أملس قطعاً فإنه توجد تقسيمة

على $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ بحيث γ' تكون متصلة على (x_j, x_{j+1}) . إذاً من الاتصال يكون لنا

$$\frac{\psi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{\psi(x_1)}{\gamma(x_1)-z} = \dots = \frac{\psi(b)}{\gamma(b)-z}$$

وبما أن $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإن

$$\psi(a) = \psi(b) \Rightarrow 1 = e^{2\pi i I(\gamma, z)}$$

وهذا يقتضي أن $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ وهو ثابت على كل جزء مترابط من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ لأن الدالة $I(\gamma, z) \mapsto z$ متصلة على $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (لماذا؟!.) بقي أن نبين أنه الدليل يساوي الصفر على الجزء المترابط غير المحدود وهذا واضح لأنه ثابت على هذا الجزء المترابط وبالتالي

$$I(\gamma, z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt = 0$$

■

ملاحظة 1.3.4 إذا كان γ كما في النظرية السابقة فإن الجزء المترابط الغير محدود يكون وحيداً وذلك لأن γ^* متراس بصورة للمتراس $[a, b]$ بالدالة المتصلة γ وبالتالي يوجد $R > 0$ بحيث $\gamma^* \subset B(0, R)$ وبما أن $\mathbb{C} \setminus B(0, R)$ مترابط ينتمي للجزء المترابط الغير محدود فإن الجزء المترابط غير المحدود يكون وحيداً.

مثال 1.3.5 ليكن γ كالتالي

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + e^{2it} & , 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 + e^{-4i(t-\frac{\pi}{2})} & , \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ 1 + e^{it} & , \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

لاحظ أن $\gamma^* = \gamma_{(1,1)}^* \cup \gamma_{(-1,1)}^*$ ويتطبيق النظرية السابقة نجد أن

$$I(\gamma, \frac{1}{2}) = 1, \quad I(\gamma, -1 - \frac{i}{2}) = -1, \quad I(\gamma, -5) = I(\gamma, 2012i) = 0$$

1.4 نظرية كوشي

هذا القسم يتناول نظرية كوشي و سنتدرج في ذلك من الصورة البسيطة إلى الصورة العامة.

نظرية 1.4.1 (نظرية كوشي)

لتكن f دالة تحليلية على مفتوح يحوي $\bar{B}(a, r)$. فإن

$$\int_{\gamma(a,r)} f(z) dz = 0$$

برهان لتكن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. حيث أن الدالة f تحليلية إذا المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومتصلة و تحقق $u_x = v_y, u_y = -v_x$ (معادلات كوشي-ريمان). وبالتالي من نظرية جرين نجد أن

$$\int_{\gamma(a,r)} u(x, y) dx - v(x, y) dy = \int \int_{B(a,r)} (-v_x - u_y) dx dy = 0$$

بالمثل نجد أن

$$\int_{\gamma(a,r)} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \int \int_{B(a,r)} (u_x - v_y)dx dy = 0$$

وبذلك نتحصل على المطلوب لأن

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(a,r)} f(z)dz &= \int_{\gamma(a,r)} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma(a,r)} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_{\gamma(a,r)} v(x,y)dx + u(x,y)dy \end{aligned}$$

■

مثال 1.4.2 لتكن $f(z) = z^2, g(z) = \frac{\sin z}{z+2}$ بتطبيق نظرية كوشي نجد أن

$$\int_{\gamma(0,1)} z^2 dz = 0$$

وذلك لأن الدالة z^2 تحليلية على كامل $\mathbb{C}$. بالمثل يكون لنا

$$\int_{\gamma(0,1)} \frac{\sin z}{z+2} dz = 0$$

لأن $\frac{\sin z}{z+2}$ تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ وبالتالي يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة Ω تحوي $\overline{B}(0,1)$ بحيث تكون الدالة $\frac{\sin z}{z+2}$ تحليلية. لكن لا يمكن تطبيق نظرية كوشي لحساب التكامل

$$\int_{\gamma(0,2)} \frac{3z^6}{z-1} dz$$

كون الدالة $\frac{3z^6}{z-1}$ ليست تحليلية على $B(0,2)$ لأن العنصر $1 \in B(0,2)$, وسوف نتناول لاحقاً كيفية التعامل مع هكذا تكاملات عندما ندرس صيغ كوشي التكاملية.

الآن نقوم بإثبات مجموعة من النظريات والتي من شأنها أن تمهد لنا الطريق للوصول إلى نظرية كوشي في صيغتها العامة.

نظرية 1.4.3 لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ و Δ مثلث من Ω بحيث داخلية Δ محتواه في Ω فإن

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0$$

برهان لنفرض أنه يوجد $a > 0$ بحيث

$$\left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| = a$$

ليكن محيط المثلث Δ يساوي L , نقوم بتوصيل أنصاف أضلاع المثلث فنحصل على أربعة مثلثات وبالتالي فإنه على أحد هذه المثلثات وليكن Δ_1 يكون

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta} f(z)dz \right|, \quad L(\Delta_1) = \frac{L}{2}$$

نستمر بهذه الطريقة فنبنى متتابعة من المثلثات $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta_{n-1}} f(z)dz \right| \geq \dots \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{\Delta} f(z)dz \right|, \quad L(\Delta_n) = \frac{L}{2^n}$$

وحيث أن $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي متتابعة من مجموعات متراسة تحقق أن

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(\Delta_n) = 0$$

فإنه توجد نقطة وحيدة z_0 بحيث $z_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$. وبما أن f تحليلية على Ω فإنه توجد دالة O تحقق أن $\lim_{z \rightarrow z_0} O(z-z_0) = 0$ بحيث

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)O(z - z_0)$$

وبالتالي

$$\frac{a}{4^n} \leq \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\mathcal{O}(z - z_0) dz \right|$$

لكن الدالة $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ هي كثيرة حدود أي أن لها أصل وعليه فإن

$$\int_{\Delta_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) dz = 0$$

من ناحية أخرى وباستخدام نظرية 1.2.10 نجد أن

$$\left| \int_{\Delta_n} (z - z_0)\mathcal{O}(z - z_0) dz \right| \leq \frac{L}{2^n} \frac{L}{2^n} \sup_{z \in \Delta_n} |\mathcal{O}(z - z_0)|$$

أي أن

$$\frac{a}{L^2} \leq \sup_{z \in \Delta_n} |\mathcal{O}(z - z_0)|$$

وهذا يتناقض مع كون $a > 0$ لأن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Delta_n} |\mathcal{O}(z - z_0)| = 0$$

■

مثال 1.4.4 الشرط على داخلية المثلث في النظرية السابقة هو شرط أساسي فعلى سبيل المثال الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ دالة تحليلية على $\mathbb{C}^*$ ولكن على المثلث $\Delta_1 = [-1 - i, 1 - i, i]$ نجد أن

$$\int_{\Delta_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i I(\Delta_1, 0) = 2\pi i \neq 0$$

وهذا لا يتناقض مع النظرية لأن النقطة صفر تنتمي لداخلية المثلث Δ_1 ، بينما على المثلث $\Delta_2 = [1, 2, 1 + i]$ فإن

$$\int_{\Delta_2} \frac{1}{z} dz = 0$$

لأن داخلية المثلث Δ_2 محتواه في $\mathbb{C}^*$

نظرية 1.4.5 (نظرية موريرا)

لتكن f دالة متصلة على نطاق (مفتوح ومترايط) Ω بحيث تكاملها على كل مثلث من Ω يساوي صفر فإن f تكون تحليلية.

برهان لاحظ أن f على Ω إذا كانت تحليلية على كل قرص محتوي في Ω وبالتالي يكفي أن نبرهن النظرية عندما $\Omega = B(a, r)$. نعرف الدالة

$$F(z) = \int_{[a, z]} f(w) dw, \quad \forall z \in B(a, r)$$

ليكن $h \in \mathbb{C}$ بحيث يكون المثلث $\Delta = [a, z, z + h]$ محتوي في $B(a, r)$. حيث أن

$$0 = \int_{\Delta} f(w) dw = \int_{[a, z]} f(w) dw + \int_{[z, z+h]} f(w) dw + \int_{[z+h, a]} f(w) dw$$

فإن

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw = \int_0^1 f(z + th) dt$$

وبالتالي يكون

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^1 f(z + th) - f(z) dt \right| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(z + th) - f(z)|$$

■ الآن بأخذ النهاية عندما h تتوول إلى الصفر ينتج أن $F'(z) = f(z)$. أي أن الدالة f تحليلية على $B(a, r)$.

كنتيجة للنظريات السابقة نحصل على النص التالي

نظرية 1.4.6 لتكن f دالة متصلة على نطاق Ω من $\mathbb{C}$ فإن f لها أصل إذا وفقط إذا كان تكامل الدالة f على كل قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω يساوي صفر.

تعريف 1.4.7 نقول عن مجموعة مترابطة $\Omega \supset \mathbb{C}$ بأنها بسيطة الترابط إذا وفقط إذا كان لكل قوس أملس قطعاً ومغلق γ من Ω تكون الأجزاء المترابطة المحدودة من $\Omega \setminus \gamma^*$ محتواه في Ω .

مثال 1.4.8 المجموعتان $\mathbb{C}^*$ و $B(0, 2) \setminus B(1, \frac{1}{2})$ مترابطتان إلا أنهما ليستا بسيطتي الترابط.

مثال 1.4.9 $\mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ و $B(i, 2)$ و $\{z \in \mathbb{C} : -2 \leq \text{Im}(z) \leq 4\}$ هي مجموعات بسيطة الترابط.

نظرية 1.4.10 (نظرية كوشي الصيغة العامة)

لتكن f دالة تحليلية على Ω بسيط الترابط من $\mathbb{C}$ و γ قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω فإن

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

برهان حيث أن Ω بسيط الترابط فإنه لكل مثلث $\Delta \supset \Omega$ تكون داخلية Δ محتواه في Ω . لكن f تحليلية وبالتالي من نظرية 1.4.3 يكون

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0$$

وبطريق مشابهة لبرهان نظرية موريرا (استبدل المثلث بقوس أملس قطعاً) نجد أن الدالة f لها أصل F على Ω . ليكن الآن

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ قوس أملس قطعاً ومغلق بحيث } \gamma^* \subset \Omega \text{ فإنه من نظرية 1.2.7 نجد أن}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

■

كتطبيق لنظرية كوشي نعطي النتيجة التالية

نتيجة 1.4.11 لتكن f دالة تحليلية على بسيط الترابط Ω و γ_1, γ_2 قوسين أملسين قطعاً بحيث $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subset \Omega$ ولهما نفس البداية والنهاية فإن

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

■

برهان ينتج المطلوب بتطبيق النظرية السابقة على القوس $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^{*-}$

1.5 صيغ كوشي التكاملية و مفكوك تايلور للدوال التحليلية

نبدأ هذا القسم بنظريتين لهما أهمية في إثبات نظرية مفكوك تايلور

تمهيدية 1.5.1 (نظرية ليبنز)

لتكن $\phi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة و لتكن $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ دالة معرفة على الصورة

$$g(s) = \int_a^b \phi(t, s) dt$$

فإن g دالة متصلة. علاوة على ذلك , إذا كانت $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ موجودة ومتصلة فإن $g \in C^1$ ولنا

$$g'(s) = \int_a^b \frac{\partial \phi(t, s)}{\partial s} dt$$

تمهيدية 1.5.2 ليكن γ قوس أملس قطعاً من $\mathbb{C}$ ولتكن f_n و f دوال متصلة على γ^* . إذا كانت f_n تتقارب بانتظام من f على γ^* فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

نظرية 1.5.3 (صيغة تكامل كوشي)

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي القرص $\bar{B}(a, r)$ فإنه لكل $z \in B(a, r)$ يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

برهان لنفترض أولاً أن $a = 0$ و $r = 1$. بما أن $z \in B(0, 1)$ فإن

$$1 = I(\gamma(0, 1), z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt$$

وبالتالي يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z) e^{it}}{e^{it} - z} dt$$

الآن على الفترة $\mathbb{R} \subset [0, 1]$ نعرف الدالة

$$g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(f(e^{it} + s(z - e^{it})) - f(z)) e^{it}}{e^{it} - z} dt$$

لاحظ أن الدالة g حسنة التعريف على الفترة $[0, 1]$ لأن

$$|e^{it} + s(z - e^{it})| \leq |e^{it}(1 - s)| + |sz| < (1 - s) + s = 1$$

و عندها نجد أن $g(1) = 0$ وإذا بيّنا أن $g(0) = 0$ فإن المطلوب ينتج بصورة مباشرة. لكن من نظرية ليبنز لنا

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-(e^{it} - z)(f'(e^{it} + s(z - e^{it}))) e^{it}}{e^{it} - z} dt \\ &= \frac{-1}{2\pi i(1 - s)} \int_0^{2\pi} (f(e^{it} + s(z - e^{it})))' dt = 0 \end{aligned}$$

وعليه فإن $g(1) = g(0) = 0$.

في الحالة العامة وعندما f تحليلية بجوار $B(a, r)$ و $\xi_0 \in B(a, r)$ فإن $z_0 = \frac{\xi_0 - a}{r} \in B(0, 1)$ الآن نعرف

$$g(z) = f(a + rz)$$

ف نجد أن الدالة g تحليلية بجوار $B(0, 1)$ ، وبالتالي نص النظرية يتبع عند تطبيق الفقرة الأولى من البرهان على الدالة g . ■

تطبيقات على نظرية 1.5.3

1. اعتمدنا سابقاً أن كل دالة تحليلية تكون من صنف C^∞ دون أن نبرهن ذلك، والآن نبين هذه الحقيقة. لنفرض

أن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي القرص $\bar{B}(a, r)$ ، عندها يوجد $R > r$ بحيث تكون f تحليلية على $B(a, R)$ ومن نظرية كوشي نجد أن الدالة f لها أصل F على $B(a, R)$. الآن من صيغة كوشي التكاملية نجد أن

$$\forall z \in B(a, r), F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a, r)} \frac{F(w)}{w - z} dw$$

وبهذه الصيغة نجد أن الدالة F قابلة للاشتقاق مالانهاية من المرات ولنا

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma(a, r)} \frac{F(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

وبالتالي تكون $f \in C^\infty(\Omega)$.

2 . رأينا أن نظرية كوشي لا تخولنا لحساب قيمة قيمة التكامل

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} \frac{3z^6}{z-1} dz$$

أما الآن وبوضع $f(z) = 3z^6$ نجد من صيغة تكامل كوشي أن

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} \frac{3z^6}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 6\pi i$$

مثال 1.5.4 أوجد قيمة التكامل

$$\int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} \frac{\log(z)}{(z-i)(z+1)} dz$$

الحل:

حيث أن الدالة $f(z) = \frac{\log(z)}{z+1}$ تحليلية على مفتوح¹ يحوي القرص $\bar{B}(i, \frac{1}{2})$, إذاً من صيغة تكامل كوشي نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} \frac{\log(z)/(z+1)}{(z-i)} dz &= 2\pi i f(i) \\ &= 2\pi i \frac{\log(i)}{i+1} = \frac{2\pi i - \pi}{1+i} \end{aligned}$$

طريقة أخرى:

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} \frac{\log(z)/(z+1)}{(z-i)} dz &= \frac{1}{1+i} \int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} \frac{\log(z)}{z-i} dz - \frac{1}{1+i} \int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} \frac{\log(z)}{z+1} dz \\ &= \frac{2\pi i \log(i)}{1+i} + 0 \end{aligned}$$

نظرية 1.5.5 (صيغة تكامل كوشي العامة)

لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$. إذا كان γ قوس أمّلس قطعاً ومغلق بحيث

$$I(\gamma, z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

فإنه لكل $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ يكون

$$I(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

نظرية 1.5.6 (مفكوك تايلور)

ليكن $r > 0$ و $a \in \mathbb{C}$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي $\bar{B}(a, r)$ فإنه لكل $z \in B(a, r)$ لنا

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{(a,r)}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

¹ يجب اختيار هذا المفتوح بعناية بحيث يكون بعيداً عن -1.

برهان من تكامل كوشي نعلم أن

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})re^{it}}{a+re^{it}-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{1-\frac{z-a}{re^{it}}} dt \end{aligned}$$

لاحظ أن

$$\left| \frac{z-a}{re^{it}} \right| < 1$$

وعليه فإن

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{re^{it}} \right)^n$$

وبذلك يكون

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{re^{it}} \right)^n \right] dt$$

ومن التقارب المنتظم يمكننا تبديل المجموع مع التكامل فنحصل على

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) e^{-int} dt \right) (z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n \end{aligned}$$

وحيث أن هذه المتسلسلة تتقارب بانتظام على $B(a,r)$ فإنه يمكننا أن نشق حداً بحد، وبالتالي نجد أن

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

نتيجة 1.5.7 لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ و $a \in \Omega$ فإنه يوجد $r > 0$ بحيث

$$\forall z \in B(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

برهان خذ $r < d(a, \partial\Omega)$ عندها النتيجة تتبع من النظرية السابقة.

مثال 1.5.8 الدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية بجوار القرص $B(i, \frac{1}{2})$ ، ومن النظرية السابقة نجد أن

$$\forall z \in B(i, \frac{1}{2}), \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

وبحساب المشتقات نتحصل على

$$a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(i)^{n+1}}$$

نظرية 1.5.9 (متباينة كوشي)

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي $B(a,r)$ فإن

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$$

برهان نعلم من مفكوك تايلور ونظرية 1.2.10 أن

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)| \end{aligned}$$

قد يبدو للقارئ من الوهلة الأولى أن متباينة كوشي ليست بتلك الأهمية وذلك لسهولة البرهان إلا إنه وعلى العكس تماماً فإن هذه المتباينة لها العديد من التطبيقات المهمة ولعل من أهمها نظرية ليوفيل التي تنص على

نظرية 1.5.10 (نظرية ليوفيل)

لتكن f دالة كلية (أي تحليلية على كامل المركب). إذا كانت f محدودة فإنها ثابتة.

برهان ليكن $M = \sup\{|f(z)|, z \in \mathbb{C}\}$ من مفكوك تايلور لنا

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

ولكن من متباينة كوشي فإنه

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$$

وحيث أن f دالة كلية، فإنه بأخذ النهاية عندما $r \rightarrow \infty$ نحصل على

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{r^n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

وبهذا يكون $f(z) = f(a)$ لكل $z \in \mathbb{C}$ ، أي أن f ثابتة.

من نظرية ليوفيل نرى أن الدوال $\sin z, \cos z, e^z$ دوال ليست محدودة وذلك كونها دوال كلية، وهذا يختلف عن الدوال في الحقيقي لأننا نعلم على سبيل المثال أن $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

رأينا في بداية المقرر أن تعريف الضرب على الأعداد المركبة مكنتنا من حل المعادلة $z^2 + 1 = 0$ وهو ما لم يتسنى لنا في الأعداد الحقيقية، والآن نورد نظرية مفادها ضمان وجود الجذور لكثيرات الحدود في المركب

نظرية 1.5.11 (النظرية الأساسية في الجبر)

إذا كانت P كثيرة حدود غير ثابتة فإن لها على الأقل جذر في $\mathbb{C}$.

برهان حيث أن P كثيرة حدود غير ثابتة فإن $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ في الواقع

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + 1 \right)$$

لو كانت P ليس لها جذور فإن الدالة $f = \frac{1}{P}$ تحليلية على كامل المركب وتحقق

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$$

وبالتالي إذا كان $M > 0$ فإنه يوجد $R > 0$ بحيث $|f(z)| \leq M$ لكل $|z| > R$. من الناحية الأخرى فإن الدالة $|f|$ متصلة وبالتالي على المتراص $\bar{B}(0, R)$ تصل إلى قيمتها العظمى. وعليه فإن الدالة f محدودة ومن ليوفيل تكون ثابتة، وهذا يؤدي إلى أن P ثابتة وهذا تناقض.

تعريف 1.5.12 لتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ فإننا نقول أن $a \in \Omega$ جذر للدالة f من الدرجة $m \geq 1$ إذا وفقط إذا كان

$$f(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0$$

لاحظ أنه من مفكوك تايلور على $B(a, r) \subset \Omega$ نجد أن

$$\forall z \in B(a, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m}$$

وبذلك نستنتج أن كون a جذر من الدرجة m للدالة f يقتضي وجود $r > 0$ ودالة تحليلية g على $B(a, r)$ بحيث لكل $z \in B(a, r)$ فإن $f(z) = (z-a)^m g(z)$ و $g(a) \neq 0$.

نظرية 1.5.13 (نظرية الأصفار المعزولة)

لتكن f دالة تحليلية على نطاق Ω من $\mathbb{C}$ فإن $f \equiv 0$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة $Z_f = \{z : f(z) = 0\}$ لها نقطة تراكم في Ω .

تطبيقات على نظرية الأصفار المعزولة

- جميع الدوال التحليلية بجوار الصفر التي تحقق $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ هي $f(z) = \frac{1}{z+1}$. لأنه لو كانت g دالة تحليلية تحقق $g(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ فإن $f - g = 0$ على المجموعة $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ وحيث أن A لها نقطة تراكم فإن $f \equiv g$.

- إذا كانت P كثيرة حدود غير صفرية فإن جذورها منتهية. وذلك لأن $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ وبالتالي يوجد $R > 0$ حيث جذور P محتواه في $\bar{B}(0, R)$. إذاً جذور P منتهية وإلا وجدت نقطة تراكم لجذورها. الآن لتكن $a_1, \dots, a_n$ جذور كثيرة الحدود P من الدرجة $m_1, \dots, m_n$ على التوالي، فإن جميع هذه الجذور من درجة منتهية. فعلى سبيل المثال لو كان $f^{(n)}(a_1) = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فمن مفكوك تايلور حول a_1 تكون P كثيرة حدود صفرية وهذا تناقض. إذاً نستنتج من ذلك أن P تكتب على الصورة

$$P(z) = (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_n)^{m_n}$$

- إذا كانت f دالة تحليلية على نطاق Ω و $a \in \Omega$ جذر من الدرجة m للدالة f فإنه يوجد $r > 0$ و g دالة تحليلية على $B(a, r)$ تحقق $g(z) \neq 0, \forall z \in B(a, r)$ بحيث

$$\forall z \in B(a, r), \quad f(z) = (z-a)^m g(z)$$

أي أن أصفار الدوال التحليلية تكون معزولة.

نظرية 1.5.14 (مبدأ القيمة العظمى)

لتكن f دالة تحليلية على نطاق Ω من $\mathbb{C}$ إذا وجد $a \in \Omega$ بحيث

$$|f(a)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$$

فإن f تكون ثابتة على Ω .

ينتج من هذه النظرية النص التالي

نتيجة 1.5.15 ليكن Ω مفتوح ومحدود من $\mathbb{C}$ و f دالة تحليلية على Ω ومتصلة على $\bar{\Omega}$ فإن

$$\sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

1.6 مفكوك لوران وتصنيف النقاط الشاذة

تطرقنا سابقاً لتعريف النقاط الشاذة المنعزلة، وفي هذا القسم سنقوم بدراستها بصورة مستفيضة. وقبل أن نخوض في ذلك سنثبت الرمز $B(a; r, R)$ على أنه المجموعة $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ حيث $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$.

تعريف 1.6.1 نقول أن النقطة $a \in \mathbb{C}$ نقطة شاذة منعزلة للدالة f إذا وجد $r > 0$ بحيث تكون f تحليلية على $B(a; 0, r)$. عندها نصنف a كالتالي:

1. a نقطة شاذة مزالة إذا وفقط إذا وجدت دالة تحليلية g على $B(a, r)$ بحيث $g = f$ على $B(a; 0, r)$. أي أن f قابلة للتمديد كدالة تحليلية على $B(a, r)$ وتمديدها $\tilde{f}$ هو g .

2. a قطب إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي $m > 1$ بحيث تكون a نقطة شاذة مزالة بالنسبة للدالة $g(z) = (z - a)^m f(z)$.

3. a نقطة شاذة أساسية إذا وفقط إذا لم تكن لا مزالة ولا قطب.

مثال 1.6.2 الدالة $f(z) = \frac{2z^2 + z}{2z + 1}$ دالة تحليلية على $B(\frac{-1}{2}; 0, r)$ ، لكن لوأخذنا $g(z) = z$ نجد أن g دالة تحليلية على $B(\frac{-1}{2}, r)$ وتحقق أن $g = f$ على $B(\frac{-1}{2}; 0, r)$ لأنه

$$\forall z \in B(\frac{-1}{2}; 0, r), f(z) = \frac{z(2z + 1)}{2z + 1} = z$$

وبالتالي فإن $a = \frac{-1}{2}$ نقطة شاذة مزالة للدالة f

مثال 1.6.3 الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ دالة تحليلية على $\mathbb{C}^*$ ونجد أن حاصل الضرب $zf(z) = 1$ دالة تحليلية على كامل المركب وبالتالي فإن $a = 0$ هو قطب للدالة. لاحظ أن $a = 0$ لا يمكن أن تكون نقطة شاذة مزالة للدالة f لأنه لو أمكن تمديد الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ بحيث تكون تحليلية على $\mathbb{C}$ فإنه من نظرية كوشي على بسيط الترابط يكون تكامل $\tilde{f}$ مساوياً للصفر على كل قوس أملس قطعاً من $\mathbb{C}$ وهذا يناقض كون

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

مثال 1.6.4 الدالة $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ دالة تحليلية على $\mathbb{C}^*$ وبالتالي من تعريف الدالة الأسية فإنه لكل $z \neq 0$ يكون

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{(3!)z^3} + \dots + \frac{1}{(n!)z^n} + \dots$$

ومن هنا نرى أن $a = 0$ نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z}}$ ، لأنه لا يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث تكون $z^n e^{\frac{1}{z}}$ تحليلية وذلك كون الأسس السالبة ستستمر بالظهور وهو ما يتنافى مع مفكوك تايلور للدوال التحليلية.

تعريف 1.6.5 لتكن f دالة تحليلية على $B(a; 0, r)$ فإننا نقول أن a قطب للدالة f من الدرجة m إذا وفقط إذا كان m أصغر عدد طبيعي بحيث تكون a نقطة شاذة مزالة بالنسبة للدالة $g(z) = (z - a)^m f(z)$.

ملاحظة 1.6.6 نلاحظ من التعريف السابق أن g تحليلية على $B(a, r)$ وبالتالي من مفكوك تايلور للدوال التحليلية نجد أن

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z - a)^m} = \frac{1}{(z - a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - a)^n \\ &= \underbrace{\frac{\alpha_0}{(z - a)^m} + \frac{\alpha_1}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{(z - a)}}_{\text{الجزء الشاذ}} + \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n (z - a)^{n-m} \end{aligned}$$

نظرية 1.6.7 (مفكوك لوران)

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$ ولتكن f دالة تحليلية على مفتوح Ω يحوي $B(a; r, R)$ فإنه

$$\forall z \in B(a; r, R), f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a,t)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad t \in (r, R)$$

الآن سوف نستخدم مفكوك لوران كأداة لتصنيف النقاط الشاذة من خلال النظرية التالية.

نظرية 1.6.8 لتكن a نقطة شاذة منعزلة للدالة f و لتكن f لها مفكوك لوران على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \forall z \in B(a; 0, r).$$

فيان:

1 . a نقطة شاذة مزالة إذا وفقط إذا كان $a_n = 0$ لكل $n \leq -1$.

2 . a قطب من الدرجة m إذا وفقط إذا كان $a_{-m} \neq 0$ و كان $a_n = 0$ لكل $n \leq -(m+1)$.

3 . a نقطة شاذة أساسية إذا وفقط إذا كان $a_n \neq 0$ لعدد لا نهائي من الأعداد الصحيحة السالبة n .

برهان

مثال 1.6.9 أوجد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ عندما

$$1 . |z| < 1$$

$$2 . 1 < |z| < 2$$

$$3 . |z| > 2$$

الحل

مثال 1.6.10 أوجد مفكوك لوران للدالة $f(z) = \frac{1}{z-3}$ على صورة

$$1 . متسلسلة قوى موجبة في z .$$

$$2 . متسلسلة قوى سالبة في z .$$

الحل

1 . لكي يكون المفكوك على صورة أسس موجبة في z , فإننا من مفكوك تايلور نبحت عن جوار Ω للصفر بحيث تكون عليه الدالة f تحليلية. وبالتالي لو أخذنا $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ فإن الدالة $\frac{1}{z-3}$ تحليلية على Ω ومن مفكوك تايلور نتحصل

$$\frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

وبالاستقراء نستطيع أن نبرهن أن

$$f^{(n)}(0) = \frac{-(n!)}{3^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^n$$

كما يمكننا أن نرى ذلك بطريقة أخرى باستخدام مجموع المتسلسلة الهندسية وذلك كون $|z| < 1$ أي أن

$$\left| \frac{z}{3} \right| < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{z-3} = \frac{-1}{3(1-\frac{z}{3})} = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^n$$

2 . لاحظ أن الدالة تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ وبالتالي لن نصل للمطلوب لو أوجدنا مفكوك لوران للدالة حول النقطة 3 لأن المفكوك سيكون متسلسلة قوى في $z-3$ ولذلك سنوسع الدائرة لتشمل النقطة صفر لنحصل على متسلسلة قوى سالبة في z . وعليه نختار $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 3\}$ فنجد أن

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}$$

وبما أن لكل $z \in \Omega$ يكون $\frac{3}{|z|} < 1$ فإن

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n$$

مثال 1.6.11 صنف النقاط الشاذة بالنسبة للدوال التالية

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}, \quad f_2(z) = \frac{e^z}{z \sin z}, \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{z}$$

الحل

1 . الدالة f_1 تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \{1, i\}$. إذاً النقاط الشاذة المنعزلة هي $a = 1, i$. ندرس الدالة بجوار كل نقطة على

حدا فنجد أن الدالة $\frac{z^2}{(z-i)^2}$ تحليلية على القرص $B(1, \frac{1}{2})$ وبالتالي لها مفكوك تايلور على الصورة

$$\frac{z^2}{(z-i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n, \quad \forall z \in B(1, \frac{1}{2})$$

أي أن الدالة f_1 بجوار النقطة $a = 1$ تكتب على الصورة

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n = \frac{a_0}{z-1} + a_1 + a_2(z-1) + \dots + a_n(z-1)^{n-1} + \dots$$

إذاً $a = 1$ قطب من الدرجة الأولى (بسيط) للدالة f_1 . نقوم بنفس العملية لتصنيف النقطة $a = i$, فنجد من مفكوك تايلور أن

$$\frac{z^2}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-i)^n, \quad \forall z \in B(i, \frac{1}{2})$$

بالتالي فإن الدالة f_1 بجوار $a = i$ لها المفكوك

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-i)^n = \frac{b_0}{(z-i)^2} + \frac{b_1}{z-i} + b_2 + b_3(z-i) + \dots + b_n(z-i)^{n-2} + \dots$$

أي أن $a = i$ قطب من الدرجة الثانية.

2 . الدالة f_2 تحليلية إلا عند اصفار المقام. ومن دراستنا السابقة لأصفار الدالة $\sin z$ فإننا نجد أن f_2 تحليلية على

$$\mathbb{C} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \text{ سندرس الآن النقطة } a = 2k\pi. \text{ حيث أن}$$

$$\sin' z = \cos z \Rightarrow \sin' 2k\pi = 1 \neq 0$$

فإن $a = 2k\pi$ جذر بسيط للدالة $\sin z$ وبالتالي من نظرية الأصفار المعزولة يوجد جوار V_k للنقطة $a = 2k\pi$ ودالة تحليلية g_k على V_k تحقق $g_k(z) \neq 0$ لكل $z \in V_k$ بحيث $\sin z = (z - 2k\pi)g_k(z), \forall z \in V_k$. من ذلك نستنتج أن

$$f_2(z) = \frac{e^z}{z(z - 2k\pi)g_k(z)}, \forall z \in V_k$$

وحيث أن دالة تحليلية فإن $a = 0$ هو قطب من الدرجة الثانية للدالة f_2 . بينما لكل $k \neq 0$ فإن $a = 2k\pi$ هو قطب بسيط للدالة f_2 وذلك لأن $\frac{e^z}{z^2 g_k(z)}$ تحليلية لكل $k \neq 0$.

3 . من الوهلة الأولى نرى أن $a = 0$ نقطة شاذة منعزلة للدالة f_3 , وبإيجاد مفكوك تايلور نتحصل

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

ومن هنا نجد أن $a = 0$ نقطة شاذة مزالة بالنسبة للدالة f_3 .

1.7 نظرية البواقي

في هذا القسم سندرس نظرية البواقي والتي تعمم نظريات التكامل السابقة, كما أنها وسيلة فعالة لحساب التكاملات المعتلة.

تعريف 1.7.1 لتكن a نقطة شاذة منعزلة للدالة f والتي لها مفكوك لوران على الصورة

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in B(a; 0, r)$$

فإن باقي الدالة f عند a هو المعامل a_{-1} (معامل $\frac{1}{z}$) وعندها نكتب $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$.

مثال 1.7.2 رأينا سابقاً أن النقطة $a = 0$ نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z}}$, من تعريف الدالة الأسية

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

إذاً $\text{Res}(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1$ بصورة عامة, فإن $\text{Res}(z^n e^{\frac{1}{z}}, 0) = \frac{1}{(n+1)!}$.

لاحظ أنه أحياناً يكون من الصعب إيجاد المفكوك لحساب الباقي. لذا نورد النتيجة التالي والتي ستساعدنا على حساب الباقي عند الأقطاب.

نتيجة 1.7.3 لتكن النقطة a قطب للدالة f من الدرجة m فإن باقي f عند a يعطى على الصورة

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}$$

برهان من الملاحظة 1.6.6 وجدنا أن $g(z) = (z-a)^m f(z)$ دالة تحليلية ومن ذلك استنتجنا أن

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

$$= \frac{\alpha_0}{(z-a)^m} + \frac{\alpha_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{(z-a)} + \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n (z-a)^{n-m}$$

إذاً

$$Res(f, a) = \alpha_{m-1} = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}$$

■

مثال 1.7.4 في المثال 1.6.11 وجدنا أن للدالة f_1 قطب بسيط عند $a = 1$ وقطب من الدرجة الثانية عند $a = i$. ومن النتيجة السابقة لنا

$$Res(f_1, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{(z-i)^2} = \frac{1}{(1-i)^2}$$

بينما

$$\begin{aligned} Res(f_1, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{[(z-i)^2 f_1(z)]'}{(2-1)!} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{z^2}{z-1} \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z-1) - z^2}{(z-1)^2} = \frac{-1-2i}{(i-1)^2} \end{aligned}$$

مثال 1.7.5 الدالة f_3 لها قطب من الدرجة الثانية عند الصفر وبالتالي فإن

$$Res(f_3, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{e^z}{g_0(z)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(g_0(z) - g_0'(z))}{g_0^2(z)}$$

لكن

$$g_0(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

ومن هنا نرى أن $g_0(0) = 1$ و $g_0'(0) = 0$. إذاً

$$Res(f, 0) = 1$$

نظرية 1.7.6 (نظرية البواقي)

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $a_1, \dots, a_n$ نقاط ن Ω ولتكن f دالة تحليلية على $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. إذا كان γ قوس أملس قطعاً ومغلق من Ω بحيث $a_j \notin \gamma^*$, $j = 1, \dots, n$ ولكل $z \notin \Omega$ فإن

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n Res(f, a_j) * I(\gamma, a_j)$$

مثال 1.7.7 لتكن f_1 كما في المثال 1.6.11 فإن

$$\int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} f_1(z) dz = 2\pi i [Res(f_1, 1) * I(\gamma_{(i, \frac{1}{2})}, 1) + Res(f_1, i) * I(\gamma_{(i, \frac{1}{2})}, i)]$$

من الحسابات التي قمنا بها في المثال 1.7.4 نجد أن

$$\int_{\gamma_{(i, \frac{1}{2})}} f_1(z) dz = 2\pi i [Res(f_1, 1) * 0 + Res(f_1, i) * 1] = -2\pi i \left(\frac{1+2i}{(i-1)^2} \right)$$

في حين أن

$$\int_{\gamma_{(1, \frac{1}{3})}} f_1(z) dz = \frac{2\pi i}{(i-1)^2}$$

مثال 1.7.8 اعتبر الدالة f_2 من المثال 1.6.11, رأينا أن النقطة $a = 0$ قطب من الدرجة الثانية للدالة f_2 وأن $Res(f_2, 0) = 1$ وبالتالي من نظرية البواقي نجد أن

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} f_2(z) dz = 2\pi i$$

مثال 1.7.9 ليكن $R \gg 1$. أوجد قيمة التكامل

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz$$

حيث

$$\gamma_R(t) = \begin{cases} Re^{it} & , 0 \leq t \leq \pi \\ \frac{2t-3\pi}{\pi} & , \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

الحل

برسم القوس γ_R نجد أن صورته هي اتحاد النصف العلوي للدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها R مع القطعة $[-R, R]$. الآن ندرس الدالة $\frac{z^2}{z^4+1}$ فنجد أن لها نقاط شاذة عند أصفار المقام وهي

$$a_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, a_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, a_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}, a_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

وعليه فمن نظرية البواقي نحصل على

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^4 \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4 + 1}, a_j\right) * I(\gamma, a_j)$$

وحيث أن a_3, a_4 تقعان في النصف السفلي من المركب فإن

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4 + 1}, a_j\right)$$

لكن $z^4 + 1 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)$ أي أن a_1, a_2 قطبين بسيطين للدالة والباقي هو

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4 + 1}, a_1\right) &= \frac{a_1^2}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} \\ &= \frac{a_1^2}{a_1^3 \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \left(1 - \frac{a_3}{a_1}\right) \left(1 - \frac{a_4}{a_1}\right)} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{(1 - i) * 2 * (1 + i)} = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

بطريقة مشابهة نجد أن

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4 + 1}, a_2\right) = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz = 2\pi i \left(\frac{1 - i}{4\sqrt{2}} - \frac{1 + i}{4\sqrt{2}} \right) = 2\pi i \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

تطبيقات على نظرية البواقي

كما أسلفنا فإن نظرية البواقي تساعدنا على حساب بعض الصيغ التكاملية ونورد كتطبيق لهذه بعض الأمثلة.

مثال 1.7.10 أوجد قيمة التكامل التالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

الحل

لنعتبر γ_R كما في المثال السابق. رأينا أن

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{2}$$

وباستخدام تعريف التكامل على الأقواس نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx + \int_0^{2\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{R^4 e^{4it} + 1} iRe^{it} dt &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx &= - \int_0^{2\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{R^4 e^{4it} + 1} iRe^{it} dt + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

لكن

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{R^2 e^{2it}}{R^4 e^{4it} + 1} iRe^{it} dt \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{R^2 e^{2it}}{R^4 e^{4it} + 1} iRe^{it} \right| dt \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{R^4 - 1} dt = 0 \end{aligned}$$

إذاً

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

بصورة عامة, وباستخدام نفس الفكرة في المثال السابق نستطيع أن نبين النتيجة التالية.

نتيجة 1.7.11 لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ بحيث $\deg P + 2 \leq \deg Q$ و $Q(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (أي أن Q ليس لها أصفار حقيقية). إذا كانت $a_1, \dots, a_n$ هي أصفار Q في المركب فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_j\right)$$

مثال 1.7.12 لحساب قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx$$

نضع $P(x) = 3$ و $Q(x) = x^2 + 2x + 2$ فنجد أن P, Q تحققان شروط النتيجة 1.7.11, ولكن

$$Q(z) = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i$$

إذاً

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{3}{z^2 + 2z + 2}, -1 + i\right) = 3\pi$$

على نفس المنوال, باسطاعتنا أن نبرهن النص التالي

نتيجة 1.7.13 ليكن $\alpha > 0$ و لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ بحيث $\deg P + 1 \leq \deg Q$ و $Q(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (أي أن Q ليس لها أصفار حقيقية). إذا كانت $a_1, \dots, a_n$ هي أصفار Q في المركب فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{iax}}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}\left(\frac{P(z)e^{iaz}}{Q(z)}, a_j\right)$$

مثال 1.7.14 لحساب قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

نقوم أولاً بحساب أصفار المقام فنجد أن $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ أي أن الأصفار هي $i, -i$ وبالتعويض في النتيجة السابقة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}, i\right) = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

تمرين 1.7.15 أوجد قيمة التكاملات التالية

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos^2 x}{x^4 + 1} dx \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$