جَامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الريَاضيَات

التّحليل الدَّالي

د. حسين المير ٠٣٥٨٩٩٥١١ $hassine\_elmir@yahoo.fr$

اَلمحتوَى

الفَضَاءَات المتريّة و الفَضَاءَات المعيَارية. اَلترَاص في الفَضَاءَات المتريّة نظريّة بلزَنو ويرَاستـرَاس. و نظريّة ريتس و نظريّة أسكولي. نظريّة بَار و نظريّة العنصر الثَّابت. فَضَاءَات بنَاخ و المُؤثرَات الخطية المحدُودة عليهَا. نظريّة هَان بنَاخ و نظريّة الدَّالة المفتُوحة و نظرية الرسم المُغلق. فَضَاءَات هلبَارت و أسَاس هلبَارت و نظريّة بَارسفَال. اَلمُؤثرَات المرَافقة و المُؤثرَات الهرميسيّة و الطّبيعيّة

المرَاجع

K.Yosida Functional Analysis
W.Rudin Functional Analysis
F.Riesz & B.Nagy Functional Analysis
E.Kreyszig Introduction to Functional Analysis with applications

التّقيّيم

الدّرجة الفصليّة ٦٠

اَلدّرجة النّهَائِيّة ٤٠

اَلمطلُوب من الطَالب هومُحتوَى المحَاضرَات المختصر في هذه المذكرة و هنَاك درجَات تحفيزيّة لِلإستفسَارَات الجيّدة و محَاولَات حلّ التّمَارين الجيّدة.

اَلفَضَاءَات الخطية المعيَارية

تعريف

إِذَا كَان E فضَاءً خطيًا حقيقيًا نسمّي معيَارًا $Norm$ علَى الفضَاء الخطي E كلّ دَالّة $||x|| \longrightarrow x$ معرفة علَى E و موجبة و مُحقّقة لِلشروط التَالِيةَ

١) $\forall x \in E, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

٢) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

٣) $\forall x \in E, \forall y \in E, ||y + x|| \leq ||x|| + ||y||$

عندهَا يُسمّى الزّوج $(E, ||\ ||)$ فضَاءً معيَاريًا $(Normed\ space)$

أمثلة

١) $X = \mathbb{R}$ و $x \to |x|$ هو معيَار علَى $\mathbb{R}$

٢) اَلدوَال التَّالية هي ثلَاثة معَايِير علَى $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, ..., x_n) \to ||x||_\infty = \sup_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \to ||x||_1 = \Sigma_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \to ||x||_2 = (\Sigma_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

و هذَا الأخير يسمَّى المعيَار الإِقليدي. إِذَا ذكرنَا المعيَار علَى $\mathbb{R}^n$ دون تحديده فإِنَّنَا نقصد المعيَار الإِقليديّ. فَالفضَاء الإِقليديّ $\mathbb{R}^n$ هو الزوج $(\mathbb{R}^n, ||\ ||_2)$

في التّحليل الدَّاليّ عَادة مَا يكون E فضَاء دوَال فمثلًا

٣) اَلدّوَال التَّالية هي معَايِير علَى $C([a, b])$

$$||f||_\infty = sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\}$$

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$$

مُلَاحظة

إذَا كَان $(E, ||\ ||)$ فضَاءً معيَاريًا فإنّ $d(x,y) = ||x-y||$ هي دَالّة مسَافة إذ أنّ

١) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad ||x-y|| = d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

٢) اَلتّنَاظر $\forall (x,y) \in E \times E, d(x,y) = ||x-y|| = ||y-x|| = d(y,x)$

٣) متبَاينة المُثلّث

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E; d(x,z) = ||x-z|| \leqslant ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z)$$

إذًا كلّ فضَاءٍ معيَاريٍ يكون فضَاءً متريًا $(Metric\ space)$

تعريف

إذَا كَان (X,d) فضَاءً متريًّا و $A \subset X$ فإنّ $(A, d_{|A\times A})$ يسمَّى فضَاءً متريًّا جزئيًّا

تعريف

إذَا كَان (X,d) فضَاءً متريًّا و $a \in X$ فإنّنَا نعرّف الكرّة المفتُوحة التي مركزهَا $a \in X$ و نصف قطرهَا $0 \leq r$ بأَنّهَا

$$B(a,r) = \{x \in X, d(a,x) < r\}$$

أَمثلة

١) في $(\mathbb{R}, |\ |)$ كرّة الوحدة $B(0,1)$ هي $]-1,1[$

٢) في $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ فإنّ كرّة الوحدة $B_{||\ ||_\infty}((0,0),1)$ هي المُربّع ذو مركز $(0,0)$ و نصف ضلع 1

٣) صوّر في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ كرَّاة الوحدة بَالنسبة لِلمعَايِير $||x||_1$ و $||x||_2$

تعّريف

لتكن O مجمُوعة جزئِيّة من فضَاءٍ متري (X,d) نقولُ أنّ O مجمُوعة مفتُوحة أو مفتوح إن تحقّق الشرط التَالي

$$\forall x \in O, \exists r > 0, B_d(x,r) \subset O$$

أَمثلة

١) اَلمجمُوعة الفَارغة $\emptyset$ هي مجمُوعة مفتُوحة من الفضَاء المتري (X,d)

٢) كلّ فضَاءٍ X هو مجمُوعة مفتُوحة من (X,d)

٣) كلّ كرّة مفتُوحة من فضَاءٍ متري (X,d) تكُون مجمُوعة مفتُوحة

ذلك أنّه إن كانت $B(a,r)$ كرّة مفتوحة و $x \in B(a,r)$ فإنّ $d(x,a) < r$ لتكن $\varepsilon = r - d(x,a) > 0$
و $z \in B(x,\varepsilon)$ فإنّ $d(a,z) \leq d(x,a) + d(x,z)$ و هذا يعطي $d(a,z) < \varepsilon + d(x,a) < r$ و بالتّالي
فإنّ $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$ أي أنّ $B(a,r)$ هي مجموعة مفتوحة

٤) و بهذا تكون كلّ مجموعة مفتوحة إتّحاد كرّات مفتوحة ففي $\mathbb{R}$ كلّ مجموعة مفتوحة تكون إتّحاد فترات مفتوحة.

خصائص المجموعات المفتوحة في فضاءٍ متري

في فضاءٍ متري (X,d) لنا

١) Φ و X مجموعتان مفتوحتان

٢) تقاطع عدد محدود من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة

٣) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة

تعريف

ليكن (X,d) فضاءً متريًا و $A \subset X$ نقول أنّ A مُغلقٌ إذا و فقط إذا كان $X \setminus A$ مفتوحًا

نقول أنّ $x \in A$ هي نقطة داخليّة للمجموعة A إن وجد مفتوح O بحيث $x \in O \subset A$

نرمُز إلى مجموعة النّقاط الداخلية للمجموعة A بالرّمز A^0 و هكذا يكون A^0 أكبر مجموعة مفتوحة موجودة في A في حين أنّنا نعرف $\overline{A}$ بأنّه أصغر مغلق يحتوي على A

أمثلة

١) إذا كان A مفتوح فإنّ $A^0 = A$

٢) $\{3 \cup]1,2[\}^0 =]1,2[$ في حين أنّ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

تعريف

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير فارغتين من فضاءٍ متري (X,d) نعرّف المسافة بين A و B بأنّها
$d(A,B) = \inf\{d(x,y); x \in A, y \in B\}$

نظريّة

ليكن (X,d) فضاءً متريًا و $A \subset X$ فإنّه يتكافأ

١) الفضاء الجزئي A مُغلقٌ في (X,d)

٢) $\forall x \in X,\ d(x,A)=0 \Leftrightarrow x \in A$

٣) لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من A تَتقَارب من $x \in X$ فإِنّ $x \in A$

برهَان

1) $\Leftarrow$ 2) لنفترض أنّ A مُغلقًا في (X,d) و لتكن $x \in X$ بحيث $d(x,A)=0$ بمَا أن A^c مفتوح لو كَان $x \notin A$ أي أنّ $x \in A^c$ لوجد $r>0$ بحيث $B(x,r) \subset A^c$ إِذًا $\forall y \in A,\ d(x,y)>r$ إِذًا $d(x,A) \geq r$ ، و هذَا تعَارض.

2) $\Leftarrow$ 3) لتكن (x_n) متتَابعة من A تَتقَارب من $x \in X$ أي $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$ فإِنّ

$$d(x,A)=\inf_{y\in A} d(x,y) \leq \lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$$

إِذًا من 2) ينتج $x \in A$

3) $\Leftarrow$ 1) لنفترض 3) لو كَان A غير مُغلقٍ لكَان A^c غير مفتوح إِذًا لوجد $x \in A^c$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N}, B(x,\frac{1}{n}) \not\subset A^c$ أي $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A \bigcap B(x,\frac{1}{n})$ إِذًا $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$ أي (x_n) متتَابعة من A تَتقَارب من $x \notin A$ و هذَا يتعَارض مع 3) .

تعريف

لتكن A مجموعة جزئِية غير فَارغة من فضَاءٍ متري (X,d) نعرّف قطر A بأَنّه $\delta(A)=\sup\{d(x,y); x\in A, y\in A\}$ نقول أَنّ A محدودة إِن كَان قطره متنهي

أَمثلة

١) تكون المجموعة الجزئِية محدودة إِذ و فقط إِذ كَان موجودة دَاخل كرّة.

٢) في $(\mathbb{R},|\ |)$ مجموعة $\{(n+1)^{\frac{1}{n}};\ n\in\mathbb{N}\}$ محدودة في حين أَنّ $\{(n+1)cosn;\ n\in\mathbb{N}\}$ غير محدودة

ملَاحظة

$x \in \overline{A}$ إِذَا و فقط إِذَا كَانت $d(x,A)=0$ و كذلك

$x \in A^0$ إِذَا و فقط إِذَا كَانت $d(x,A^c)>0$

برهَان

$d(x,A)=0$ يتكَافأُ مع $\forall r>0, \exists y \in A \bigcap B(x,r)$ و هذَا يتكَافأُ مع $x \in \overline{A}$

$d(x,A^c)>0$ يتكَافأُ مع $\exists r>0, A^c \bigcap B(x,r)=\emptyset$ و هذَا يتكَافأُ مع $x \in A^0$

تعريف

نقول أنّ المعيَارين $||\ ||_1$ و $||\ ||_2$ علَى الفضَاء E مُتكَافِئَان إذَا و فقط إذَا تحقّق الشرط التّالي

$$\exists a > 0, \exists b > 0, \forall x \in E, \quad a||x||_1 \leq ||x||_2 \leq b||x||_1$$

تمَارين

١) بيّن أنّ كلّ معيَارين مُتكَافِئين يولّدَان نفس التّوبولوجيَا أي نفس المجموعَات المفتوحة

٢) علَى $C([a,b])$ لتكن $||f||_\infty = sup\{|f(t)|, t \in [a,b]\}$ و $||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ و $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$ بيّن أنّ كلّ معيَارين من المعَايير السَّابقة غير متكَافآن

تعريف

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من فضَاءٍ متري (X,d) نقول أَنّ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقَارب من $x \in X$ و نكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ إذَا و فقط إذَا تحقّق $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ أَي

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n,x) \leq \epsilon$$

نقول أَنّ x هو نهَاية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و نقول أنّ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشيّة إذَا و فقط إذَا تحقّق مَا يلي

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, d(x_n,x_m) \leq \epsilon$$

نظريّة

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من فضَاءٍ متري (X,d) تتقَارب فإِنّ نهَايتهَا تكون وحيدة و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون كوشيّة

برهَان

إذَا كَانت x و x' نهَايتي $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فإنّ $d(x,x') \leq d(x,x_n) + d(x_n,x')$ و بمَا أَنّ $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x') = 0$ فإِنّ $d(x,x') \leq \lim_{n\to\infty}(d(x,x_n) + d(x_n,x)) = 0$ أَي $x = x'$

لنثبت أنّ (x_n) كوشيّة بمَا أَنّ $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ ، فإِنّ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

إذًا $\forall n > N, \forall m > N, d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \varepsilon$

وبهذَا تكون (x_n) كوشيّة .

نظريّة

١) في $\mathbb{R}^n$ تكون متتَابعة متقَاربة إذَا و فقط إذَا كَانت كلّ إحدَاثيَّاتِهَا متقَاربة في $\mathbb{R}$

٢) في $\mathbb{R}^n$ تكون متتَابعة متقَاربة إذَا و فقط إذَا كَانت كوشيّة

٣) في $\mathbb{R}^n$ كلّ متتَابعة محدودة لهَا متتَابعة جزئيّة متقَاربة $Bolzano-Weierastrass$ بولزَنو فَايرسترَاس

برهَان

لنأخذ متتَابعة $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}^n$ حيث $X_p=(x_{1,p},..,x_{n,p})$

١) لنفترض أنّ $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ تتقَارب من $X=(x_1,..,x_n)$ · لكلّ $1\le j\le n$ لنَا

$$|x_j-x_{j,p}|\le d(X_p,X)\le\sum_{j=1}^{n}|x_j-x_{j,p}|$$

فنستنتج أنّ

$$\lim_{p\to\infty}d(X_p,X)=0\Leftrightarrow\forall 1\le j\le n,\ \lim_{p\to\infty}|x_j-x_{j,p}|=0$$

أي تكون $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ متقَاربة إذَا و فقط إذَا كَانت كلّ إحدَاثيَّاتِهَا متقَاربة في $\mathbb{R}$

٢) من النّظريّة السَّابقة نعرف أنه في أيّ فضَاء متري كل متتَابعة متقَاربة تكون كوشيّة أمَّا العكس إذَا كَانت $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ كوشيّة فبمَا أنّ لكلّ $1\le j\le n$ لنَا $|x_{j,q}-x_{j,p}|\le d(X_p,X_q)$ فإنّ كلّ إحدَاثيَات $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ تكون كوشيّة في $\mathbb{R}$ و نعرف في $\mathbb{R}$ أنّ المتّتَابعة تكون متقَاربة إذَا و فقط إذَا كَانت كوشيّة· إذًا من ١) فإنّ $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ متقَاربة إذ أنّ ٣) بالإستقرَاء الريَاضي عندمَا $n=1$ نعرف أنّه في $\mathbb{R}$ كلّ متتَابعة محدودة لهَا متتَابعة جزئيّة متقَاربة لنفترض أنّنَا برهنَّا ٣) في $\mathbb{R}^{n-1}$ إذَا كَانت $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ محدودة في $\mathbb{R}^n$ فإن إحدَاثيَاتِهَا الأولَى تكون متتَابعة $(x_{1,p},..,x_{n-1,p})_{p\in\mathbb{N}}$ محدودة في $\mathbb{R}^{n-1}$ إذًا لهَا متتَابعة جزئيّة $(x_{1,p_n},..,x_{n-1,p_n})$ متقَاربة المتّتَابعة x_{n,p_n} هي كذلك محدودة في $\mathbb{R}$ إذًا لهَا متتَابعة جزئيّة $(x_{n,p_{n_k}})$ متقَاربة إذًا كلّ إحدَاثيَات $(X_{p_{n_k}})$ متقَاربة إذًا هي متقَاربة·

تعريف

لتكن A مجموعة جزئِية غير فَارغة من فضَاءٍ متري (X,d) نقول أَنّ A مترَاصّ إذَا و فقط إذَا كلّ غطَاء لِلمجموعة A بمجموعَات مفتوحة يمكن أن نستخلص منه غطَاء جزئِي متهي

أَمثلة

١) كلّ مجموعة جزئِية متهية من فضَاءٍ متري (X,d) تكون مترَاصّ

٢) لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من فضَاءٍ متري (X,d) تَتقَارب من x فإِنّ $K=\{x\}\bigcup\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ يكون متَرَاص

نظريّة

ليكن A متَرَاصًّا من فضَاءٍ متري (X,d) فإِنّ A يكون محدودًا و مغلقًا

برهَان

١) يكون A محدودًا ذلك أنّه لكلّ $x\in X$ فإِنّ $\{B(x,n), n\in\mathbb{N}\}$ هو غطَاء لكلّ X بمجموعَات مفتوحة إِذًا كذلك هو غطَاء لكلّ A بمَا أنّ A متَرَاص يمكن أن نستخلص غطَاءً متهي $A\subset B(x,n_1)\bigcup..\bigcup B(x,n_k)$ لتكن $N=\sup_{j=1}^{k} n_j$ فإِنّ $A\subset B(x,N)$

٢) يكون A مغلقًا ذلك أنّه لكلّ متتَابعة (x_n) من A تَتقَارب من $x\in X$ فإِنّ $x\in A$ و إِلَّا فإِنّ $x\not\in A$ عندهَا $\{y\in X, d(x,y)>\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ هو غطَاء لِلمجموعة $X\setminus\{x\}$ بمجموعَات مفتوحة إِذًا هو غطَاء المجموعة A لَا يمكن أن نستخلص منه غطَاء متهي.

نظريّة

لتكن A متَرَاصًّا من الفضَاء المتري (E,d) فإِنّ $F\subset A$ يكون متَرَاصًّا إِذَا و فقط إِذَا كَان مغلقًّا

برهَان

نعرف أنّ كلّ متَرَاص يكون مغلقًا أمَّا إِذَا كَان F مغلقًّا من متَرَاصٍّ A و $(O_i)_{i\in I}$ غطَاء لِلمجموعة F بمجموعَات مفتوحة فإِنّ $F^c,(O_i)_{i\in I}$ يكون غطَاءً لِلمجموعة A بمجموعَات مفتوحة بمَا أنّ A متَرَاص يمكن أن نستخلص غطَاءً متهي $F^c,O_{i_1},..,O_{i_n}$ إِذًا $O_{i_1},..,O_{i_n}$ يكون غطَاءً متهي لِلمجموعة F

نظريّة

لتكن (A,d) فضَاءً متريًا فإِنّ A يكون متَرَاص إِذَا و فقط إِذَا كلّ متتَابعة من A لهَا متتَابعة جزئِيّة متقَاربة في A .

برهَان

ليكن A متَرَاص و (x_n) متتَابعة من A الكرَات $\{B(a,1), a\in A\}$ تغطي A يمكن أن نستخلص غطَاءً متهي إِحدَى هذه الكرَات لنقل $B(a_1,1)$ ستحتوي x_n لعدَدٍ غير متهي من $n\in\mathbb{N}$.

يكون $A_1=\overline{B(x_1,1)}\bigcap A$ متَرَاص لأنّه مغلق من متَرَاص في A_1 لنَا $\{B(a,\frac{1}{2}), a\in\overline{B(x_1,1)}\}$ تغطي A_1 يمكن أن نستخلص إِذًا غطَاءً متهي إِحدَى هذه الكرَات لنقل $B(a_2,\frac{1}{2})$ ستحتوي x_n لعدَدٍ غير متهي من $n\in\mathbb{N}$ ليكن $A_2=A_1\bigcap\overline{B(a_2,\frac{1}{2})}$ و هكذَا دوَاليك نبني متَرَاصَّات $A_p\supset A_{p+1}$ بحيث A_p

يحتوي x_n لعدَدٍ غير متهي من $n \in \mathbb{N}$ · و قطر A_p لَا يزيد علَى $\frac{1}{2^p}$

لو كَان $\bigcap A_p = \emptyset$ لكَان $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ غطَاءً لِلمجموعة A بمجموعَات مفتوحة إذًا نستخلص منه غطَاء متهي· $A_1^c \bigcup .. \bigcup A_p^c$ بمَا أنّ $A_1^c \bigcup .. \bigcup A_p^c = A_p^c$ فهذَا لَا يغطّي A_p و هذَا تعَارض · إذًا $\bigcap A_p \neq \emptyset$ ليكن $x \in \bigcap A_p$ و (x_{n_p}) متَتَابعة جزئِيّة من (x_n) بحيث $x_{n_p} \in A_p$ فإنّ $d(x_{n_p}, x) \leq \frac{1}{2^p}$ إذًا المتَتَابعة الجزئِيّة (x_n) لهَا متَتَابعة جزئِيّة (x_{n_p}) متقَاربة في A ·

أمَا الإتّجَاه الثَاني لنفترض أنّ كلّ متَتَابعة من A لهَا متَتَابعة جزئِيّة متقَاربة في A · و ليكن $(O_i)_{i\in I}$ غطَاءً لِلمجموعة A بمجموعَات مفتوحة فإنّه **يوجد** $r > 0$ **بحيث لكل** $x \in A$ **تكون** $B(x,r)$ **محتوَاة في أحد المجموعَات** O_i **و إلَّا** فلكلّ $n \in \mathbb{N}$ يوجد x_n بحيث $B(x_n, \frac{1}{n})$ ليست محتوَاة في أيٍّ من المجموعَات O_i من خَاصّية A فإنّ (x_n) لهَا متَتَابعة جزئِيّة (x_{n_p}) متقَاربة من $x \in A$ و بمَا أنّه يوجد $i_0 \in I$ بحيث $x \in O_{i_0}$ فحتمًا إنطلَاقًا من رتبة معيّنة تكون $B(x_{n_p}, \frac{1}{n_p}) \subset O_{i_0}$ و هذَا تعَارض· ليكن $x_1 \in A$ يوجد O_{i_1} يحتوي $B(x_1, r)$ · إن كَان $A \subset B(x_1, r)$ فإنّ O_{i_1} يكون غطَاءً متهي لِلمجموعة A و إلَّا يوجد $x_2 \in (A \setminus B(x_1, r))$ بمَا أنّه يوجد O_{i_2} يحتوي $B(x_2, r)$ · فإمَّا أن يكون $O_{i_1} \bigcup O_{i_2}$ غطَاءً متهي لِلمجموعة A و إلَّا يوجد $x_3 \in (A \setminus (B(x_1, r) \bigcup B(x_2, r))$ ...و هكذَا إمَّا أن نستخلص غطَاءً متهي لِلمجموعة A و إلَّا يوجد (x_n) من A تحقّق $r \leq d(x_n, x_j), \forall n \neq j$ عندهَا (x_n) ليس لهَا متَتَابعة جزئِيّة (x_{n_p}) متقَاربة من $x \in A$ · هذَا تعَارض مع خَاصّية A · إذًا لَا بدّ أن نستخلص غطَاءً متهي لِلمجموعة A · إذًا A مترَاص

نظريّة (هَاين بوريل)

لتكن A مجموعة جزئِية من $\mathbb{R}^n$ فإنّ A يكون مترَاصًا إذَا و فقط إذَا كَان محدودًا و مغلقًا

برهَان

في أيّ فضَاء متري نعرف أنّ كلّ مترَاص يكون محدودًا و مغلقًا أمَّا إذَا كَان A محدودًا و مغلقًا و كَانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متَتَابعة من A فهي محدودة إذًا من بولزَانو فَايرسترَاس لهَا متَتَابعة جزئِيّة متقَاربة في $\mathbb{R}^n$ بمَا أنّ A مغلق فإنّ $\lim_{n\to\infty}(x_n)$ تبقَى في A ·

إذًا كلّ متَتَابعة من A لهَا متَتَابعة جزئِيّة متقَاربة في A · و هذَا يتكَافَأُ مع أن A مترَاصّ

الإتّصَال

تعريف

ليكن (X,d) و (Y,δ) فضَاءَين متريَين و $a \in X$ نقول أنّ $f : X \to Y$ متّصلة عند a إذَا و فقط إذَا

تحقّق الشرط التّالي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x,a) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$$

نقول أنّ f متّصلة إذَا و فقط إذَا كَانت متّصلة عند كلّ $a \in X$

نظريّة

ليكن (X,d) و (Y,δ) فضَاءَين متريَين و $a \in X$ فانّ $f : X \to Y$ تكون متّصلة عند a إذَا و فقط إذَا تحقّق الشرط التّالي لكل متَتابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من X تَتقَارب من a فإنّ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من $f(a)$

مثَال

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تحقّق $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{c}{n}) = \frac{c}{1+c^2}$ إذًا f غير متّصلة عند $(0,0)$

ملَاحظة

١) كمَا هو الشأن لِلدوَال الحقيقيّة إذَا كَانت f متّصلة عند a و g متّصلة عند $f(a)$ فإنّ $g \circ f$ تكون متّصلة عند a

٢) إذَا كَانت $f : X \to \mathbb{R}$ و $g : X \to \mathbb{R}$ متّصلتين عند a فإنّ $f+g$ و $f.g$ و كذلك $\frac{f}{g}$ إن كَان $g(a) \neq 0$ تكون متّصلة عند a

٣) لتكن

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathbb{R}^q \\ & x & \to & (f_1(x), .., f_q(x)) \end{array}$$

فإنّ f تكون متّصلة عند a إذَا و فقط إذَا كلّ إحدَاثيَاتهَا f_j متّصلة عند a

نظريّة

لتكن (X,d) و (Y,δ) فضَاءَين متريَّين و $f : X \to Y$ فإنّ العبَارَات التّالية تكون متكَافِئة

١) اَلدَّالة f متّصلة

٢) لكلّ مفتوحٍ $O \subset Y$ يكون $f^{-1}(O)$ مفتوحًا من X

٣) لكلّ مغلقٍ $F \subset Y$ يكون $f^{-1}(F)$ مغلقًا من X

٤) لكلّ $A \subset X$ يكون $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

نظريّة

ليكن (X,d) و (Y,δ) فضَاءَين متريَين $f : X \to Y$ دَالة متّصلة فلكل متَرَاصٍّ $X \supset A$ يكون $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ متَرَاصًّا من Y

برهَان

ليكن $A \subset X$ مترَاصّ $f : X \to Y$ دَالة متّصلة و $(O_i)_{i\in I}$ غطَاءً لِلمجموعة $f(A)$ بمجموعَات مفتوحة $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ يكون غطَاءً لِلمجموعة A بمجموعَات مفتوحة لأنّ $f : X \to Y$ دَالة متّصلة بمَا أنّ A مترَاصّ يمكن أن نستخلص منه غطَاء متنهي $f^{-1}(O_{i_1}), .., f^{-1}(O_{i_n})$ إِذًا $O_{i_1}, .., O_{i_n}$ هو غطَاء جزئِي متنهي.

نظريّة

ليكن (X,d) فضَاءً مترَاصًّا و (Y,δ) فضَاءً متريًّا و $f : X \to Y$ دَالة متّصلة

فإِنّهَا تكون منتظمة الإِتّصَال

برهَان

لتكن $\epsilon > 0$ بمَا أنّ $f : X \to Y$ دَالة متّصلة فلكلّ $X \ni x$ توجد $\eta_x > 0$ بحيث $d(x,y) < \eta_x \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ الكرَات $\{B(x, \frac{\eta_x}{2}), x \in X\}$ تغطّي X إِذًا يمكن أن نستخلص غطَاء متنهي $\{B(x_1, \frac{\eta_{x_1}}{2}), .., B(x_n, \frac{\eta_{x_n}}{2}\}$ لتكن $\eta = \inf\limits_{j=1}^{n} \frac{\eta_{x_j}}{2}$ لتكن $X \ni x$ و $X \ni y$ بحيث $d(x,y) < \eta$ فإِنّه يوجد $1 \leq j \leq n$ بحيث $B(x_j, \frac{\eta_{x_j}}{2}) \ni x$ لنَا $d(x,x_j) < \eta_{x_j}$ إِذًا $\delta(f(x), f(x_j)) < \frac{\epsilon}{2}$ و كذلك $d(y,x_j) \leq d(x,y) + d(x,x_j) < \eta_{x_j}$ إِذًا $\delta(f(y), f(x_j)) < \frac{\epsilon}{2}$ ينتج إِذًا أنّ

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(y), f(x_j)) + \delta(f(x), f(x_j)) < \epsilon$$

نظريّة

ليكن (X,d) فضَاءً مترَاصًّا و $f : X \to \mathbb{R}$ دَالة متّصلة

فإِنّهَا تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى علَى X و تصل إِلَى قيمتهَا الصّغرَى علَى X

برهَان

لتكن f دَالة متّصلة علَى مترَاصّ X و لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متّتَابعة من X تحقّق $\sup\limits_{x\in X} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ بمَا أنّ X مترَاصّ توجد متّتَابعة جزئِيّة (x_{n_k}) من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقَارب من $X \ni x$. و بمَا أنّ f دَالة متّصلة فإِنّ

$$f(x) = \lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = \sup_{x \in X} f(x)$$

و كذلك $g = -f$ تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى. عند $y \in X$ إذًا

$$-f(y) = g(y) = \sup_{x \in X} -f(x) = -\inf_{x \in X} f(x)$$

أي f تصل إِلَى قيمتهَا الصّغرَى عند y .

نظريّة

ليكن $\varphi : E \to F$ تقَابلًا خطّيًا بين فضَائِين حقيقِيَين فإِنّ N يكون معيَارًا علَى F إذَا و فقط إِذَا كَان $N \circ \varphi$ معيَارًا علَى E

برهَان

لنفترض أنّ N يكون معيَارًا علَى F فإِنّ

١) لكل $x \in E$ فإِنّ $(x = 0) \Leftrightarrow (\varphi(x) = 0) \Leftrightarrow (N \circ \varphi(x) = 0)$

٢) اَلتّنَاظر لكل $x \in E$ و لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فإِنّ

$$N \circ \varphi(\lambda x) = N(\lambda \varphi(x)) = |\lambda| N \circ \varphi(x)$$

٣) متبَاينة المثلث لكل $x \in E$ و لكل $y \in E$ فإِنّ

$$N \circ \varphi(x + y) = N(\varphi(x) + \varphi(y)) \leq N(\varphi(x)) + N(\varphi(y))$$

أمَّا إِذ كَان $N \circ \varphi$ معيَارًا و ψ هو معكوس φ فإِنّه تقَابل خطّي إِذًا مِمّا سبق يكون $N = N \circ \varphi \circ \psi$ معيَارًا.

نظريّة

إِذَا كَان بعد E متهي فإِنّ اي معيَارين علَى E يكونَان متكَافئِين

برهَان

لنفترض أنّ $E = \mathbb{R}^n$ و أنّ N معيَار علَى $\mathbb{R}^n$ لنبيّن أنّ N متكَافِئٌ مع $||\ ||_2$

ليكن $e_1, .., e_n$ الأَسَاس الطبيعي علَى $\mathbb{R}^n$ لَكل $x \in \mathbb{R}^n$ و لكل $y \in \mathbb{R}^n$ لنقل $x = (x_1, .., x_n) = x_1 e_1 + .. + x_n e_n \quad y = (y_1, .., y_n) = y_1 e_1 + .. + y_n e_n$ فإِنّ

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| &\leq N(x - y) = N((x_1 - y_1)e_1 + .. + (x_n - y_n)e_n) \\ &\leq \Sigma |x_j - y_j| N(e_j) \leq ||x - y||_2 \Sigma N(e_j) \end{aligned}$$

إِذًا هذَا يبيّن أنّ N منتظمة الإتّصال علَى $\mathbb{R}^n$ بما أنّ $S = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x||_2 = 1\}$ متراَص لأنّه مغلق و محدود من $\mathbb{R}^n$ فإنّ N تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى b علَى S و تصل إِلَى قيمتهَا الصّغرَى a علَى S بما أنّ $(N(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ فإنّ $0 < a \leq b$ ليكن $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$ فإنّ $\frac{x}{||x||_2} \in S$ إِذًا $a \leq N(\frac{x}{||x||_2}) \leq b$ و من ثمّ فإنّ يكون N متكَافِئً مع $||\ ||_2$ ذلك أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad a||x||_2 \leq N(x) \leq b||x||_2$$

إِذَا كَان M معيَارًا ثَاني علَى $\mathbb{R}^n$ فإنّ M يكون متكَافِئً مع $||\ ||_2$ و من تعدّي علَاقة التّكَافُؤِ يكون M متكَافِئً مع N .

إِذَا كَان E أيّ فضَاء ذي بعد متهي و $\{v_1, .., v_n\}$ أَسَاسًا لِلفضَاء E فإنّ $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ المعرّفة حسب $\varphi(x_1, .., x_n) = x_1 v_1 + .. + x_n v_n$ هو تقَابل خطّي إِذًا مِمّا سبق يكون $N \circ \varphi$ و $M \circ \varphi$ معيَارين متكَافئِين علَى $\mathbb{R}^n$ إِذًا M و N معيَارَان همَا متكَافآن علَى E .

نظريّة

١) إِذَا كَان بعد E متهي فإنّ $K \subset E$ يكون مغلقًا و محدودًا من E إِذَا و فقط إِذَا كَان K متراَصًا

٢) إِذَا كَان F فضَاءً جزئِيًّا ذي بعد متهي من فضَاء معيَاري E فإنّ F يكون مغلقًا

برهَان

١) إِذَا كَان E أيّ فضَاء ذي بعد متهي و $\{v_1, .., v_n\}$ أَسَاسًا لِلفضَاء E و N معيَارًا علَى فضَاء E فإنّ $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ المعرّفة حسب $\varphi(x_1, .., x_n) = x_1 v_1 + .. + x_n v_n$ هو تقَابل خطّي إِذًا مِمّا سبق يكون $N \circ \varphi$ معيَارًا متكَافِئً مع $||\ ||_2$ علَى $\mathbb{R}^n$ إِذًا يوجد $0 < a < b$ بحيث $\forall x \in \mathbb{R}^n, a||x||_2 \leq N(\varphi(x)) \leq b||x||_2$ لنَا

$$|N(\varphi(x)) - N(\varphi(y))| = N(\varphi(x - y)) \leq b||x - y||_2$$

هذَا يبين أنّ φ منتظمة الإتّصَال.

ليكن $K \subset E$ مغلقًا و محدودًا عندهَا يكون $\varphi^{-1}(K)$ مغلقًا من $\mathbb{R}^n$ لنفترض أنّ $\sup_{y \in K} N(y) = R$ إِذًا $\sup_{x \in \varphi^{-1}(K)} N(\varphi(x)) = R$ و بما أنّ $\forall x \in \mathbb{R}^n, a||x||_2 \leq N(\varphi(x))$ فإنّ $\sup_{x \in \varphi^{-1}(K)} ||x||_2 \leq \dfrac{R}{a}$ إِذًا $\varphi^{-1}(K)$ هو محدود و مغلق من $\mathbb{R}^n$ إِذًا هو متراَص. و بما أنّ φ متّصلة فإنّ $\varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$ يكون متراَص أمّا العكس فنعرف أنّه في أيّ فضَاء متري يكون كلّ متراَص مغلقًا و محدودًا.

٢) إِذَا كَان F فضَاءً جزئِيًّا ذي بعد متهي من فضَاء معيَاري E كي نبيّن أنّه مغلقًا لنأخذ متّتَابعة (y_p) من F تتقَارب من $y \in E$ و لنبيّن أنّ $y \in F$

ليكن $\{v_1,..,v_n\}$ أساسًا لِلفضَاء F و N معيَار الفضَاء E فإنّ $\varphi:\mathbb{R}^n\to E$ المعرّفة حسب $\varphi(x_1,..,x_n)=x_1v_1+..+x_nv_n$ هو تقَابل خطّي بين $\mathbb{R}^n$ و F إذًا مِمَّا سبق يكون $N\circ\varphi$ معيَارًا متكَافِئً مع $||\ ||_2$ علَى $\mathbb{R}^n$ إذًا يوجد $0<a<b$ بحيث $\forall x\in\mathbb{R}^n, a||x||_2\leq N(\varphi(x))\leq b||x||_2$

بمَا أنّ φ تقَابل فلكلّ $p\in\mathbb{N}$ يوجد عنصر وحيد $x_p\in\mathbb{R}^n$ بحيث $\varphi(x_p)=y_p$ لنَا

$$a||x_p-x_q||_2\leq N(\varphi(x_p-x_q))=N(y_p-y_q)$$

بمَا أنّ (y_p) تَتقَارب من $y\in E$ فمِن المتبَاينة السَّابقة تكون (x_p) كوشيّة في $\mathbb{R}^n$ و بمَا أنّ $\mathbb{R}^n$ تَام إذًا (x_p) تَتقَارب من $x\in\mathbb{R}^n$ و بمَا أنّ $N(y_p-\varphi(x))=N(\varphi(x_p-x))\leq b||x_p-x||_2$ فإنّ (y_p) تَتقَارب من $\varphi(x)\in F$ إذًا $y=\varphi(x)\in F$ إذًا يكون F مغلقًا من E .

نظريّة $(F.Riez)$

ليكن $(E,||\ ||)$ فضَاءً خطيًا معيَاريًا فإنّ بعد E يكون محدودًا إذًا و فقط إذًا كَانت كرة الوحدة $\overline{B}(0,1)=\{x\in E,||x||\leq 1\}$ متَرَاصًا في E

كي نبرهن هذه النظرية نعدّ التمهيدية التَّالية

تمهيدية

ليكن F فضَاءً خطّيًا جزئيًا مغلقًا من فضَاء معيَاري E بحيث $F\neq E$ فإنّه يوجد $a\in E$ محقّقًا لِلشرطين التَّاليّن

١) $||a||=1$ وَ ٢) $d(a,F)\geq\frac{1}{2}$

برهَان

ليكن $x\in E\setminus F$.بمَا أن F مغلق فإنّ $0<r=d(x,F)$ و بمَا أنّ $d(x,F)=inf\{||x-y||;y\in F\}$ فإنّه يوجد $y_0\in F$ بحيث $r<||x-y_0||<2r$ ليكن $a=\frac{x-y_0}{||x-y_0||}$ فإنّ $||a||=1$ و كذلك لكلّ $y\in F$ فإنّ

$$d(y,a)=||y-\frac{x-y_0}{||x-y_0||}||=\frac{1}{||x-y_0||}||y(||x-y_0||)+y_0-x||>\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$$

برهَان نظريّة $(F.Riez)$

إِذَا كَان بعد E محدود فإنّ كلّ جزء مغلق و محدود يكون متَرَاصًا إِذًا تكون كرّة الوحدة متَرَاصًا أمّا إِذَا كَانت كرة الوحدة متَرَاصَا فإن $\overline{B}(0,1)$ يكون غطَاء $(B(e,\frac{1}{2}))_{e\in\overline{B}(0,1)}$ بأجزَاء مفتوحة بمَا أنّ $\overline{B}(0,1)$ مُتَرَاصًا فإنّه يوجد غطَاء متنهي $\overline{B}(0,1)\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(e_k,\frac{1}{2})$ ليكن F الفضَاء الجزئِي المُولّد من $e_1,...,e_n$ يكون بعد F أصغر من n و $F=E$ و إلَا فمِن التمهيدية فإنّه نجد $a\in\overline{B}(0,1)$ و

$a \notin \bigcup_{k=1}^{n} B(e_k, \frac{1}{2})$ ذلك أنّ $d(a,F) > \frac{1}{2}$ و هذَا مُستحيل

تمارين

١) بيّن أنّ معيَارين مُتكَافئِين يولّدَان نفس التّوبولوجيَا

٢) إِذَا كَان بعد E محدودًا فإِنّ اي معيَارين يكونَان متكَافئِين

٣) إِذَا كَان بعد E متهي فإِنّ كلّ مغلق و محدود من E يكون متَرَاصًا

٤) إِذَا كَان F فضَاءً جزئِيًّا ذي بعد متهي من فضَاء معيَاري E فإِنّ F يكون مغلقًا

٥) إِذَا كَان F_1 فضَاءً جزئِيًا مغلقًا و F_2 فضَاءً جزئِيًا ذي بعد متهي فإِنّ $F_1 + F_2$ يكون مغلقًا

٦) كلّ فضَاء جزئِيّ بعد تمَامه 1 إِمَّا أن يكون مغلقًا و إِمَّا أن يكون كثيفًا

نظريّة بَار $Baire$

تعريف

نقول أنّ المُتتَابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية في الفضَاء المتري (E,d) إن حقّقت

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall m\geq N,\forall n\geq N,d(x_n,x_m)\leq\epsilon$$

نقول أنّ الفضَاء المتري (E,d) تَام أو كَامل $complete$ إن كَانت فيه كلّ مُتتَابعة كوشية من (E,d) مُتقَاربة

نقول أنّ الفضَاء الخطي المعيَاري $(E,||\ ||)$ هو فضَاء بنَاخ إن كَان تَام

امثلة

١) كلّ فضَاء خطي معيَاري ذي بعد منتهي يكون فضَاء بنَاخ

٢) إذَا كَان $||f||=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ فإنّ $(\mathcal{C}([0,1]),||\ ||)$ هو فضَاءبنَاخ

٣) إذَا كَان $p\geq 1$ و $||f||_p=(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ فإنّ $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}),||\ ||_p)$ هو فضَاء بنَاخ

٤) إذَا كَان $||Q||=\sup_{x\in[0,1]}|Q(x)|$ فإنّ $(\mathbb{C}[X],||\ ||)$ هو فضَاء خطي معيَاري و ليس بِبنَاخ

نظرية

الفضَاء الخطي المعيَاري $(E,||\ ||)$ يكون تَامًا أو فضَاء بنَاخ إذَا و فقط إذَا تحقَّق فيه الشرط التَّالي تكون $\sum x_n$ مُتقَاربة في E كلّمَا كَانت $\sum||x_n||$ مُتقَاربة في $\mathbb{R}$

برهَان

إذَا كَان $(E,||\ ||)$ فضَاء بنَاخ و كَانت $\sum||x_n||$ مُتقَاربة فإنّ $X_n=\sum_{k=0}^n x_k$ تكون كوشية ذلك أنّ

$$||X_{n+k}-X_n||\leq\sum_{k>n}||x_n||\longrightarrow 0$$

و بهذَا تكون $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مُتقَاربة أي $\sum x_n$ مُتقَاربة

أمَا إذَا كَان الشرط متحقِّقًا و (x_n) مُتتَابعة في E كوشية فلهَا متتَابعة جزئِيّة (y_n) تحقِّق

$$||y_{n+1}-y_n||\leq\frac{1}{2^n}$$

إذًا المتتَابعة $u_1=y_1$ و $u_n=y_{n+1}-y_n, n>1$ تحقِّق $\sum_{k=1}^{\infty}||u_k||$ فبَالإعتمَاد علَى الشرط تكون $y_{n+1}=\sum_{k=1}^n u_k$ متقَاربة و بمَا أنّ في أيّ فضَاء متري كلّ متتَابعة كوشية لهَا متتَابعة جزئِيّة متقَاربة

تكون حتمًا متقَاربة. إذًا (x_n) متقَاربة و من ثمّ يكون E تَامًا.

نظريّة

١) ليكن (E,d) فضَاء متري و $F \subset E$ إذَا كَان (F,d) تَام فإِنّ F يكون مغلقًا

٢) أمّا إِذَا كَان (E,d) فضَاءً متريًا تَامًا و F مغلقًا في (E,d) فإِنّ (F,d) يكون تَامًا

برهَان

١) ليكن (E,d) فضَاء متري و $F \subset E$ إذَا كَان (F,d) تَام فإِنّ كلّ متتَابعة (x_n) من F تتقَارب من $x \in E$ تكون كوشيّة بمَا أنّ (F,d) تَام إذًا تتقَارب في F إذًا $x \in F$ إذًا يكون F مغلقًا لأنّ نهَاية كلّ متتَابعة (x_n) من F متقَاربة تبقَى في F

٢) إذَا كَان (E,d) فضَاءً متريًا تَامًا و F مغلقًا في (E,d) كي نثبت أنّ (F,d) يكون تَامًا لنأخذ متتَابعة (x_n) من F كوشيّة بمَا أنّ (E,d) تَام فإِنّ (x_n) تتقَارب من $x \in E$. بمَا أنّ F مغلق فإِنّ $x \in F$ إذًا كلّ كوشيّة من F تتقَارب في F و هذَا يثبت أنّ F تَام

تعريف

نقول أنّ الفضَاء التوبولوجي (E,τ) فضَاء بَار $(Baire)$ إن تحقَّق فيه كلّ متتَابعة من مجموعَات مفتوحة و كثيفة يكون تقَاطعهَا كثيفًا

$$(\forall n \in \mathbb{N}, O_n \in \tau, \overline{O_n} = E) \Rightarrow \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E$$

ملَاحظة

بَالإعتمَاد علَى المتمّم نرَى أنّ الفضَاء التوبولوجي (E,τ) يكون فضَاء بَار إذَا و فقط إذَا تحقّ الشرط التَّالي

لكلّ متتَابعة من مجموعَات F_n مغلقة في (E,τ) و دَاخل كلّ F_n فَارغ فإِنّ دَاخل إتّحَادهَا يكون فَارغًا

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n^\circ = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (\bigcup F_n)^\circ = \emptyset$$

نظريّة

كلّ مفتوح من فضَاء متري (E,d) تَام يكون فضَاء بَار

برهَان

ليكن O مفتوح غير فَارغ من فضَاء متري (E,d) تَام و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من مجموعَات مفتوحة و كثيفة في O · كي نثبت أنّ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ كثيفة في O يجب أن نثبت أنّه لكلّ مفتوح غير فَارغ $O \supset V$ فإنّ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \bigcap V \neq \emptyset$ بما أنّ $V_1 \bigcap V$ مفتوح غير فَارغ فهو يحتوي علَى كرة غير فَارغة $B(x_1, r_1)$ بما أنّ $V_2 \bigcap B(x_1, \frac{r_1}{2})$ غير فَارغ فهو يحتوي علَى كرة غير فَارغة $B(x_2, r_2)$ و بما أنّ $V_3 \bigcap B(x_2, \frac{r_2}{2})$ غير فَارغ فهو يحتوي علَى كرة غير فَارغة $B(x_3, r_3)$ و هكذَا دوَاليك نبني متتَابعة $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B(x_n, \frac{r_n}{2})} \subset B(x_n, r_n) \subset V_n \bigcap .. \bigcap V_1 \bigcap V$ نلَاحظ أنّه إِذَا كَان $m > n$ فإِنّ $d(x_m, x_n) \leq \frac{r_n}{2} \leq .. \leq \frac{r_1}{2^{n-1}}$ إِذًا (x_n) كوشيّة بما أنّ (E,d) تَام فإِنّهَا تتقَارب من $E \ni x$ · لكل $m > n$ فإِنّ $x_m \in \overline{B(x_n, \frac{r_n}{2})} \subset V_n$ إِذًا لكلّ $\mathbb{N} \ni n$ فإِنّ $x = \lim x_n$ تكون في المغلق $\overline{B(x_n, \frac{r_n}{2})}$ إِذًا $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \ni x$

نظريّة

كلّ أسَاس $(e_i)_{i\in I}$ لفضَاء بنَاخ E إِمَّا أن يكون متهي أو غير قَابل لِلعدّ

برهَان

لنفترض أنّ الفضَاء البنَاخي E له أسَاس $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قَابل لِلعدّ و غير متهي ليكن E_k الفضَاء الخطّي الجزئِي الذي أسَاسه $(e_1, .., e_k)$ بما أنّ بعد E_k متهي فهو مغلق و بما أنّ الفضَاء الخطّي الجزئِي $E \neq E_k$ فإِنّ دَاخل E_k فَارغ بما أنّ E فضَاء بَار فإِنّ دَاخل $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ فَارغ و هذَا تعَارض لأنّ $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ و دَاخل E هو E ·

تطبيق

١) لَا يمكن أن نجد معيَارًا $||\ ||$ علَى كثيرَات الحدود $\mathbb{R}[X]$ بحيث يكون $(\mathbb{R}[X], ||\ ||)$ فضَاء بنَاخ ذلك أنّ $\mathbb{R}[X]$ له أسَاس $1, X, .., X^n, ..$ قَابل لِلعدّ·

٢) رأينَا أنّ $(\mathcal{C}([0,1], ||\ ||_\infty)$ فضَاء بنَاخ وبما أنّ بعده غير متهي لأنّه يحتوي علَى $\mathbb{R}[X]$ إِذًا ليس له أسَاس قَابل لِلعدّ·

تعريف

ليكن $(E, ||\ ||)$ و $(F, ||\ ||)$ فضَائِين معيَارين كلّ تطبيق خطي $f : E \longrightarrow F$ يُسمَّى مُؤثّرًا خطّيًا

نظريّة

إِذَا كَان $f : E \longrightarrow F$ مُؤَثرا خطيَا فإِنّه يكون مُتصلَا في كَامل E إِن و فقط إِن كَان مُتصلَا عند الصفر

برهَان

إِذَا كَانت f مُتصلة عند الصفر و إِذَا كَان $x \in E$ لنأَخذ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ و بهذَا يكون $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n - x = 0$ و بما أَنّ f مُتصلة عند الصفر فإِنّ $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n - x) = f(0) = 0$ و بهذَا يكون $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = f(x)$ أي أَنّ f مُتصلة عند x

لتكن $L(E,F)$ مجموعة المُؤَثرات المتصلة من E الَى F

نظرية

يكون المُؤَثر $u : E \longrightarrow F$ مُتصلَا إِن و فقط إِن وجد $A > 0$ بحيث $\forall x \in E, ||u(x)||_F \leq A||x||_E$

ب) إِن كَان F فضَاء بنَاخ فإِنّ $L(E,F)$ يكون فضَاء بنَاخ

ج) إِن كَان F فضَاء بنَاخ و G فضَاءً جزئيًا كثيفًا في E فإِنّ لكلّ $u \in L(G,F)$ يوجد $\tilde{u} \in L(E,F)$ وحيد بحيث $\tilde{u}_{|G} = u$

برهَان

إِذَا كَان u مُتصلًا فإِنّ $u^{-1}(B(0,1))$ يكون مفتوحًا يحتوي علَى 0_E إِذًا يحتوي علَى إِحدَى الكرَات $B(0,r)$ حيث $r > 0$

$$\forall x \in E, ||x|| < r \Rightarrow ||u(x)|| < 1$$

لتكن $A > \frac{1}{r}$ فإِنّ

$$\forall x \in E, x \neq 0, ||u(x)||_F = ||x||_E||u(\frac{x}{||x||_E})||_F \leq A||x||_E$$

أَمَا العكس فبديهي إِذَا كَان

$$\forall x \in E, ||u(x)||_F \leq A||x||_E$$

و إِذَا كَانت x_n مُتتَالية بحيث $\lim u(x_n) = 0_E$ فإِنّ $\lim ||u(x_n)|| \leq A \lim ||x_n|| = 0$ و بهذَا تكون u مُتصلة

تعريف

ليكن $(E, ||\ ||)$ و $(F, ||\ ||)$ فضَائِين معيَارين لنعرّف بَالنّسبة لكلّ مُؤَثّر $u \in L(E,F)$ معيَار u كَالآتي

$$||u|| = \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||_F$$

١) نظرًا لما سبق فإِنّ

$\forall x \in E, ||u(x)|| \in \mathbb{R}+$

و كذلك

$(||u|| = 0) \Leftrightarrow (||u(x)|| = 0, \forall x \in E) \Leftrightarrow (u = 0)$

٢) كمَا أنّ

$\forall u \in L(E,F), \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||\lambda u(x)||_F = |\lambda| ||u||$

٣) و كذلك

$||u+v|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)+v(x)||_F \leq \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||_F + \sup_{||x|| \leq 1} ||v(x)||_F = ||u|| + ||v||$

هذَا و إن كَانت $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ مُتتَابعة كوشية من $L(E,F)$ فإنّ

$\forall x \in E, (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ تكون كوشية إذًا هي مُتَقَاربة نحو $u(x)$ و هكذَا نعرّف $u \in L(E,F)$ و بمَا أنّ

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall n \geq N, ||u_n - u_m|| \leq \epsilon$ فإنّ

$\sup_{||x|| \leq 1} ||u_n(x) - u_{n+k}(x)||_F \leq \epsilon$ أي $\sup_{||x|| \leq 1} ||u_n(x) - u(x)||_F \leq \epsilon$

و هذَا يبين أنّ $\lim ||u_n - u|| = 0$

و بهذَا يكون $L(E,F)$ كَاملًا

بمَا أنّ G كثيف في E فإنّ كلّ $x \in E$ هو حدّ لمُتَتَابعة (x_n) من G لنضع $\tilde{u}(x) = \lim u(x_n)$ حيث (x_n) تَتَقَارب من x هذَا التعريف جيد ذلك أنّه إن كَانت (x_n) و (x'_n) متَتَابعتين من G تَتقَارب من x فإنّ $\lim ||x_n - x'_n|| = 0$ و بمَا أنّ $||u(x_n - x'_n)|| \leq A||x_n - x'_n||$ فإنّ $\lim u(x_n) = \lim u(x'_n)$ إذَا كَانت $x = \lim x_n$ و $y = \lim y_n$ فإنّ $\tilde{u}(x + \lambda y) = \lim u(x_n + \lambda y_n) = \tilde{u}(x) + \lambda \tilde{u}(y)$ و هكذَا تكون $\tilde{u}$ خطية . إذَا كَان $x \in G$ ، فَالمُتَتَابعة $x_n = x$ تعطي $\tilde{u}(x) = \lim u(x_n) = u(x)$ نلَاحظ أنّ

$\sup_{||x|| \leq 1} ||\tilde{u}(x)|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$

و أخيرًا إذَا كَان v مُؤثرًا آخر محقّقًا لنفس الشروط فإنّ $\tilde{u} - v$ يكون مُتصلًا علَى E و يسَاوي صفر علَى جزءكثيف إذًا $\tilde{u} = v$ و بهذَا تكون $\tilde{u}$ هي المُؤثّر الوحيد الّذي يفي بشروط النظرية

نظريّة مبدَأ إنتظَام المحدُودية $Uniform\ boundedness\ principle$

ليكن E فضَاء بنَاخ و F فضَاءً معيَاريًا و $U \subset L(E,F)$ تحقّق

$$\forall x \in E, \exists M_x \geq 0, \sup\{||u(x)||, u \in U\} \leq M_x$$

فإنّه

$$\exists M > 0, \sup\{||u||, u \in U\} \leq M$$

برهَان

ليكن $F_n = \bigcap_{u\in U} \{x \in E, ||u(x)|| \leq n\}$ كتقَاطع لمجموعَات مغلقة يكون F_n مغلق و من المعطيَات فإنّ

$$\forall x \in E, \forall n \geq M_x, x \in F_n$$

إذًا $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$ من نظريّة بَار يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث يكون دَاخل F_{n_0} غير فَارغ إذًا

$$\exists x \in E, \exists r > 0, B(x, r) \subset F_{n_0}$$

إذًا

$$\forall y \in B(0, 1), \forall u \in U, ||u(x + ry)|| \leq n_0$$

و بمَا أنّ

$$u(y) = \frac{u(x + ry) - u(x)}{r}$$

أي أنّ

$$||u(y)|| = ||\frac{u(x + ry) - u(x)}{r}|| \leq \frac{2n_0}{r}$$

إذًا

$$\forall u \in U, ||u|| \leq \frac{2n_0}{r}$$

تعريف

نقول أنّ الدَّالة f بين فضَاءين متريَين مفتوحة إذَا و فقط إذَا كَانت صورة كلّ مفتوح بالدَّالة f مفتوحًا نقول أنّ الدَّالة f مغلقة إذَا و فقط إذَا كَانت صورة كلّ مغلق بالدَّالة f مغلقًا

أمثلة

الدَّالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرّفة حسب $f(x, y) = x$ تكون مفتوحة و ليست مغلقة ذلك أنّ

$$f(\{(x, y), xy \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

نظريّة

ليكن E و F فضَاءي بنَاخ و $f \in L(E, F)$ فإنّ f يكون مفتوحًا إذَا و فقط إذَا وجد $r > 0$ بحيث

$$0_F \in (f(B(0, r)))x_n$$

برهَان

إِذَا كَان f مفتوحًا فإِنّ $(f(B(0,r)))$ يكون مفتوحًا لأنّه صورة مفتوح بدَالة مفتوحة و بمَا أنّ f خطّية فإِنّ

$$0_F = f(0_E) \in f(B(0,r)) = (f(B(0,r)))^{\circ}$$

أمَّا الإِتّجَاه الثَّاني لنفترض وجود $r > 0$ بحيث

$$0_F \in (f(B(0,r)))^{\circ}$$

إِذًا توجد $t > 0, B(0_F,t) \subset f(B(0,r))$ ليكن V مفتوحًا من E و $y \in f(V)$ إِذًا توجد $x \in V, y = f(x)$ و توجد $\epsilon > 0, B(x,\epsilon) \subset V$ نلَاحظ أنّ

$$\frac{\epsilon}{r}B(0_F,t) \subset \frac{\epsilon}{r}f(B(0,r)) = f(B(0,\epsilon))$$

إِذًا

$$B(y,\frac{t\epsilon}{r}) = y + B(0_F,\frac{t\epsilon}{r}) \subset y + f(B(0_E,\epsilon)) = f(x) + f(B(0_E,\epsilon)) = f(B(x,\epsilon)) \subset f(V)$$

نستنتج أنّ $f(V)$ مفتوح

نظريّة ليكن E و F فضَاءي بنَاخ و $f \in L(E,F)$ دَالة شَاملة فإِنّ f تكون دَالة مفتوحة

برهَان

بمَا أنّ f شَامل فإِنّ

$$F = f(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(B(0_E,n))}$$

بإِعتمَاد بَار يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث دَاخل $\overline{f(B(0_E,n))}$ غير فَارغ إِذًا

$$\exists y \in F, \exists t > 0, B(y,t) \subset \overline{f(B(0_E,n_0))}$$

إِذًا

$$B(0_F,t) \subset \overline{f(B(0_E,2n_0))}$$

و من ثمّ فإِنّ

$$B(0_F,\frac{t}{2n_0}) \subset \overline{f(B(0_E,1))}$$

حتَّى نتمكّن من إِستعمَال النظريّة السَّابقة يجب أن نتخلّص من الإِغلَاق فِى الإِنتمَاء السَّابق

ليكن $\varepsilon = \frac{t}{2n_0}$ نلَاحظ أنّ

$$\forall n\mathbb{N}, B(0_F, \frac{\varepsilon}{2^n}) \subset \overline{f(B(0_E, \frac{1}{2^n}))}$$

و $w \in B(0_F, \varepsilon)$ يوجد $x_0 \in B(0_E, 1), ||w - f(x_0)|| < \frac{\varepsilon}{2}$ بمَا أنّ

$$(w - f(x_0) \in B(0_F, \frac{\varepsilon}{2})$$

فإِنّه يوجد $x_1 \in B(0_E, \frac{1}{2})$ بحيث

$$(w - f(x_0) - f(x_1)) \in B(0_F, \frac{\varepsilon}{2^2})$$

و هكذَا نبني بنفس الطّريقة متّتَابعة (x_n) من عنَاصر E تحقّق

$$x_n \in B(0_E, \frac{1}{2^n}), \ \ ||w - (f(x_0) + .. + f(x_n))|| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

بمَا أنّ E فضَاء بنَاخ و المتسلسلة متقَاربة مطلقًا.

$$\Sigma_{k=0}^{\infty}||x_k|| < \Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = 2$$

فإِنّه يوجد $x \in B_E(0, 2)$ يحقّق $x = \Sigma_{k=0}^{\infty}x_k$ إِذًا

$$B(0_F, \varepsilon) \subset f(B_E(0, 2))$$

ومن النظريّة السَّابقة تكون الدَّالة f مفتوحة

نظريّة

ليكن E و F فضَاءي بنَاخ و $f \in L(E, F)$ تطابق فإِنّ معكوسه $g = f^{-1}$ يكون متّصلًا.

برهَان

نظريّة الرّسم المغلق *closed graph theorem*

ليكن $f : E \to F$ مُؤثّر بين بنَاخين فإِنّه يكون متّصلًا إِن و فقط إِن كَان رسمه مغلقًا حيث رسم f هو $G_f = \{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$ و المعيَار علَى $E \times F$ هو $||(x, y)||_{E\times F} = ||x||_E + ||y||_F$

برهَان

إِذَا كَان f متّصلًا و $(x_n, f(x_n)) \in G_f$ متقَاربة من $(x, y) \in E \times F$ فإِنّ

$$y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

إذًا نهَاية كلّ متتَابعة متقَاربة من G_f تبقَى فيء G_f إذًا G_f مغلقًا

أمَّا إذَا كَان G_f مغلقًا من $E \times F$ ، بمَا $E \times F$ فضَاء بنَاخ فإنّ G_f يكون كَاملًا و $f : E \to F$ خطّي فإنّ G_f هو فضَاء بنَاخ

نلَاحظ أنّ $p_1 : (x, f(x)) \to x$ من G_f إلَى E هي تطَابق خطّي متّصل من النّتيجة السَّابقة يكون معكوسه $g : x \to (x, f(x))$ متّصلًا و بمَا أنّ $p_2 : (x, y) \to y$ متّصل فأنّ $p_2 \circ g = f$ يكون متّصلًا

نظريّة $(Hann-Banach)$

نظريّة $(Hann-Banach)$

إِذَا كَان E فضَاءً خطيًا علَى الحلقة $\mathbb{R}$ و $p:E\to\mathbb{R}$ تحقّق

$$\forall(x,y)\in E\times E,\ \ p(x+y)\leq p(x)+p(y)$$

$$\forall x\in E,\forall\alpha\geq 0,\ \ p(\alpha x)=\alpha p(x)$$

و إِذَا كَان F فضَاءً خطيًا جزئِيًّا من E و f دَالة خطّية علَى F تحقّق

$$\forall x\in F,f(x)\leq p(x)$$

فإِنّه توجد دَالة خطّية $\tilde{f}$ علَى E تحقّق

$$\forall x\in E,\tilde{f}(x)\leq p(x),\qquad \forall x\in F,\ \ \tilde{f}(x)=f(x)$$

برهَان

لنفترض أوّلًا أنّه يوجد $A\in E$ يحقّق $E=F\bigoplus<A>$ لكلّ $x\in E$ يوجد $x_F\in F$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ وحيدين بحيث $x=x_F+\alpha A$ أيّ تمديد $\tilde{f}$ يجب أن يحقّق

$$\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x_F+\alpha A)=f(x_F)+\alpha c$$

يجب أن نختَار $c=f(A)$ بحيث $f(x_F)+\alpha c\leq p(x_F+\alpha A)$ نعرف أنّه

$$\forall y\in F,f(x_F+y)\leq p(x_F+y)\leq p(x_F-A)+p(y+A)$$

إِذًا $\forall(y,y')\in F\times F,f(y')-p(y'-A)\leq p(y+A)-f(y)$ لتكن

$$\sup\{f(y')-p(y'-A),y'\in F\}\leq c\leq\inf\{p(y+A)-f(y),y\in F\}$$

لكلّ $\alpha>0$ ،

لنَا $f(y+\alpha A=f(y)+\alpha c=\alpha(f(\frac{y}{\alpha})+c)\leq\alpha p(\frac{y}{\alpha}+A)=p(y+\alpha A)$

و كذَالك لكلّ $\alpha>0$ ،

$$f(y-\alpha A)=f(y)-\alpha c=\alpha(f(\frac{y}{\alpha})-c)\leq\alpha p(\frac{y}{\alpha}-A)=p(y-\alpha A)$$

من تمهيديّة زورن $Zorn$ نستنتج وجود $\tilde{f}$

تمهيديّة زورن

ليكن $(E,\prec)$ فضَاء مرتّب ترتيب جزئِيّ ، إِذَا كَانت كلّ مجموعة $A\subset E$ مرتّبة ترتيب كلّي لهَا حدّ علوي فإِنّ E له عنصر عظيم

نذكرّ أنّ $a \in E$ هو عنصر عظيم إِذَا و فقط إِذَا

$$b \in E, a \prec b \Rightarrow a = b$$

و أنّ $A \subset E$ مرتّبة ترتيب كلّي إِذَا و فقط إِذَا لكلّ $a \in E$ و لكلّ $b \in E$ لنَا $a \prec b$ أو $b \prec a$

و نذكرّ كذلك أنّ $a \in E$ هو حدّ علوي لِلمجموعة $A \subset E$ إِذَا و فقط إِذَا لكلّ $x \in A$ لنَا $x \prec a$

هذه التّمهيديّة هي من مسلمَات الرّيَاضيَات و ليس لهَا برهَان.

تمَارين

١) إِذَا كَان E فضَاءً خطيًا علَى الحلقة $\mathbb{R}$ و $p : E \to \mathbb{R}$ تحقّق

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$\forall x \in E, \forall \alpha \geq 0,\ \ p(\alpha x) = \alpha p(x)$$

بيّن أنّه توجد دَالة خطّية f علَى E تحقّق

$$\forall x \in E, -p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$$

٢) بينّ نظريّة $(Hann - Banach)$ إِذَا كَان E فضَاءً خطيًا علَى الحلقة $\mathbb{C}$

نظريّة

ليكن F فضَاءً جزئِيًا من فضَاء معيَاري E و $f \in L(F, \mathbb{R})$ فإِنّه يوجد $\tilde{f} \in L(E, \mathbb{R})$ يحقّق لِلشرطين التَّاليّن

١) $||\tilde{f}|| = ||f||$ وَ ٢) $\forall x \in F,\ \ f(x) = \tilde{f}(x)$

برهَان

علَى E نعرّف $p(x) = ||f||.||x||$ الدَّالة p تحقّق شروط هَان بنَاخ و لنَا $\forall x \in F,\ \ f(x) \leq p(x)$ إِذًا من نظريّة هَان بنَاخ توجد دَالة خطّية $\tilde{f}$ علَى E تحقّق

$$\forall x \in E, \tilde{f}(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in F,\ \ \tilde{f}(x) = f(x)$$

من تعريف p نرَى أنّ $||\tilde{f}|| = ||f||$

نظريّة

ليكن x_0 عنصرًا من فضَاء معيَاري E

يحقّق $||x_0|| = 1$ فإِنّه يوجد $\tilde{f} \in L(E, \mathbb{R})$ يحقّق لِلشرطين التَّاليَين

١) $||\tilde{f}|| = 1$ وَ ٢) $\tilde{f}(x_0) = 1$

برهَان

ليكن $F =< x_0 >$ نعرّف $f \in L(F,\mathbb{R})$ حسب $f(\alpha x_0) = \alpha$ من النظريّة السَّابقة يوجد $\tilde{f} \in L(E,\mathbb{R})$ يحقِّق لِلشرطين التَّاليَين

١) $||\tilde{f}|| = ||f|| = 1$ وَ ٢) $\tilde{f}(x_0) = 1$

فَضَاءَات هلبَارت $Hilbert\ Space$

تعريف

إِذَا كَان E فضَاءً خطيًا علَى الحلقة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ أو الحلقة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ نسمّي ضرب دَاخلي **Inner product** علَى E كلّ دَالّة

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longrightarrow & <x,y> \end{array}$$

مُحقّقة لِلشروط التَالِيةَ

١) $\forall x\in E, \forall x'\in E, \forall y\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ <x+\lambda x',y> = <x,y> + \lambda <x',y>$

٢) $\forall x\in E,\ \forall y\in E,\ <x,y> = \overline{<y,x>}$

٣) $\forall x\in E,\ <x,x>\ \geq 0,\quad (<x,x>=0) \Leftrightarrow (x=0)$

أمثلة

١) اَلضرب الدَاخلي الطَبيعي علَى $\mathbb{C}^n$ هو

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((x_1,..x_n),(y_1,..y_n)) & \longrightarrow & x_1\overline{y_1}+..+x_n\overline{y_n} \end{array}$$

٢) اَلضرب الدَاخلي الطَبيعي علَى $\mathbb{R}^n$ هو

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1,..x_n),(y_1,..y_n)) & \longrightarrow & x_1 y_1+..+x_n y_n \end{array}$$

٣) كذلك علَى $\mathcal{C}([0,2\pi])$ فإِنّ $<f,g> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}(t)dt$ هو ضرب دَاخلي

ملَاحظة

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ خطيٍ E نعرّف $||x|| = \sqrt{<x,x>}$ فإِنّ

١) $\forall x\in E, ||x||\geq 0$ و $||x||=0 \Leftrightarrow x=0_E$

٢) $\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ ||\lambda x|| = |\lambda|||x||$

كي نثبت أنّ $\forall x\in E, \forall y\in E, ||y+x|| \leq ||x||+||y|| \qquad (Triangle\ Inequality)$

لنثبت أوّلًا النظريّة التَّالية

نظريّة شوَارتز $Schwarz\ Inequality$

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ خطيٍ E فإِنّ

$$\forall x\in E,\ \forall y\in E,\ |<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$$

برهَان

ليكن $E \ni x$ و $E \ni x,$ و ليكن $\mathbb{R} \ni \theta$ بحيث $< x,y >= |< x,y >|e^{i\theta}$ لكلّ $t \in \mathbb{R}$ فإنّ

$$0 \leq < x + te^{-i\theta}y, x + te^{-i\theta}y >=< x,x > +t^2 < y,y > +2t|< x,y >|$$

بما أنّ كثيرة الحدود من الدرجة الثّانية.

$$P(t) = t^2 < y,y > +2|< x,y >|t + < x,x >$$

موجبة علَى كَامل $\mathbb{R}$ إِذًا ليس لهَا جذرَان مختلفَان إِذًا مُميزهَا ليس بموجب

$$4|< x,y >|^2 - 4 < x,x >< y,y > \leq 0$$

إِذًا

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ |< x,y >| \ \leq\ \sqrt{< x,x >}\sqrt{< y,y >}$$

نظريّة

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ E فإنّ $||x|| = \sqrt{< x,x >}$ هو معيَار علَى E

برهَان

رَأينَا أنّ

١) $\forall x \in E, ||x|| \geq 0$ و $\forall x \in E, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

٢) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x|| = |\lambda|||x||$

بقي أن نثبت $\forall x \in E, \forall y \in E, ||y + x|| \leq ||x|| + ||y||$ بما أنّ

$$||y + x||^2 =< y + x, y + x >=< x,x > + < y,y > +2\mathcal{R}e < x,y >$$

فإنّ

$$||y + x||^2 \leq < x,x > + < y,y > +2|< x,y >|$$

إِذًا

$$||y + x||^2 \ \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| = (||x|| + ||y||)^2$$

إِذًا

$$||y + x|| \leq ||x|| + ||y||$$

متبَاينة متوَازي الأضلاع

ليكن $(E, ||\ ||)$ فضَاءً معيَاريًا فإنّه يوجد ضرب دَاخلي $<,>$ علَى E يحقّق $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{<x,x>}$ إذَا و فقط إذَا تحقَّقت متبَاينة متوَازي الأضلَاع التَّالية

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ ||y+x||^2 + ||y-x||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

ملَاحظة

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ حقيقي E فلكل $x \in E$ و لكلّ $y \in E$ فإنّ

$$<x,y>= \frac{1}{4}(<y+x, y+x> - <y-x, y-x>)$$

أمَّا إذَا كَان E مركّبًا فإنّ

$$<x,y>= \frac{1}{4}(<y+x, y+x> - <y-x, y-x> + i<x+iy, x+iy> - i<x-iy, x-iy>)$$

فمثلًا إذَا كَا $<,>_1$ و $<,>_2$ ضربين دَاخليَين علَى فضَاءٍ E فإنّ

$$(\forall x \in E, <x,x>_1 = <x,x>_2) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \forall y \in E\ <x,y>_1 = <x,y>_2)$$

تعريف

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ H ، نقول أنّ H فضَاء هلبَارت إذَا كَان $H, \sqrt{<,>}$ فضَاءً كَاملًا

أمثلة

إذَا كَان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاءً مقَسًا تَامًا فإنّ $L^2(X, , \mathcal{A}, \mu)$ يكون فضَاء هلبَارت. فمثلَان إذَا كَان X هو $\mathbb{N}$ و $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A فإنّ $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ هو $l^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{a_n} < \infty\}$ يكون فضَاء هلبَارت.

تعريف

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ E ، نقول أنّ $x \in E$ و $y \in E$ متعَامدَان *Orthogonal* إذَا كَان $<x,y>= 0$ عندهَا نكتب $x \perp y$. إذَا كَانت $A \subset E$ فإنّ المجموعة المتعَامدة مع A هي $\{x \in E, \forall y \in A, <x,y>= 0\} = A^{\perp}$

خصَائِص التّعَامد

ليكن $<,>$ ضرب دَاخلي علَى فضَاءٍ E

١) بيتَاقورس

أ) إِذَا كَان E حقيقيًا فإِنّ

$$x \perp y \Leftrightarrow ||y+x||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

ب) إِذَا كَان E مركّبًا فإِنّ

$$x \perp y \Rightarrow ||y+x||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

فِي $\mathbb{C}$ فإِنّ $x=1$ و $y=i$ يحقِّقَان $||y+x||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ إِلَّا أنّ $< 1, i >= -i \neq 0$

٢) لكلّ $A \subset E$ فإِنّ $A^{\perp}$ يكون فضَاءً خطّيًا جزئِيًا مغلقًا من E و لنَا $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

نظريّة

ليكن F مجموعة جزئِيّة محدّبة و مغلقة من فضَاء هلبَارت H فإِنّه يوجد عنصر وحيد $x \in F$ يحقِّق

$$||x|| = \inf\{||y||, y \in F\}$$

برهَان

إِذَا كَان $0 \in F$ فإِنّ 0 العنصر وحيد المنشود

أمّا إِذَا كَان $0 \notin F$ فأنّه $r = d(F, 0) > 0$ لأنّ F مغلق. لتكن $x_n \in F$ بحيث $||x_n||^2 < r^2 + \frac{1}{n}$ من متبَاينة متوَازي الأضلَاع فإِنّ

$$||\frac{x_n - x_m}{2}||^2 + ||\frac{x_n + x_m}{2}||^2 = \frac{||x_n||^2}{2} + \frac{||x_m||^2}{2}$$

بمَا أنّ F مجموعة جزئِيّة محدّبة فإِنّ $(\frac{x_n+x_m}{2}) \in F$ إِذًا

$$||\frac{x_n - x_m}{2}||^2 = \frac{||x_n||^2}{2} + \frac{||x_m||^2}{2} - ||\frac{x_n + x_m}{2}||^2 \leq \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2m} - r^2 = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}$$

إِذًا (x_n) كوشيّة بمَا أنّ H كَامل فإِنّهَا تتقَارب من $x \in H$ ، بمَا أنّ F مغلق فإِنّهَا تتقَارب من $x \in F$.

ألوحدَانيّة

إِذَا كَان $x' \in F$ عنصر آخر يحقِّق

$$||x'|| = \inf\{||y||, y \in F\}$$

بمَا أنّ F محدّب $(\frac{x+x'}{2}) \in F$ من متبَاينة متوَازي الأضلَاع فإِنّ

$$||\frac{x-x'}{2}||^2 = \frac{||x||^2}{2} + \frac{||x'||^2}{2} - ||\frac{x+x'}{2}||^2 \leq 0$$

إذًا $x = x'$

نظريّة

ليكن F مجموعة جزئيّة محدّبة و مغلقة من فضَاء هلبَارت H فإنّه لكلّ $x \in H$ يوجد عنصر وحيد $P_F(x)$ في F نسمّيه إسقَاط x علَى F يحقّق

$$||x - P_F(x)|| = \inf\{||x-y||, y \in F\}$$

برهَان

بمَا أنّ F جزء محدّب و مغلق من فضَاء هلبَارت H فإنّ $-x+F$ محدّب و مغلق إذًا من النّظريّة السَّابقة يوجد عنصر وحيد $a \in (-x+F)$ يحقّق

$$||x-a|| = \inf\{||x-y||, y \in (-x+F)\}$$

ليكن $P_F(x) = x+a$ إذًا

$$||x - P_F(x)|| = \inf\{||x-y||, y \in F\}$$

نظريّة

إذَا كَان F فضَاء خطّي جزئِي مغلق من فضَاء هلبَارت H فإنّه لكلّ $x \in H$ يكون $P_F(x)$ العنصر الوحيد الذي يحقّق

$$\forall y \in F, < x - P_F(x), y >= 0$$

و التّطبيق $x \to P_F(x)$ يكون مُؤثّرًا خطّيًا و متّصلًا

برهَان

بمَا أنّ كلّ فضَاء خطّي يكون محدّب ، فمن النّظريّة السَّابقة يكون $x \to P_F(x)$ معرّف من H إلَى F و يحقّق

$$||x - P_F(x)|| = \inf\{||x-y||, y \in F\}$$

إذًا

$$\forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{C}, ||x - P_F(x)||^2 \leq ||x - P_F(x) + \lambda y||^2$$

بتحليل الطّرف الثّاني نتحصّل علَى

$$||x-P_F(x)||^2 \leq ||x-P_F(x)||^2 + |\lambda|^2||y||^2 + \overline{\lambda} < x-P_F(x), y > + \lambda\overline{< x-P_F(x), y >}$$

لتكن $\theta \in \mathbb{R}$ تحقّق $< x-P_F(x), y >= e^{i\theta}| < x-P_F(x), y > |$ و $\lambda = e^{-i\theta}t, t \in \mathbb{R}$ عندهَا نتحصّل علَى

$$\forall y \in F, \forall\theta \in \mathbb{R},\ 0 \leq t^2||y||^2 + 2t| < x-P_F(x), y > |$$

و هذه كثيرة حدود من الدّرجة الثّانية في المتغيّرة t لَا يمكن أن تكون دَائِمًا موجبة إلَّا إذَا كَان $| < x-P_F(x), y > | = 0$

أمَّا إذَا كَان $b \in F$ يحقّق

$$\forall y \in F, < x-b, y >= 0$$

فمن بيتَاقورس

$$||x-P_F(x)||^2 = ||x-b||^2 + ||b-P_F(x)||^2$$

و بمَا أنّ $||x-P_F(x)||^2 \leq ||x-b||^2$ من تعريف $P_F(x)$ فإنّ $||b-P_F(x)||^2 = 0$

بقي أن نبرهن أنّ P_F خطّية . نعرف أنّ

$$\forall(x,z) \in H \times H, \forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall y \in F, < (x+\lambda z) - P_F(x+\lambda z), y >= 0$$

و $P_F(x+\lambda z)$ هو العنصر الوحيد الذي يحقّق المعَادلة السَّابقة. و بمَا أنّ

$$\forall(x,z) \in H \times H, \forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall y \in F, < x-P_F(x), y >= 0, \lambda < z-P_F(z), y >= 0$$

و نظرًا لأنّ الضرب الدَّاخلي خطّي في المتغيّرة الأولَى فإنّ

$$\forall y \in F, < x-P_F(x), y > + \lambda < z-P_F(z), y >=< (x+\lambda z) - P_F(x+\lambda z), y >= 0$$

إذًا

$$\forall(x,z) \in H \times H, \forall\lambda \in \mathbb{C}, P_F(x+\lambda z) = P_F(x) + \lambda P_F(z)$$

نظريّة

إذَا كَان F فضَاء خطّي جزئِي مغلق من فضَاء هلبَارت H فإنّه

$$F \oplus F^{\perp} = H$$

برهَان

نعرف أنّ

$$\forall x \in H, P_F(x) \in F, (x - P_F(x)) \in F^{\perp}, x = P_F(x) + (x - P_F(x))$$

أي أنّ $F + F^{\perp} = H$ و بمَا أنّ $F \bigcap F^{\perp} = 0$ فإِنّ $F \oplus F^{\perp} = H$

نظريّة

إِذَا كَان H فضَاء هلبَارت و $l : H \to \mathbb{C}$ دَالة خطّيّة و متّصلة فإِنّه يوجد عنصر وحيد $a \in H$ يحقِّق

$$1)\ \forall x \in H, < x, a >= l(x) \qquad 2)\ ||l|| = ||a||$$

برهَان

إِذَا كَان $l = 0$ فإِنّ $a = 0$ هو العنصر المنشود الوحيد

أمّا إِذَا كَان $l \neq 0$ فإِنّ $F = kerl$ يكون فضَاءً مغلقًا ليكن $b \in H, l(b) \neq 0$ فإِنّ $c = \frac{b - P_F(b)}{l(b)}$ يحقِّق $l(c) = 1, c \in F^{\perp}$ عندنَا $\forall x \in H, x = (x - l(x)c) + l(x)c$ ليكن $a = \frac{c}{<c,c>}$ نظرًا لأنّ $(x - l(x)c) \in F$ فإِنّ

$$\forall x \in H, < x, a >=< l(x)c, a >= l(x)$$

و لنَا

$$||l|| = \sup\{||l(x)||, ||x|| = 1\} = \sup\{< x, a >, ||x|| = 1\} = ||a||$$

تطبيق

إِذَا كَان $e_1, .., e_n$ أسَاس وحدة (متعَامد و $||e_j|| = 1$) لِلفضَاء الجزئِي F فإِنّ

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$$

ذلك أنّ $y = (\sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j) \in F$ و لكلّ $1 \leq j \leq n$ فإِنّ $< y, e_j >=< x, e_j >$ إِذًا $(x - y)$ متعَامد مع كلّ e_j ، إِذًا $(x - y)$ متعَامد مع F وبمَا أنّ العنصر الوحيد $y \in f$ الذي يحقِّق $(x - y) \in F^{\perp}$ هو $P_F(x)$ فإِنّ

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$$

متبَاينة بسّل $Bessel$

إِذَا كَان $e_1,..,e_n..$ متتَابعة وحدة ($<e_k,e_j>=0$ إِذَا $k\neq j$ و $<e_k,e_k>=1$) لكلّ $x\in H$ فإِنّ $\sum_k |<x,e_k>|^2$ متقَاربة و تحقّق

$$\sum_{j=1}^{n} |<x,e_j>|^2 \leq ||x||^2$$

برهَان

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $y=\sum_{j=1}^{n}<x,e_j>e_j$ مِمَّا سبق فإِنّ $(x-y)\perp y$ إِذًا من بيثَاقورس فإِنّ

$$||x||^2=||y||^2+||x-y||^2\geq ||y||^2=\sum_{j=1}^{n}|<x,e_j>|^2$$

عندمَا $n\to\infty$ نتحصّل علَى

$$\sum_{j=1}^{n} |<x,e_j>|^2 \leq ||x||^2$$

تعريف

في فضَاء معيَاري E نقول أنّ المجموعة الجزئِيّة $A\subset E$ كليّة أذَا كَان الفضَاء الخطّي الجزئِي المولّد من A كثيف في E أي $E=\overline{<A>}$ نقول أنّ الفضَاء المعيَاري E قَابل لِلفصل أذَا و جدت فيه مجموعة قَابلة لِلعدّ و كثيفة.

أمثلة

لكلّ $p\in[1,\infty[$ فإِنّ l^p يكون قَابل لِلفصل في حين أنّ l^∞ غير قَابل لِلفصل. كذلك $L^2([0,2\pi])$ قَابل لِلفصل.

تعريف

إِذَا كَان $e_1,..,e_n..$ متتَابعة معيَارية و متعَامد ($<e_k,e_j>=0$ إِذَا $k\neq j$ و $<e_k,e_kj>=1$) و كليّة في فضَاء هلبَارت H فإِنّنَا نسمّيهَا أَسَاس هلبَارسي أو أَسَاس معيَاري و متعَامد أو أَسَاس وحدة

نظريّة بَارسفَال

في فضَاء هلبَارت H إِذَا كَانت $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة معيَاريّة و متعَامدة فإِنّ العبَارَات التَّالية تكون متكَافِئة

١) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أَسَاس هلبَارسي

٢) لكلّ $x\in H$ فإِنّ $x=\sum_n<x,e_n>e_n$

٣) لكلّ $x \in H$ فإنّ $(Parceval)$ $||x||^2 = \sum_n |<x, e_n>|^2$

برهَان

$1) \Rightarrow 2)$

لتكن $X_N = \sum_{n=1}^{N} <x, e_n> e_n$ نلَاحظ أنّ $||X_{N+k} - X_N||^2 = \sum_{n=N+1}^{N+k} |<x, e_n>|^2$ من بسَّال $\sum_n |<x, e_n>|^2 \leq ||x||^2$ إذًا $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} ||x||^2 = 0$ فينتج أنّ المتّتَابعة (X_N) كوشيّة. و بمَا أنّ H فضَاء هلبَارت فإنّ (X_N) متقَاربة من $X \in H$. لكلّ $n \in \mathbb{N}$ فإنّ $<X, e_n> = \lim_{N\to\infty} <X_N, e_n> = <x, e_n>$ فينتج أنّه y في الفضَاء $vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ حيث $y = \lambda_1 e_1 + .. + \lambda_s e_s$ فإنّ $<X, y> = <x, y>$ أي $<X - x, y> = 0$ و بمَا أنّ $vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ كثيف توجد $y_p \in vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ تتقَارب من $X - x$ إذًا $||X - x||^2 == \lim_{p\to\infty} <X - x, y_p> = 0$ ينتج أنّ $x = X = \sum_n <x, e_n> e_n$

$2) \Rightarrow 3)$

بمَا أنّ لكلّ $x \in H$ فإنّ $x = \sum_n <x, e_n> e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} <x, e_n> e_n$ فإنّ $||x||^2 = \lim_{N\to\infty} ||\sum_{n=1}^{N} <x, e_n> e_n||^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |<x, e_n>|^2 = \sum_n |<x, e_n>|^2$

$3) \Rightarrow 1)$

لكلّ $x \in H$ لتكن $X_N = \sum_{n=1}^{N} <x, e_n> e_n$ نلَاحظ أنّه $\forall n \leq N$ $<x - X_N, e_n> = 0$ و $\forall n > N$ $<x - X_N, e_n> = <x, e_n>$ إذًا من 3) لنَا $||x - X_N||^2 = \sum_{n=N+1}^{N+k} |<x, e_n>|^2$ يؤُول إلَى 0 لأنّه بَاقِي التسلسلة المتقَاربة $||x||^2 = \sum_n |<x, e_n>|^2$ إذًا لكلّ $x \in H$ توجد متتَابعة (X_N) من $vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ متقَاربة من x إذًا $vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ كثيف في H و من ثمّ فإنّ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أسَاس هلبَارسي

نظريّة

كلّ فضَاء هلبَارت H قَابل لِلفصل له أسَاس هلبَارسي

برهَان

لتكن $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ كثيفة في H حيث $a_1 \neq 0$ ليكن $e_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$. بَالإستقرَاء لنَترض أنَّا بنينَا أسَاسًا $e_1, ..e_s$ لِلفضَاء $F_n = vect\{a_1, ..., a_n\}$ إن كَان $F_n = F_{n+1}$ نحَافظ علَى نفس الأسَاس $e_1, ..e_s$ و إلَا نعرّف $e_{s+1} = \frac{a_{n+1} - P_{F_n}(a_{n+1})}{||a_{n+1} - P_{F_n}(a_{n+1})||}$ و هكذَا يكون $e_1, ..e_{s+1}$ أسَاسًا لِلفضَاء F_{n+1} إذًا $||e_n|| = 1$ و (e_n) متعَامدة و كذلك $vect\{a_n, n \in \mathbb{N}\} = vect\{e_n\}$ و هكذَا يكون (e_n) أسَاس هلبَارسي

تطبيق

لیكن $L^2([0,2\pi])$ فضَاء هِلبَارت لیكن $<f,g>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}(t)dt$ نعرف أنّ $L^2([0,2\pi])$ علَى $e_n=e^{int}, n\in\mathbb{Z}$ هذه عَائِلة عموديّة و هي كليّة إِذًا هي أسَاس هلبَارسي. نستنتج

١) أنّ $L^2([0,2\pi])$ هو فضَاء بنَاخ

٢) نعرّف عوَامل فوري $Fourier$ لِلدَّالة $f\in L^2([0,2\pi])$ بأنّهَا

$$c_{n,f}=<f,e^{int}>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fe^{-int}dt$$

في $L^2([0,2\pi])$ لنَا

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,f}e^{int}$$

أي

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|f-\sum_{-n}^{n} c_{k,f}e^{ikt}|^2dt=0$$

المُرَافقة و المُؤثِرَات الهرميسيّة و الطّبيعيّة

نظريّة المرَافق

في فضَاء هلبَارت H لكلّ $u \in L(H)$ يوجد تطبيق وحيد $u^* \in L(H)$ يحقّق

$\forall x \in H, \forall y \in H, \ < u(x), y >=< x, u^*(y) >$

نقول أنّ u^* هو مرَافق u .

خصَائِص

ليكن H فضَاء هلبَارت و $u \in L(H)$ و $v \in L(H)$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ فإنّ

١) $||u|| = ||u^*||$

٢) $(u^*)^* = u$

٣) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$

٤) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

٥) إذَا كَان u تقَابل فإنّ $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

٦) $Keru^* = (Imu)^\perp$ و $\overline{Imu} = (Keru^*)^\perp$

٧) $\overline{Imu} = H \Leftrightarrow Keru^* = 0$

٨) إذَا كَان F فضَاء خطّي جزئِي من H فإنّ $u(F) \subset F \Leftrightarrow u^*(F^\perp) \subset F^\perp$

تعريف

ليكن H فضَاء هلبَارت و $u \in L(H)$ فإنّنَا

١) نقول أنّ u هرميسي $Hermitian$ إذَا كَان $u = u^*$

٢) نقول أنّ المُؤثّر هرميسي u موجب إذَا كَان $< u(x), x > \geq 0$ لكلّ $x \in H$

٣) نقول أنّ u طبيعي $normal$ إذَا كَان $u^* \circ u = u \circ u^*$

٤) نقول أنّ u وَاحدي $Unitary$ إذَا كَان u تقَابل يحقّق $u^* = u^{-1}$

خصَائِص

ليكن H فضَاء هلبَارت و $u \in L(H)$ فإنّ $u + u^*$ و كذلك $u^* \circ u$ كلَاهمَا مُؤثّر هرميسي

تمَارين

جَامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الريَاضيَات ٢٤ صفر ١٤٢٤

تحليل دَالَى الاَختبَار الاَول في سَاعتين

التمرين الاَول ليكن H فضَاء هلبَارت و $u : H \to H$ بحيث
$\forall (x,y) \in H \times H, < u(x), y >=< x, u(y) >$

١) بين أنّ u هو مُؤثر خطي

٢) بين أنّ $\forall y \in H,\ x \to < u(x), y >$ هي دَالة خطية متّصلة. مَا هو معيَارهَا.

٣) اذكر نظرية الحد المنتظم و بين أنّه ان كَانت $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ فَانّ $\{x \to < x, u(y_n) >, n \in \mathbb{N}\}$ تكون محدودة في $L(H, \mathbb{C})$

٤) أستنتج أنّ u مُؤثر خطي متّصل

التمرين الثّاني ليكن H فضَاء هلبَارت F فضَاء جزئِي ذي بعد متهي و G فضَاء جزئِي مغلق من H و $A \in H$

١) بين انّ الاَسقَاط P علَى $A + F = \{A + x, x \in F\}$ تكون دَالة متّصلة

٢) لكلّ $x \in F$ لتكن $f(x) = d(A + x, G)$ المسَافة بين $A + x$ و G بين انّ $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$ إِذ و فقط إِذ كَان $F \bigcap G = \{0\}$

٣) لنفترض أنّ $F \bigcap G = \{0\}$ بين أنّه يوجد $a \in A + F$ و $b \in G$ بحيث $||a - b|| = d(A + F, G)$

٤) بين أنّ $b - a$ يكون متعَامد مع كلّ عنصر من $F + G$

٥) بين فِي جميع الحَالَات أنّه يوجد $a \in A + F$ و $b \in G$ بحيث $||a - b|| = d(A + F, G)$

التمرين الثّالث علَى $C([0,1])$ ليكن $||f|| = sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$

١) بين أنّ $(C([0,1]), ||\ ||)$ هو فضَاء بنَاخ

٢) هل يوجد علَى $(C([0,1]), ||\ ||)$ مُؤثر خطي غير متّصل

٣) هل يوجد علَى $(C([0,1]), ||\ ||)$ أسَاس خطي قَابل لِلعد

٤) هل توجد متّتَابعة K_n من متراَصَات بحيث $C([0,1]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الرياضيات ٢٦ صفر ١٤٢٦

تحليل دالي **الاختبار الفصلي** **في ساعتين**

التمرين الاول ليكن F فضاء جزئي مغلق من فضاء بناخ حقيقي E و $F \neq E$ و $f : F \to \mathbb{R}$ دالة خطية

١) بين كما جاء في المحاضرة أنه يوجد $a \in E$ بحيث $||a|| = 1$ و $d(a, F) > \frac{1}{2}$. هل يوجد حتما $a \in E$ بحيث $||a|| = 1$ و $d(a, F) > \frac{2}{3}$

٢) بين أن f تكون متصلة إذا و فقط إذا كان $kerf$ مغلقا في E

٣) بين أنه إذا كان E فضاء هلبارت فإنه يوجد $a \in E$ بحيث $||a|| = 1$ و $d(a, F) = 1$

٤) بين أنه إذا كان E فضاء هلبارت و f متصلة فإنه توجد دالة خطية $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ تحقق $\forall x \in F, \tilde{f}(x)) = f(x)$ و $||\tilde{f}|| = ||f||$

التمرين الثاني

ليكن $(E, || ||)$ فضاء بناخ و $E' = L(E, \mathbb{R})$

١) أورد نص و برهان نظرية الدالة المفتوحة

٢) ليكن N معيار ثاني بحيث يكون (E, N) فضاء بناخ و $\forall x \in E, N(x) \leq ||x||$ بين أن المعيارين متكافئان.

٣) بين أن $E' = L(E, \mathbb{R})$ فضاء بناخ و أن الدالة ψ المعرفة على $E' \times E$ حسب $\psi(f, x) = f(x)$ هي ثنائية الخطية $(bilinear)$ و متصلة

٤) لتكن b دالة ثنائية الخطية على $E' \times E$ بين أن الدالة b تكون متصلة إذا و فقط إذا وجد $M > 0$ يحقق

$$b(f, x) \leq M||f||||x||$$

التمرين الثالث ليكن H فضاء هلبارت و $u : H \to H$ بحيث $\forall (x, y) \in H \times H, < u(x), y >=< x, u(y) >$

١) بين أن u هو مؤثر خطي

٢) بين أنّ $\forall y \in H,\ x \to < u(x), y >$ هي دَالة خطية متّصلة. مَا هو معيَارهَا.

٣) أذكر نظرية الحد المنتظم و بين أنّه إن كانت $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ فإنّ $\{x \to < x, u(y_n) >, n \in \mathbb{N}\}$ تكون محدودة في $L(H, \mathbb{C})$

٤) إستنتج أنّ u مُؤثر خطي متّصل

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٥ ربيع الأَول ١٤٢٦

تحليل دَالي الاختبار النهَائي في سَاعتين

التمرين الأَوّل

١) مَا هو نصّ و برهَان نظريّة الرسم المغلق و أورد تطبيق لهذه النّظريّة

٢) بيّن كمَا في الدّرس بَالإِعتمَاد علَى الدَّالة الفرديّة و المعرّفة علَى $[0, \pi]$ حسب $f(x) = x - \pi$ أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

التمرين الثّاني

نذكّر أنّ $L^2[-\pi, \pi]$ هو فضَاء هلبَارت حيث $< f|g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$

١) مَا تعريف التّوبولوجيَا الضّعيفة τ_w و التّوبولوجيَا القويّة τ_s علَى $L^2[-\pi, \pi]$ و قَارن بينهمَا. هل $L^2[-\pi, \pi]$ منفصل. هل كلّ فضَاء جزئِي منه إِنعكَاسي

٢) أوجد أسَاس هلبَارسي $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ في $L^2[-\pi, \pi]$ و بيّن أنّه

$$\forall f \in L^2[-\pi, \pi], \lim_{|n|\to\infty} < f, e_n >= 0$$

و $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لَا تتقَارب . بيّن أنّ $< e_1, e_2 >^{\perp}$ متقَايس مع $L^2[-\pi, \pi]$.

٣) لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من $L^2[-\pi, \pi]$ تحقّق $||f_n|| \leq 1$ بيّن أنّه توجد متتَابعة جزئيّة f_{n_k} تحقّق

$$\exists g \in L^2[-\pi, \pi], \forall h \in L^2[-\pi, \pi],\ \lim_{n\to\infty} < h, f_{n_k} >=< h, g >$$

.

اَلتمرين الثَّالث

١) بين أنّ $l^1(\mathbb{R})$ هو فضَاء منفصل و أوجد مرَافقه $(l^1)'$

٢) ليكن E فضَاء بنَاخ بحيث مرَافقه E' يكون منفصل

أ) بيّن أنّه توجد متتَابعة $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كثيفة في $\{l \in E', ||l|| = 1\}$

ب) بالإعتمَاد علَى متتَابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقّق $||x_n|| = 1$ و $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$ بيّن أنّ E منفصل

٣) إستنتج أنّ $l^1(\mathbb{R})$ غير إنعكَاسي و إستنتج أنّه لَا يوجد تقَابل خطّي متّصل

$\psi : l^1 \to l^2$

١) أثبت النّظريّة التَّالية

نظريّة $(Lax - Milgram)$

إذَا كَان H فضَاء هلبَارت و $b : H \times H \to \mathbb{C}$ تحقّق

١) $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall(x, y, z) \in H^3, b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$

٢) $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall(x, y, z) \in H^3, b(x, y + \lambda z) = b(x, y) + \overline{\lambda} b(y, z)$

٣) $\exists A > 0, \forall(x, y) \in H \times H, |b(x, y)| \leq A||x||||y||$

٤) $\exists\mu > 0, \forall x \in H, b(x, x) \geq \mu||x||^2$

فإنّ يوجد تقَابل خطّي $u \in L(H)$ يحقّق $||u^{-1}|| \leq \frac{1}{\mu}$ و

$$\forall(x, y) \in H \times H, b(x, y) =< x, u(y) >$$

٢) أثبت النّظريّة التَّالية

نظريّة $(Lax - Milgram)$

إذَا كَان H فضَاء هلبَارت حقيقي و $u \in L(H, H')$ تحقّق

$$\exists\mu > 0, \forall x \in H, [u(x)](x) \geq \mu||x||^2$$

فإنّ u تقَابل خطّي يحقّق $||u^{-1}|| \leq \frac{1}{\mu}$

الحلّ

١) لكل $y \in H$ الدَّالة $x \to b(x, y)$ هي خطّية من ١) و هي متّصلة من ٣) إذًا يوجد عنصر وحيد $u(y) \in H$ يحقّق

$$\forall x \in H, b(x,y) =< x, u(y) >$$

نلَاحظ أنّه $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (x,y,z) \in H^3,$ لنَا

$$< x, u(y+\lambda z) >= b(x, y+\lambda z) = b(x,y) + \overline{\lambda} b(y,z) =< x, u(y) > +\overline{\lambda} < y, u(z) >$$

إذًا

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (x,y) \in H^2, u(y+\lambda z) = u(x) + \lambda u(y)$$

و هذَا يدلّ علَى أنّ u خطّية.

بمَا أنّ

$$\forall (x,y) \in H \times H, b(x,y) =< x, u(y) >$$

من ٣ لنَا

$$\forall (x,y) \in H \times H, | < x, u(y) > | \leq |b(x,y)| \leq A||x||||y||$$

و بأخذ $x = u(y)$ نرَى أنّ $||u(y)|| \leq A||y||$

إذًا u متّصلة لنثبت أنّ u تقَابل

١) تبَاين

ليكن $x \in H$ بحيث $u(x) = 0$ إذًا $0 = b(x,x) \geq \mu ||x||^2$ إذًا $x = 0$ ، إذًا $keru = 0$ بمَا أنّ u خطّي فإنّه تبَاين

٢) شَامل

كي نثبت أنّ $u(H) = H$ سنبيّن أنّ $u(H)$ مغلق في H و أنّ $[u(H)]^{\perp} = 0$

أ) كي نبيّن $u(H)$ مغلق، لِبيّن أنّ نهَاية كلّ متتَابعة من $u(H)$ متقَاربة في H تبقَى في $u(H)$

لتكن $y_n \in u(H)$ تتقَارب من $y \in H$ ، توجد $x_n \in H$ بحيث $y_n = u(x_n)$ نلَاحظ أنّ

$$\mu ||x_n - x_m||^2 \leq b(x_n - x_m, u(x_n - x_m)) \leq ||y_n - y_m||||x_n - x_m||$$

إذًا $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ كوشيّة بمَا أنّ H فضَاء هلبَارت فإنّهَا تتقَارب من $x \in H$ و بمَا أن u متّصل فإنّ $u(x) = y$ نستنتج إذًا أنّ $u(H)$ مغلق

ب) ليكن $t \in [u(H)]^{\perp}$ أي $\forall x \in H, 0 =< t, u(x) >$ إذًا $0 =< t, u(t) >= b(t,t) \geq \mu ||t||^2$ أي $t = 0$.

إذَا كَان H فضَاء هلبَارت حقيقي فبنفس الطّريقة لنَا

بمَا أنّ

$$\forall x\in H, |<x,u(x)>| = |b(x,x)| \geq \mu ||x||^2$$

بوضع $x = u^{-1}(y)$ لنَا

$$\forall y\in H, |<u^{-1}(y),y>| \geq \mu ||u^{-1}(y)||^2$$

من كوش ى شوَارتز لنَا

$$\forall y\in H, \frac{1}{\mu}||y|| \geq ||u^{-1}(y)||$$

و هذَا يتكَافءُ مع $||u^{-1}|| \leq \frac{1}{\mu}$

حلّ ٢)

١) تبَاين

ليكن $x\in H$ بحيث $u(x) = 0$ إِذًا $0 = [u(x)](x) \geq \mu ||x||^2$ إِذًا $x = 0$ · إِذًا $keru = 0$ بمَا أنّ u خطّي فإنّه تبَاين

٢) شَامل

كي نثبت أنّ $u(H) = H'$ سنبيّن أنّ $u(H)$ مغلق في $H' \simeq H$ و أنّ $[u(H)]^{\perp} = 0$ أ) كي نبيّن $u(H)$ مغلق، لِبيّن أنّ نهَاية كلّ متّتَابعة من $u(H)$ متقَاربة في H' تبقَى في $u(H)$

لتكن $y_n \in u(H)$ تتقَارب من $y\in H'$ ، توجد $x_n \in H, y_n = u(x_n)$ نلَاحظ أنّ $\mu||x_n - x_m||^2 \leq [u(x_n - x_m)](x_n - x_m) \leq ||y_n - y_m||||x_n - x_m||$ إِذًا $(x-n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوش يّة بمَا أنّ H فضَاء ه لبَارت فإِنّهَا تتقَارب من $x\in H$ و بمَا أن u متّصل فإنّ $u(x) = y$ نستنتج إِذًا أنّ $u(H)$ مغلق

ب) ليكن $y\in[u(H)]^{\perp}$ ··

تعريف

لكن $\mathcal{F}$ مجموعة من الدّوَال من فضَاء متري (E,d) إِلَى فضَاء متري (E',d') نقول أنّ $\mathcal{F}$ متسَاوي الإِتّصَال عند $x\in E$ إِذَا و فقط إِذَا تحقّق

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_x > 0, \forall f\in\mathcal{F}, \forall y\in E, d(x,y)\leq\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))\leq\epsilon$$

نقول أنّ $\mathcal{F}$ متسَاوي الإِتّصَال علَى E إن كَان متسَاوي الإِتّصَال عند كلّ $x\in E$

نقول أنّ $\mathcal{F}$ متظم تسَاوي الإِتّصَال علَى E إِذَا و فقط إِذَا تحقّق

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in E, \forall y \in E, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

أي أنّ δ لَا تعتمد علَى $x \in E$ و لَا علَى $f \in \mathcal{F}$ و إنّمَا تعتمد فقط علَى ϵ

نظريّة

ليكن K متراصّ من فضَاء متري (E,d) و لتكن $\mathcal{F}$ عَائِلة من دَوَال متسَاوية الإتّصَال علَى K فإنّ $\mathcal{F}$ تكون منتظمة تسَاوي الإتّصَال أي

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in K, \forall y \in K, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

أي أنّ δ لَا تعتمد علَى $x \in K$ و لَا علَى $f \in \mathcal{F}$ و إنّمَا تعتمد فقط علَى ϵ

برهَان

ليكن $\epsilon > 0$ ، من تسَاوي الإتّصَال بَالنّسبة إلَى $\frac{\epsilon}{2}$ لنَا

$$\forall x \in K, \exists \delta_x > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in E, d(x,y) \leq \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

الكرَات $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ ذَاتي مركز $x \in K$ و نصف قطرٍ $\frac{\delta_x}{2}$ تغطّي K نستخلص غطَاءً متهيًا $B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}), .., B(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2})$ و لنعرّف $\delta = \inf(\frac{\delta_{x_1}}{2}, .., \frac{\delta_{x_n}}{2})$

لتكن $x \in K$ توجد $1 \leq j \leq n$ بحيث $x \in B(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$ إذَا كَان $y \in E$ و $d(x,y) \leq \delta$ فإنّ $y \in B(x_j, \delta_{x_j})$ ، إذًا

$$\forall f \in \mathcal{F}, |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \leq \epsilon$$

نظرية $Ascoli - Arzelah$

ليكن (E,d) فضَاء متري منفصل و $f_n : E \to \mathbb{C}$ متتَابعة من دَوَال متسَاوية الإتّصَال و تحقّق $\forall x \in E, \exists M_x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M_x$ فإنّه $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ لهَا متتَابعة جزئِيّة تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من E

برهَان

لتكن (w_n) متتَابعة كثيفة في (E,d) ، بمَا أنّ $(f_n(w_1))$ محدودة فإنّ لهَا متتَابعة جزئِيّة متقَاربة نسمّيهَا $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$

نَنطلق من $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ بمَا أنّ $(f_{n,1}(w_2))_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة فإنّ لهَا متتَابعة جزئِيّة متقَاربة نسمّيهَا $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ و هكذَا دوَاليك لكلّ $k \in \mathbb{N}$ نبني متتَابعة $(f_{n,k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ جزئِيّة من $(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ إذًا هي جزئِيّة من جميع

سَابقَاتهَا و $(f_{n,k+1}(w_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ متقَاربة. نلَاحظ أنّ المتَتَابعة القطريّة $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب عند كلّ w_k ذلك أنّ $(f_{n,n})_{n>k}$ هي متَتَابعة جزئِيّة من $(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.

ليكن K متَرَاصّ من فضَاء متري (E,d) و ليكن $\epsilon > 0$ ، من النّظريّة السَّابقة

$$\exists\delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in K, \forall y \in E, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

الكرَات $(B(w_j,\delta))_{j\in\mathbb{N}}$ تغطّي K نستخلص غطَاءً متهيًا $B(w_1,\delta),..,B(w_N,\delta)$ لكلّ $j \leq N$ توجد $N_j \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq N_j, m \geq N_j \Rightarrow |f_{n,n}(w_j) - f_{m,m}(w_j)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ ليكن $M = \sup(N_1,..,N_N$ و $x \in K$ توجد $j \leq N$ بحيث $x \in B(w_j,\delta)$ لكلّ $n \geq M$ و $m \geq M$ فإنّ

$$|f_{n,n}(x)-f_{m,m}(x)| \leq |f_{n,n}(x)-f_{n,n}(w_j)|+|f_{n,n}(w_j)-f_{m,m}(w_j)|+|f_{m,m}(w_j)-f_{m,m}(x)| \leq \epsilon$$

نلَاحظ أنّ $(f_{n,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ كوشيّة إِذًا هي متقَاربة من دَالة f تحقّق

$$\forall\epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall x \in K, |f_{n,n}(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq \epsilon$$

إِذًا $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب بإِنتظَام علَى K من f .

إِذًا كثيرَات الحدود المثلثيّة كثفة في مجموعة الدّوَال المتّصلة و ذَاتي دورة 2π أي أنّه

نظريّة

لتكن f دَالة متّصلة و دوريّة دورتهَا 2π فلكلّ $\epsilon > 0$ توجد كثيرة حدود $P_\epsilon(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ بحيث

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - P_\epsilon(t)| \leq \epsilon$$

و بمَا أنّ $\Sigma_{n=0}^{s} \frac{(ikt)^n}{n!}$ تَتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متَرَاصٍّ من e^{ikt} فيمكن أن نستنتج النّظريّة التَّالية

نظريّة *Weierstrass Approximation Theorem*

ليكن K متَرَاصًّا من $\mathbb{R}$ و $f : K \to \mathbb{R}$ دَالة متّصلة فلكلّ $\epsilon > 0$ توجد كثيرة حدود $P_\epsilon \in \mathbb{R}[X]$ تحقّق

$$\forall x \in K; |f(x) - P_\epsilon(x)| \leq \epsilon$$

نظريّة العنصر الثَّابت *Fixed Point Theorem*

لتكن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دَالة تقلّص المسَافَات أي توجد $k \in]0,1[$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \ ||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$$

فإنّه يوجد عنصر وحيد $x_0 \in \mathbb{R}^n$ يحقّق $f(x_0) = x_0$

برهَان

لتكن $x_1 \in \mathbb{R}^n$ و لتكن $x_2 = f(x_1)$ و بَالإستقرَاء الرّيَاضي $x_{n+1} = f(x_n)$ بمَا أنّ f تقلصيّة فأنّ $||x_{n+k} - x_n|| \leq ||x_{n+k} - x_{n+k-1}|| + ||x_{n+k-1} - x_{n+k-2}|| + .. = ||x_{n+1} - x_n||$ و بمَا أنّ $||x_{n+1} - x_n|| = ||f(x_n - f(x_{n-1})|| \leq ||x_n - x_{n-1}|| \leq k^{n-1}||x_2 - x_1||$

فإنّ $||x_{n+k} - x_n|| \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}||x_2 - x_1||$ إِذًا $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشيّة إِذًا هي تتقَارب من العنصر الوحيد $x_0 \in \mathbb{R}^n$ الذي يحقّق $f(x_0) = x_0$

نظريّة العنصر الثّابت *Brouwer Fixed Point Theorem*

لتكن $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n ||x|| = 1\}$ و لتكن $f : \overline{B} \to \overline{B}$ دَالة متّصلة فإِنّه يوجد عنصر وحيد $x_0 \in \overline{B}$ يحقّق $f(x_0) = x_0$ ·

برهَان

عندمَا $n = 1$ البرهَان بسيط $\overline{B} = [0,1]$ إِذًا $g(x) = f(x) - x$ دَالة متّصلة تحقّق $g(1) \leq 0$ في حين أنّ $g(0) \geq 0$ من نظريّة القيمة الوسطيّة يوجد $x_0 \in [0,1]$ يحقّق $g(x_0) = 0$ أي $f(x_0) = x_0$ ·

عند $n > 1$ يكون البرهَان أصعب

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٥ ربيع الثَّاني ١٤٢٨

تحليل دَالَى الَاختبَار الفصلي الأوّل في سَاعتين

التمرين الَاول

١) مَا هو تعريف فضَاء بَار· هل $\mathbb{Q}$ فضَاء بَار بَالنسبة لِلمسَافة العَاديّة

٢) بيّن أنّ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ فضَاء بَار بَالنسبة لِلمسَافة العَاديّة · هل $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ كَامل

٣) أثبت أو إِنف بمثَال مضَاد الجمل التَّالية

في فضَاء متري E يكون $K \subset E$ مترَاصًا إِذَا و فقط إِذَا

أ) K له غطَاء من مجموعَات المفتوحة يمكن أن نستخلص منه غطَاء متنهي

ب) K مغلق و محدود ج) كلّ متتَابعة من K لهَا نقطة ترَاكم في K

د) K هو صورة عكسيّة لمترَاصّ بدَالة متّصلة

التمرين الثّاني ليكن F فضَاء جزئِي مغلق من فضَاء بنَاخ حقيقي E بحيث $F \neq E$ و $f : E \to \mathbb{R}$ دَالة خطّيّة

١) بيّن أنّه يوجد $a \in E$ بحيث $d(a, F) > \frac{2}{3}$ و $||a|| = 1$

٢) أوجد F° دَاخليّة F و إستنتج $\overline{E \setminus F}$

٣) لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من دوَال خطّيّة و متّصلة علَى E بحيث $\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 0$ ·
بيّن أنّ إحدَى هذه الدّوَال هي الدَّالة الصفريّة·

٤) بيّن أنّ f تكون متّصلة إذَا و فقط إذَا كَان $kerf = \{x \in E; f(x) = 0\}$ مغلقًا في E

التمرين الثَّالث علَى $C([0,1])$ ليكن $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$

١) بين أنّ $\overline{B(0,1)} = \{f \in C([0,1]); ||f||_\infty \leq 1\}$ مغلق و محدود في $(C([0,1]), ||\ ||_\infty)$ · هل هو مترَاص· هل هو فضَاء بَار·

٢) لتكن $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)dt$ بيّن أنّ $||\ ||_1$ و $||\ ||_\infty$ غير متكَافِئين علَى $C([0,1])$ لكنّهمَا متكَافِئَان علَى كثيرَات الحدود من درجة أقلّ أو تسَاي 1428

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٧ ربيع الثَّاني ١٤٢٨

تحليل دَالَى الَاختبَار الفصلي الثَّاني في سَاعتين

نذكّر أنّ $(\mathcal{C}([-\pi,\pi]), ||f||_\infty)$ هو فضَاء بنَاخ حيث $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$ أمَّا $(L^2([-\pi,\pi]), ||\ ||_2)$ فهو فضَاء هلبَارت حيث $< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$

التمرين الَاول

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة تمثيل ريتز $Riez's\ representation\ theorem$

٢) أوجد أسَاس هلبَارسي $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ في $L^2([-\pi,\pi])$ و بيّن أنه $\forall f \in L^2([-\pi,\pi]), \lim\limits_{|n|\to\infty} < f, e_n > e_n = 0$ و $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لَا تتقَارب·

٣) مَا هو نصّ و برهَان معَادلة بَارسفَال بيّن بَالإعتمَاد علَى الدَّالة الزوجيّة و المعرّفة علَى $[-\pi,\pi]$

حسب $f(x)=|x|$ أنّ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

التمرين الثَّاني

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة الدَّالة المفتوحة

٢) ليكن $(E,||\ ||)$ فضَاء بَنَاخ و ليكن $T:E\to E$ تقَابل خطّي متّصل بيّن أنّ T دَالة مفتوحة و إستنتج أنّ T^{-1} متّصلة

٣) ليكن $T:\begin{array}{ccc}(\mathcal{C}([-\pi,\pi]),||\ ||_\infty) & \to & (\mathcal{C}([-\pi,\pi]),||\ ||_2)\\ f & \to & 2f\end{array}$ بين أنّ T متّصل و T^{-1} غير متّصل. مَا العبرة

التمرين الثَّالث ليكن $G=\{f\in L^2([-\pi,\pi]);\int_{-\pi}^{0}f(t)dt-\int_0^{\pi}f(t)dt=1\}$

١) بيّن أنّ G مغلق و محدّب في $(L^2([-\pi,\pi]),||\ ||_2)$

٢) إستنتج أنّه يوجد $g\in L^2([-\pi,\pi])$ وحيد يحقّق $||g||_2=\inf_{f\in F}||f||_2$. أوجد g.

٣) في $(\mathcal{C}([-\pi,\pi]),||\ ||_\infty)$ بيّن أنّ $F=\{f\in G\bigcap\mathcal{C}([-\pi,\pi]),||f||_\infty\le 2\}$ مغلق و محدّب و غير متَرَاص. و لَا يوجد $h\in F$ يحقّق $||h||_\infty=\inf_{f\in F}||f||_\infty$. هل في $(\mathcal{C}([-\pi,\pi]),||\ ||_\infty)$ تَتحقَّق معَادلة متوَازي الأضلَاع.

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم قسم الريَاضيَات ٢٧ جمَادَى الأول ١٤٢٨

تحليل دَالَى الَاختبَار النهَائي في سَاعتين

التمرين الَاول ليكن F فضَاء جزئِي مغلق من فضَاء هلبَارت حقيقي $(E,||\ ||)$ و $F\neq E$ و $f:F\to\mathbb{R}$ دَالة خطّيّة

١) بيّن أنّ f تكون متّصلة إذَا و فقط إذَا كَان $kerf$ مغلقًا في E

٢) بيّن أنّه يوجد $a\in E$ بحيث $||a||=1$ و $d(a,F)=1$

٣) بيّن أنّه إذَا كَانت f متّصلة فإنّه توجد دَالة خطّيّة $\tilde{f}:E\to\mathbb{R}$ تحقّق $\forall x\in F,\tilde{f}(x))=f(x)$ و $||f||=||\tilde{f}||$

٤) ليكن K متَرَاصّ من E بيّن أنّ $\{x\in K,||x||<1\}$ هو فضَاء بَار. لنفترض أنّ f غير متّصلة بيّن أنّ دَاخليّة K تكون فَارغة $K^\circ=\emptyset$

التمرين الثَّاني ليكن $(H,<\ ,\ >)$ فضَاء هلبَارت علَى $\mathbb{C}$ و $u:H\to H$ تطبيق يحقّق $\forall(x,y)\in H\times H,<u(x),y>=<x,u(y)>$

١) أذكر نصّ و برهَان نظريّة إنتظَام المحدُودُية

Uniform boundedness principle

٢) بين أنّ $\forall y \in H,\ x \to < u(x), y >$ هي دَالة خطية متّصلة. مَا هو معيَارهَا. و بين أنّ u هو مُؤثر خطي

٣) بين أنّه إن كَانت $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ فإنّ $\{x \to < x, u(y_n) >, n \in \mathbb{N}\}$ تكون محدودة في $L(H, \mathbb{C})$ و إستنتج أنّ u مُؤثر خطي متّصل

التمرين الثَّالث ليكن $(E, ||\ ||)$ فضَاء هلبَارت و d هي المسَافة عليه و ليكن N معيَار ثَاني بحيث يكون (E, N) فضَاء بَنَاخ و $\forall x \in E, N(x) \leq ||x||$

١) بيّن أنّ المعيَارين السَّابقين متكَافئَان. مَا هو نصّ النظريّة التي إستعملتهَا. مَا هو تعريف $l^2(\mathbb{C})$. هل يكونَان متكَافئَان إذَا إفترضنَا أنّ (E, N) فضَاء معيَاري فقط.

٢) ليكن $C = \{x \in E, ||x|| \leq 1\}$ بين أنّ الإسقَاط P_C علَى C دَالة حسنة التعريف و متّصلة. هل هي خطّية. مَا هو نصّ النظريّة التي إستعملتهَا

ليكن $E > F$ فضَاءً جزئِيًا ذي بعد متهي و $A \in E$ لكلّ $x \in F$ لتكن $f(x) = d(A + x, C)$ المسَافة بين $A + x$ و C

٣) بين أنّ $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$ و أنّه يوجد $a \in A + F$ و $b \in C$ بحيث $||a - b|| = d(A + F, C)$ و بين أنّ $b - a$ يكون متعَامد مع كلّ عنصر من F

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات

حلّ التمرين الثَّاني صفحة 38 التّحليل الدَّالي

د. حسين المير ١٨٨٣ $hassine\_elmir@yahoo.fr$

ألتمرين الثَّاني ليكن H فضَاء هلبَارت F فضَاء جزئِي ذي بعد متهي و G فضَاء جزئِي مغلق من H و $A \in H$

١) بين انّ الَاسقَاط P علَى $A + F = \{A + x, x \in F\}$ تكون دَالة متّصلة

٢) لكلّ $x \in F$ لتكن $f(x) = d(A + x, G)$ المسَافة بين $A + x$ و G بين انّ $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$ إن و فقط إن كَان $F \bigcap G = \{0\}$

٣) لنفترض أنّ $F\bigcap G=\{0\}$ بين أنّه يوجد $a\in A+F$ و $b\in G$ بحيث $||a-b||=d(A+F,G)$

٤) بين أنّ $b-a$ يكون متعامد مع كلّ عنصر من $F+G$

٥) بين في جميع الحالَات أنّه يوجد $a\in A+F$ و $b\in G$ بحيث $||a-b||=d(A+F,G)$

الحلّ

يعتمد علَى نظريّة الإسقَاط في فضَاء هلبَارت

نظريّة الإسقَاط

لتكن C مجموعة جزئِيّة محدّبة و مغلقة من فضَاء هلبَارت H فإنّه لكلّ $x\in H$ يوجد عنصر وحيد $P_C(x)$ في C نسمّيه إسقَاط x علَى C يحقِّق

$$||x-P_C(x)||=\inf\{||x-y||,y\in C\}$$

من نص النظريّة إِذَا كَان $c\in C$ يحقِّق $||x-c||=\inf\{||x-y||,y\in C\}$ فإنّ $c=P_C(x)$

١) بما أنّ F محدّب و مغلق لأنّه فضَاء جزئِي ذو بعد متنهي فإنّ $A+F$ يكون محدّب و مغلق من نظريّة الإسقَاط لكلّ $y\in H$ يوجد عنصر وحيد $P_{A+F}(y)\in(A+F)$ يحقِّق $||y-P_{A+F}(y)||=d(A+F,y)=\inf_{x\in F}||y-(A+x)||$ القيمة الصّغرَى تتحقَّق عند العنصر الوحيد $x=P_F(y-A)$ إِذًا $P_{A+F}(y)=A+P_F(y-A)=P_F(y)+A-P_F(A)$. بما أنّ P_F خطّية و متّصلة فإنّ $y\to P_{A+F}(y)=P_F(y)+A-P_F(A)$ تكون متّصلة و P_{A+F} تكون خطّية إِذَا و فقط إِذَا كَانت $A\in F$.

٢) إِذَا $F\bigcap G\neq\{0\}$ ليكن $\{0\}\neq v\in F\bigcap G$ فإنّ $\lim_{|t|\to\infty}||tv||=\infty$ و $f(tv)=d(A+tv,G\leq||A+tv-(tv)||=||A||$ إِذًا $\underline{\lim}_{||x||\to\infty}f(x)\leq||A||$ لأنّ $tv\in G$ أمّا إِذَا كَان $F\bigcap G=\{0\}$ ليكن $a=\inf_{x\in F,||x||=1}d(x,G)$. بما أنّ $S+\{x\in F,||x||=1\}$ متراص لأنّ بعد F متنهي و $d(x,G)$ متّصلة علَى هذَا المترَاص فإنّها تصل إِلَى قيمتهَا الصّغرَى λ إِذًا يوجد $x_0\in S$ بحيث $\lambda=d(x_0,G)$ إِذًا $\lambda>0$ لأنّ x_0 لَا ينتمي إِلَى المغلق G . ليكن $x\in F\setminus\{0\}$ فإنّ

$$f(x)=d(A+x,G)=\inf_{y\in G}||y-(A+x)||\geq\inf_{y\in G}||y-x||-||A||$$

و بما أنّ $\inf_{y\in G}||y-x||=||x||\inf_{y\in G}||\frac{y}{||x||}-\frac{x}{||x||}||=||x||\inf_{y'=\frac{y}{||x||}\in G}||y'-\frac{x}{||x||}||\geq||x||\lambda$ فإنّ

$$f(x)\geq||x||a-||A|| \text{ إِذًا } \lim_{||x||\to\infty}f(x)=\infty$$

٣) بما أنّ $\lim_{||x||\to\infty}f(x)=\infty$ فإنه يوجد $r>0$ بحيث $||x||>r\Rightarrow f(x)\geq||A||$ علَى المترَاص $\{x\in F,||x||\leq r\}$ الدَّالة المتّصلة f تصل قيمتهَا الصّغرَى عند $a'\in F$ إِذًا

$f(a') = d(A+a', G) \leq f(0) = d(A,G) \leq d(A,0) = ||A||$ بما أنّ $||x|| > r \Rightarrow f(x) \geq ||A||$ فإنّ
$f(a') = \inf_{x \in F} d(A+x, G)$ ليكن $a = A + a'$ و $b = P_G(a)$ إذًا
$\forall x \in F, \forall y \in G, ||x + A - y|| \leq d(A+x, G) \leq d(a, G) = ||a-b||$ مع المَلاحظة أنّ $b = P_G(a)$
حسن التّعريف لأنّ G مغلق

٤) بما أنّ $b = P_G(a)$ فإنّ $(a-b) \perp G$ بما أنّ
$||a-b|| = ||a - A - (b-A)|| = d(A+F, b) = \inf_{x \in F} ||(b-A) - x||$ فإنّ $P_F(b-A) = a - A$ إذًا
$a - b = (P_F(b-A) - (b-A)) \perp F$ فينتج

$$\forall x \in F, \forall y \in G, < a-b, x+y >=< a-b, x > + < a-b, y >= 0$$

إذًا $a - b$ يكون متعَامد مع كلّ عنصر من $F + G$

٥) في F ليكن $F' \oplus F \bigcap G = F$ فإنّ F' ذو بعد متهي و $F' \bigcap G = 0$ · ممّا سبق يوجد
$a \in A + F'$ و $b \in G$ بحيث $||a-b|| = d(A+F', G)$ ينتج أنّه $\forall x \in F', \forall y \in G, \forall z \in F \bigcap G$
فإنّ $G \ni (y-z)$ إذًا $||A + x + z - y|| = ||A + x - (y-z)|| \geq d(A+F', G) = ||a-b||$ إذًا
$||a-b|| = d(A+F, G)$