الفصل الخامس

مسلمات الانفصال والعد
Separation Axioms and Countability

مقدمة.

يستطيع دارس التوبولوجي أن يلاحظ أن العديد من خواص الفضاء التوبولوجى تعتمد على توزيع المجموعات المفتوحة فى هذا الفضاء. كما يلاحظ أن أكثر الفضاءات شهرة فى الهندسة والتحليل تقع ما بين الفضاء التوبولوجي المتقطع والفضاء التوبولوجي الغير متقطع وذلك لمدى الارتباط الوثيق بين مفهومي المجموعات المفتوحة و الدوال المتصلة المعرفة على هذه الفضاءات ، فمثلاً الدالة الوحيدة المستمرة المعرفة على الفضاء الغير متقطع هي الدالة الثابتة، فكلما زاد عدد المجموعات المفتوحة فإنه يقابله مزيداً من الدوال المتصلة المعرفة على هذا الفضاء.

ولكى نستطيع توفير العديد من المجموعات المفتوحة في الفضاء التوبولوجى سوف نقوم بدراسة مفهوم مسلمات الانفصال على هذا الفضاء. خلال دراسة مسلمات الانفصال سوف ندرس أي من هذه المسلمات تحقق خاصية كونها خاصية وراثية و التي ستتحقق في جميع المسلمات عدا مسلمة كون الفضاء عادياً.

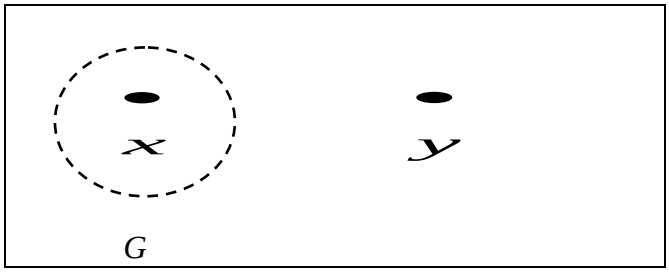
(5.1) الفضاء - T_0 Kolmogorff Space

تعريف (5.1)

يسمى الفضاء التوبولوجى (X,τ) فضاء – T_0 إذا تحقق الشرط :

$$\forall\, x,y\in X, x\neq y, \exists G\in\tau : x\in G, y\notin G \;\; or \;\; y\in G, x\notin G$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين $x,y\in X$ توجد مجموعة مفتوحة G بحيث تحوي إحداهما و لا تحتوي النقطة الأخرى.



شكل (5.1)

مثال (5.1)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. إذاً الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_0 و ذلك لأن:

(i) $a\neq b$, $\exists\,\{b\}\in\tau : b\in\{b\}$, $a\notin\{b\}$;

(ii) $a\neq c$, $\exists\,\{a,b\}\in\tau : a\in\{a,b\}$, $c\notin\{a,b\}$;

(iii) $a\neq d$, $\exists\,\{a,b\}\in\tau : a\in\{a,b\}$, $d\notin\{a,b\}$;

(iv) $b\neq c$, $\exists\,\{b\}\in\tau : b\in\{b\}$, $c\notin\{b\}$.;

(v) $b\neq d$, $\exists\,\{b\}\in\tau : b\in\{b\}$, $d\notin\{b\}$.;

(vi) $c\neq d$, $\exists\,\{b,c\}\in\tau : c\in\{b,c\}$, $d\notin\{b,c\}$.

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على إحدى النقطتين دون الأخرى، و من ثم فإن الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_0.

هذا المثال لفضاء يحقق شرط كونه فضاء– T_0.ولكن هل يوجد فضاء لا يحقق هذا الشرط ؟.

الإجابة على هذا السؤال تتضح من المثال التالي:

مثال (5.2)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. إذاً الفضاء (X,τ) ليس فضاء– T_0 و ذلك حيث أن $c\neq d$ مع أنه لا يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة تحتوي إحدى النقطتين دون أن تحتوي على الأخرى، مع العلم أن المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي c أو d هي X وهذه المجموعة تحتوي على النقطتين cو d.

نظرية (5.1)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء – T_0 إذا و فقط إذا كان $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ لكل $x,y\in X$ حيث أن $x\neq y$

البرهان

نفرض أن الفضاء (X,τ) هو فضاء – T_0.نفرض أن $x\neq y$.إذاً توجد مجموعة مفتوحة و لتكن Gتحوي إحدى النقطتين x,y و لا تحوي الأخرى. ليكن $x\in G$ و $y\notin G$ وبذلك يكون $G\cap\{y\}=\phi$ و هذا يعني أن $x\notin\overline{\{y\}}$ و لكن $x\in\overline{\{x\}}$. لذا نجد أن $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

نفرض أن $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ لأي $x\neq y$ في X. فإن $x\notin\overline{\{y\}}$ أو $y\notin\overline{\{x\}}$ و إلا

$x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{x\}}$ وهذا يقتضي أن $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. في حالة $x \notin \overline{\{y\}}$ نجد أن $x \in X - \overline{\{y\}} = G$ و G مجموعة مفتوحة تحوي نقطة ولا تحوي الأخرى .إذاً الفضاء (X,τ) يكون فضاء $-T_0$.■

تعريف (5.2)

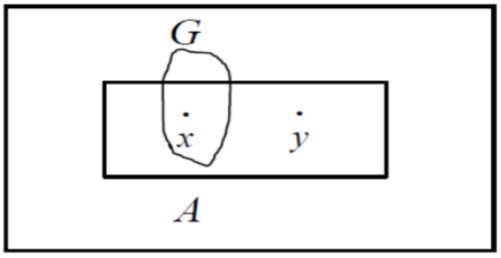
بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي، يقال لخاصيةٍ ما بأنها خاصية وراثية (Hereditary Property) إذا و فقط إذا كانت متحققة لأي فضاء جزئي (A,τ_A) من (X,τ) ،طالما كانت متحققة في الفضاء (X,τ).

نظرية (5.2)

خاصية كون الفضاء $-T_0$ هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء $-T_0$ ، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . نفرض أن $x,y \in A$ حيث أن $x \neq y$ ،إذاً $x,y \in X$ وحيث أن (X,τ) هو فضاء $-T_0$،إذاً توجد مجموعة مفتوحة $G \in \tau$ تحتوي على إحدى النقطتين ولا تحتوي على الأخرى ، و ليكن $x \in G$, $y \notin G$.



شكل (5.2)

$$\because H=(A\cap G)\in\tau_A : x\in H\ ,\ y\notin H$$

إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء$-T_0$. ■

نظرية (5.3)

إذا كان (X,τ) فضاء $-T_0$ و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة تقابل و مفتوحة من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) ، فإن (Y,υ) هو أيضا فضاء$-T_0$.

البرهان

نفـــرض أن $a,b\in Y$ بشـــرط أن $a\neq b$. إذاً العنصـــران $x=f^{-1}(a)$ و $y=f^{-1}(b)$ مختلفان. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_0، إذاً توجد مجموعة مفتوحة $G\in\tau$ تحتوي على نقطة واحدة من النقطتين x,y و ليس الأخرى، مثلاً $x\in G\ ,\ y\notin G$. و بما أن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

مفتوحة ، فإن $f(G)\in\upsilon$ و $a=f(x)\in f(G)\ ,\ b=f(y)\notin f(G)$ ، إذاً (Y,υ) هو فضاء$-T_0$. ■

نتيجة (5.1)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء$-T_0$ هي خاصية توبولوجية.

بعد أن عرفنا ما هو المقصود بالفضاء-T_0وما يحققه من خواص وايضا عرفنا أن هناك فضاءات توبولوجية ليست من النوع-T_0 . الآن ننتقل لتعريف ودراسة فضاء آخر يحقق مسلمة أخرى قد لا يحققها فضاء-T_0.

(5.2) الفضاء-T_1

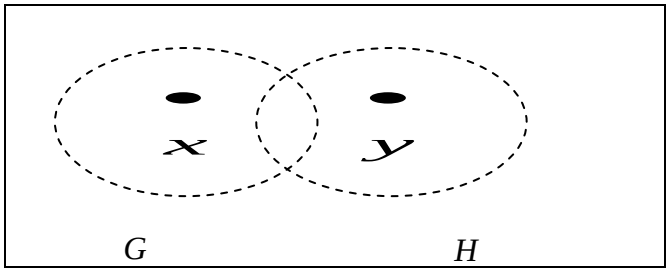
هذا الفضاء يلعب دوراً اساسياً في تكوين وتعريف انواع من الفضاءات التوبولوجية مثل فضاءات T_i حيث أن $i = 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

تعريف (5.3)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يسمى فضاء – T_1 إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall\, x,y \in X, x \neq y, \exists G,H \in \tau : x \in G, y \notin G \;, y \in H, x \notin H$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين $x,y \in X$ توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث تحتوي أحداهما على النقطة x و لا تحتوي على النقطة y ، و المجموعة الأخرى تحتوي على النقطة y و لا تحتوي على النقطة x.



شكل (5.3)

مثال (5.3)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b\}$. إذاً الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_1 و ذلك لأن:

$$a \neq b \;,\; \exists \{a\},\{b\} \in \tau : a \in \{a\}, b \notin \{a\}, b \in \{b\} \;,\; a \notin \{b\};$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين توجد مجموعتان مفتوحتان تحتوي إحداهماعلى النقطة a ولا تحتوي النقطة b ، كذلك المجموعة الثانية تحتوي النقطة b

ولا تحتوي على النقطة a.

هذا المثال لفضاء يحقق شرط كونه فضاء– T_1.ولكن هل يوجد فضاء لا يحقق هذا الشرط ؟.

الإجابة على هذا السؤال تتضح من مثال (5.1) ، حيث لا توجد مجموعة تحوي العنصر a و لا تحوي العنصر b ، فالفضاء التوبولوجي (X,τ) في هذا المثال هو فضاء – T_0 و ليس فضاء – T_1.

الآن نضع الشرط الضروري و الكافي لكي يكون الفضاء التوبولوجي فضاء– T_1، وذلك من خلال النظرية التالية.

نظرية (5.4)

يكون الفضاء التوبولوجى (X,τ) هو فضاء– T_1 إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية وحيدة العنصر مغلقة.

البرهان

أولاً : ليكن (X,τ) فضاء– T_1 وأن $p\in X$. المطلوب إثبات أن $\{p\}^c$ مجموعة مفتوحة. لإثبات ذلك نفترض أن :

$$x\in\{p\}^c \Rightarrow x\neq p$$

من شرط كون الفضاء (X,τ) فضاء– T_1، فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_x تحوي النقطة x ولا تحوى النقطة p أي أن :

$$x\in G_x \ , \ p\notin G_x$$

وهذا يؤدى إلى أن :

$$x \in G_x \subseteq \{p\}^c$$

ومن ثم فإن :

$$\{p\}^c = \cup\{G_x : x \in \{p\}^c\}$$

وهذا يعنى أن $\{p\}^c$مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن $\{p\}$ مجموعة مغلقة.

ثانيا : نفرض أن المجموعة $\{p\}$ مغلقة لكل $p \in X$ ونفرض أن $x, y \in X$ بحيث يكون $x \neq y$. فإن ذلك يعنى أن :

$$x \in \{y\}^c \quad and \quad y \in \{x\}^c$$

ولكن كل من $\{x\}^c, \{y\}^c$مجموعة مفتوحة تحوي نقطة و لا تحوي الأخرى.

وهذا هو إثبات الشرط أن الفضاء (X, τ)هو فضاء $-T_1$. ■

نظرية (5.5)

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون فضاء$-T_1$ إذا وفقط إذا كان $\{x\}` = \phi$ لكل $x \in X$.

البرهان

اولاً :نفرض أن (X, τ) هو فضاء$-T_1$ وأن $x \in X$.إذاً $\{x\}$ مجموعة مغلقة و من ثم يكون $\overline{\{x\}} = \{x\}$ و لكن $\overline{\{x\}} = \{x\}` \cup \{x\}$. إذاً $\{x\} = \{x\}` \cup \{x\}$ و حيث أن $x \notin \{x\}`$فإن $\{x\}` = \phi$.

ثانياً : نفرض أن $\{x\}` = \phi$ لكل $x \in X$ . بفرض $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن $y \notin \{x\}`$و من ثم توجد مجموعة مفتوحة تحوي yو لتكن G_y بحيث أن

$G_y \cap \{x\} = \phi$.لذا نجد أن $x \notin G_y$.بالمثل $\{y\}` = \phi$ ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_x تحوي x وتحقق $G_x \cap \{y\} = \phi$ و من ثم يكون $y \notin G_x$ وبالتالي يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_1. ■

نتيجة (5.2)

إذا كان الفضاء (X,τ) **هو هو** فضاء– T_1 **فإنه** لأي مجموعة جزئية منتهية $A \subseteq X$ فإن $A` = \phi$.

البرهان

نفرض أن $A \subseteq X$ مجموعة منتهية ولتكن $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و من ثم تكون $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ و حيث أن الفضاء (X,τ) **هو هو** فضاء– T_1 **فإن** $\{x\}` = \phi$.

وبذلك يكون $A` = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}` = \bigcup_{i=1}^{n} \phi = \phi$. ■

نظرية (5.6)

خاصية كون الفضاء– T_1 هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء– T_1 ، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . نفرض أن $x,y \in A$ حيث أن $x \neq y$ ،إذاً $x,y \in X$ وحيث أن (X,τ) هو فضاء– T_1،إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H \in \tau$ بحيث يكون $x \in G$, $y \notin G, y \in H, x \notin H$.

ولكن

$$V=(A\cap G)\in\tau_A : x\in V\ ,\ y\notin V$$

و

$$W=(A\cap H)\in\tau_A : y\in W\ ,\ x\notin W$$

إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء $-T_1$. ■

نظرية (5.7)

إذا كان (X,τ) فضاء $-T_1$ و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة تقابل و مفتوحة من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) ، فإن (Y,υ) هو أيضا فضاء $-T_1$.

البرهان

نفرض أن $a,b\in Y$ بشرط أن $a\neq b$، إذاً العنصران $x=f^{-1}(a)$ و $y=f^{-1}(b)$ مختلفان في المجال X. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء $-T_1$ ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون :

$$x\in G\ ,\ y\notin G, y\in H, x\notin H.$$

و بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن:

$$f(G)\in\upsilon, a=f(x)\in f(G)\ ,\ b=f(y)\notin f(G)$$

$$f(H)\in\upsilon, b=f(y)\in f(H)\ ,\ a=f(x)\notin f(H)$$

إذاً (Y,υ) هو فضاء $-T_1$. ■

نتيجة. (5.3)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء $-T_1$ هي خاصية توبولوجية.

(5.3) الفضاء - T_2 (فضاء هاوسدورف) Hausdorff Space

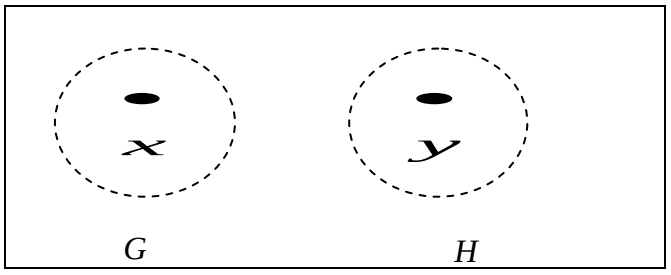
يعود اسم هذا الفضاء نسبة لعالم الرياضيات الأشهر هاوسدورف (Hausdorff) الذي عاش خلال الفترة (1868م-1942م). تعود أهمية شرط هاوسدورف هو أن المتتاليات التقاربية في هذا الفضاء تتقارب لنقطة وحيدة ، بينما ذلك ليس ضرورياً في فضاءات توبولوجية أخرى لا تحقق شرط هاوسدرف.

تعريف (5.4)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يسمى فضاء – T_2 إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall\, x,y\in X, x\neq y, \exists G,H\in\tau : x\in G, y\in H, G\cap H=\phi$$

أي أنه لكل نقطتين مختلفتين $x,y\in X$ توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتين G,H بحيث تحتوي أحداهما على النقطة x ، و المجموعة الأخرى تحتوي على النقطة y .



شكل (5.4)

مثال (5.4)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c\}$. إذاً الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_2

وذلك لأن:

$$(i)\quad a\neq b\ ,\ \exists\{a\},\{b\}\in\tau : a\in\{a\},\ b\in\{b\}\ ,\{a\}\cap\{b\}=\phi;$$

$$(ii)\quad a\neq c\ ,\ \exists\{a\},\{c\}\in\tau : a\in\{a\},\ c\in\{c\}\ ,\{a\}\cap\{c\}=\phi;$$

$$(iii)\quad b\neq c\ ,\ \exists\{b\},\{c\}\in\tau : b\in\{b\},\ c\in\{c\}\ ,\{b\}\cap\{c\}=\phi.$$

مثال (5.5)

كل فضاء متري هو فضاء – T_2

البرهان

أنظر نظرية (2.5).■

مثال (5.6)

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقة وأن υ التوبولوجي المعرف على R والمولد بواسطة الفترات $(a,b]$ فإن الفضاء (R,υ) يكون فضاء – T_2.

الحل :

بفرض أن $a,b\in R$ وأن $a\neq b$ ولـيكن $a<b$. باختيار المجموعة $G=(a-1,a]$ والمجموعة $H=(a,b]$ فإننا نجد أن :

$$G,H\in\tau\ ,a\in G\ ,b\in H\ ,G\cap H=\phi$$

ومن ثم فإن (R,τ) يحقق الشرط T_2.

نظرية (5.8)

كل فضاء – T_2 هو فضاء – T_1.

البرهان

من التعريف تتحقق شروط كون الفضاء – T_1. لكن عكس هذه النظرية ليس

صحيحاً دائماً وذلك يتضح من خلال المثال التالي:

مثال (5.7)

بفرض أن X مجموعة غير منتهية. فإن فضاء المكملات المنتهية (X,C) هو فضاء $-T_1$ وليس فضاء $-T_2$.

الحل:

نفرض أن $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ ، من تعريف التوبولوجي

$$C=\{\phi,G\subseteq X:G^c\ finite\}$$

نجد ن $\{x\},\{y\}$ مجموعات منتهيه و بالتالي فإن

$G=X-\{y\}=\{y\}^c$ مجموعة مفتوحة تحوي x ولا تحوي y و كذلك المجموعة $H=X-\{x\}=\{x\}^c$ مجموعة مفتوحة تحوي y ولا تحوي x. إذاً (X,C) هو فضاء $-T_1$.

ولكن إذا كان $x\in G\in\tau$ و $y\in H\in\tau$ و X غير منتهي فإن $G\cap H\neq\phi$ إذاً هذا الفضاء ليس $-T_2$. ■

نظرية (5.9)

خاصية كون الفضاء $-T_2$ هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء $-T_2$ ، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . نفرض أن $x,y\in A$ حيث أن $x\neq y$ ،إذاً $x,y\in X$ وحيث أن (X,τ) هو فضاء $-T_2$،إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون : $x\in G,y\in H,G\cap H=\phi$. ولكن بما أن المجموعتين

$V=(A\cap G)\in\tau_A$ و $W=(A\cap H)\in\tau_A$ غير متقاطعتين. إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء– T_2. ■

ملاحظة:

حيث أن كل فضاء متري هو فضاء– T_2،فإن أي فضاء جزئي من مجموعة الاعداد الحقيقية هو فضاء– T_2وذلك باعتباره فضاء جزئي من الفضاء المتري الاقليدي على R.

نظرية (5.10)

إذا كان (X,τ) فضاء– T_2 و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة تقابل و مفتوحة من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) ، فإن (Y,υ) هو أيضا فضاء– T_2.

البرهان

نفرض أن $a,b\in Y$ بشرط أن $a\neq b$، إذاً يوجد $x,y\in X$ بحيث أن

$$x=f^{-1}(a)\ \text{و}\ y=f^{-1}(b)\ \text{و}\ x\neq y.$$

و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء– T_2 ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون :

$$x\in G\ ,y\in H,G\cap H=\phi.$$

و بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن:

$$f(G)\in\upsilon,a=f(x)\in f(G)$$

$$f(H)\in\upsilon,b=f(y)\in f(H)$$

و حيث أن $f(G)\cap f(H)=f(G\cap H)=f(\phi)=\phi$. إذاً (Y,υ) هو فضاء– T_2 .■

نتيجة (5.4)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء– T_2 هي خاصية توبولوجية.

نظرية (5.11)

بفرض أن الفضاء (Y,τ_2) فضاء هاوسدورف وأن الدالتين

$$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2) \quad \text{و} \quad g:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$$

متصلتان فإن المجموعة $A=\{x: f(x)=g(x)\}$ مجموعة مغلقة.

البرهان

نحاول اثبات أن المجموعة $A^c=\{x: f(x)\neq g(x)\}$ مفتوحة. نفرض أن $x\in A^c$ إذاً $f(x)\neq g(x)$ وحيث أن (Y,τ_2) هو فضاء– T_2، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G,H\in\tau_2$ بحيث أن $f(x)\in H, g(x)\in G$. بما أن f,g دالتان متصلتان فإن $f^{-1}(H),g^{-1}(G)\in\tau_1$ و من ثم يكون $x\in f^{-1}(H)\cap g^{-1}(G)=W\in\tau_1$ و بالتالي $x\in W\subseteq A^c$.إذاً A^c مجموعة مفتوحة.■

نتحول الآن لمعرفة العلاقة بين فضاء هاوسدورف وتقارب المتتاليات وأن المتتالية التقاربية تتقارب لنهاية وحيدة، حيث علمنا من قبل أن نهاية المتتالية في الفضاءات التي لا تحقق خاصية هاوسدورف ليس من الضروري أن تكون وحيدة.

نظرية (5.12)

إذا كان (X,τ) فضاء هاوسدورف فإن كل متتالية تقاربية في X تكون لها نهاية وحيدة.

البرهان

نفرض أن للمتتالية $x_n \in X$ نقطتي نهاية ، هما a و b بحيث أن $a \neq b$. بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_2 فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين H,G بحيث أن $a \in G$, $b \in H$. نعرف أنه يوجد عدد $n_a \in N$ بحيث أن $x_n \in G$ لكل $n \geq n_a$ و ايضاً العدد $n_b \in N$ بحيث أن $x_n \in H$ لكل $n \geq n_b$. لذا فإنه لكل $n \geq \max\{n_a, n_b\}$ نحصل على أن $x_n \in G \cap H$ وهذا يتعارض مع كون $G \cap H = \phi$. إذاً $a = b$. أي أن النهاية وحيدة.■

تمـارين (5.1)

(**1**) بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- (X,τ) فضاء- T_0 و ليس فضاء- T_1.
- (X,τ) فضاء- T_1.
- (X,τ) فضاء- T_2 .

(**2**) بفرض أن $X = \{a,b,c,d\}$.كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- $\{d\},\{a,b\} \in \tau$ و يكون (X,τ) هو فضاء- T_0 .
- $\{d\},\{b,c\},\{a,b,c\} \in \tau$ و يكون (X,τ) هو فضاء- T_1.

(3) بفرض أن X مجموعة منتهية وأن (X,τ) هو فضاء- T_1 . برهن أن

(X,τ) هو فضاء منفصل (متقطع).

(4)هل الفضاء المنفصل (X,D) هو فضاء– T_0؟

(5)هل الفضاء الغير منفصل (X,I) هو فضاء– T_0؟

(6)هل فضاء المكملات المنتهية (X,C) هو فضاء– T_0؟ **حيث أن**

$$C=\{\phi, G\subseteq X, G^C \text{ finite}\}$$

(7)هل الفضاء (R,τ) هو فضاء– T_0؟ حيث أن

$$\tau=\{\phi, R, E_a=(a,\infty): a\in R\}$$

(8)برهن أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء – T_2 إذا و فقط إذا كانت مجموعة الخط القطري $\Delta=\{(x,y): x=y\}\subseteq X\times X$ مغلقة .

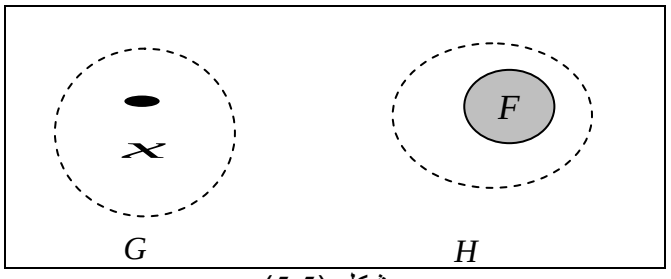
(5.4) الفضاءات المنتظمة Regular Spaces

فيما سبق لاحظنا أن الاهتمام كان منصباً ، في كل من الفضاءين T_1 و T_2،على فصل نقاط الفضاء عن بعضها البعض وذلك بأنه لكل نقطتين مختلفتين توجد مجموعتان مفتوحتان كل مجموعة تحوى نقطة واحدة دون الأخرى. أما الآن سوف نحاول استبدال إحدى النقطتين بمجموعة مغلقة أو استبدالهما معاً بمجموعتين مغلقتين وسوف ندرس حال الانفصال في كلتا الحالتين.

تعريف (5.5)

يُقال للفضاء التوبولوجى (X,τ) إنه فضاء منتظم Regular إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في X و لأي نقطة $x\in X$ ولا تنتمي إلى F توجد

مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين G,H بحيث يكون $x \in G, F \subseteq H$.



شكل (5.5)

مثال (5.8)

نفرض أن $X=\{a,b,c\}$ مجموعة غير خالية و أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ توبولوجي معرف على X. المجموعات المغلقة في X هي $\phi, X, \{b,c\}, \{a\}$.

بتطبيق شرط الانتظام على المجموعات المغلقة نلاحظ الآتي:

$$a \notin \{b,c\} \Rightarrow \exists \{a\},\{b,c\} \in \tau : a \in \{a\}, \{b,c\} \subseteq \{b,c\} \wedge \{a\} \cap \{b,c\} = \phi$$

$$b \notin \{a\} \Rightarrow \exists \{b,c\},\{a\} \in \tau : b \in \{b,c\}, \{a\} \subseteq \{a\} \wedge \{a\} \cap \{b,c\} = \phi$$

$$c \notin \{a\} \Rightarrow \exists \{b,c\},\{a\} \in \tau : c \in \{b,c\}, \{a\} \subseteq \{a\} \wedge \{a\} \cap \{b,c\} = \phi$$

و بالتالي فإن الفضاء (X,τ) هو فضاء منتظم و لكنه ليس فضاء- T_1 وبالطبع لا يكون فضاء- T_2.

مثال (5.9)

كل فضاء غير منفصل (X,I) هو فضاء منتظم و لكنه ليس T_2، ومن ثم لا يكون T_1 أو T_0.

قد يتبادر لذهن القارئ السؤال التالي : هل هناك فضاء يحقق شرط T_1 ولا يكون منتظماً؟. الاجابة من خلال المثال التالي:

مثال (5.10)

إذا كانت X غير منتهي، فضاء المكملات المنتهية (X,C) هو فضاء- T_1 وليس منتظماً

البرهان

يترك للقارئ كتمرين.

الآن عرفنا أنه ليس من الضروري أن كل فضاء منتظم يحقق شرط كونه فضاء- T_1.ولكن في حالة كون الفضاء محقق للشرطين معا نحصل على فضاء جديد يسمى فضاء- T_3 .

تعريف (5.6)

يقال لفضاء منتظم إنه فضاء- T_3 إذا كان يحقق شرط كونه فضاء- T_1.

مثال (5.11)

كل فضاء منفصل (X,D) هو فضاء – T_3.

نظرية (5.13) :

كل فضاء – T_3 هو فضاء – T_2.

البرهان

نفرض أن (X,τ) هو فضاء – T_3 وأن $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$. من شرط كون الفضاء – T_1 ، نجد إن $\{x\}$ مجموعة مغلقة و $x\notin\{y\}$،و من شرط كون الفضاء منتظماً فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين G,H بحيث يكون $x\in\{x\}\subseteq G$, $y\in H$ و عليه فإن (X,τ) هو فضاء- T_2. ■

عكس النظرية السابقة ليس صحيحاً دائماً. فالمثال التالي يبين أنه ليس من الضروري أن يكون كل فضاء- T_2 هو فضاء- T_3.

مثال(5.12)

نفرض أن T توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R مولد بأنظمة الجوارات المفتوحة.

$$N_x = \begin{cases} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) & \forall x \neq 0 \\ (-\varepsilon,\varepsilon) - \{\frac{1}{n} : n \in Z^+ & x = 0 \end{cases}$$

هذا الفضاء التوبولوجى (R,T) هو فقط فضاء- T_2 و ليس فضاء- T_3.

أولاً: نبين أنه فضاء T_2 – .نفرض أن $x, y \in R$ بحيث أن $x \neq y$. فإذا كانت $x \neq 0, y \neq 0$ ، فإن المجموعتين :

$$G = (x - \frac{|x-y|}{2}, x + \frac{|x-y|}{2}) \text{ و } H = (y - \frac{|x-y|}{2}, y + \frac{|x-y|}{2})$$

مفتوحتين وغير متقاطعتين وأن $x \in G$, $y \in H$. إذاً (R,T) هو فضاء- T_2.

لإثبات أنه ليس فضاء- T_3.نفرض أن $x = 0$ وأن $F = \{\frac{1}{n}\}$ حيث أن n عدد صحيح موجب. المجموعة $F = \{\frac{1}{n}\}$ مغلقة. بفرض أن $V = (-\varepsilon,\varepsilon) - \{\frac{1}{n}\}$ أي جوار للنقطة $x = 0$.لذا لا يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة W بحيث أن $F \subseteq W$ و $V \cap W = \phi$ و هذا يعني أن الفضاء (R,T) ليس منتظماً و من ثم لا يكون T_3.

نظرية (5.14)

الفضاء التوبولوجى (X,τ) يكون فضاءً منتظماً إذا وفقط إذا كان لكل نقطة

$x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة G بحيث أن $x \in G$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$$

البرهان

أولاً : نفرض أن (X,τ) فضاء منتظم وأن $x \in G$ وأن G مجموعة مفتوحة فإن G^c مجموعة مغلقة وأن $x \notin G^c$. من شرط الانتظام نجد أنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين H,W بحيث أن : $x \in H, G^c \subseteq W$. بما أن $H \cap W = \phi$ ، فإن $H \subseteq W^c$ ومن ثم فإن :

$$x \in H \subseteq W^c \subseteq G$$

وبما أن W^c مغلقة فإن :

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq W^c \subseteq G$$

وهذا هو المطلوب أولاً.

ثانيا : نفرض أنه لكل $x \in G$ ولكل مجموعة مفتوحة G توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$$

والمطلوب إثبات أن الفضاء منتظم. لتكن F مجموعة مغلقة و $x \notin F$.المجموعة $F^c = G$ مجموعة مفتوحة تحتوي النقطة x . من الشرط نجد أنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$ و من ثم نجد أن :

$$x \in H, \overline{H} \subseteq G, F = G^C \subseteq \overline{H}^C, H \cap \overline{H}^C = \phi$$

أي أنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $H,\overline{H}^{C}$ ،إحداهما تحتوي على النقطة x ، و الأخرى تحتوي على المجموعة المغلقة F .وهذا هو إثبات أن (X,τ) فضاء منتظم.■

نظرية (5.15)

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ)منتظماً هي خاصية وراثية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء منتظم، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ). نفرض أن $a\in A$ و $B\subseteq A$ مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A، بحيث أن $a\notin B$. بما أن المجموعة B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A ، إذاً توجد مجموعة مغلقة Fفي X بحيث أن $B=F\cap A$(انظر نظرية (3.19) حيث أن $F^C\in\tau$). بما أن $a\notin B$ ، فإن $a\notin F$. بما أن (X,τ) هو فضاء منتظم و $a\notin F$ ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون $a\in G,F\subseteq H,G\cap H=\phi$ ولكن من تعريف التوبولوجي النسبي نجد أن:

$$V=(A\cap G)\in\tau_A : a\in V$$

$$W=(A\cap H)\in\tau_A : B=F\cap A\subseteq W$$

و من ثم نجد أن

$$V\cap W=(A\cap G)\cap(A\cap H)=A\cap(G\cap H)=A\cap\phi=\phi$$

إذاً الفضاء الجزئي (A,τ_A) هو فضاء منتظم.■

نتيجة (5.5)

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ)فضاء $-T_3$ هي خاصية وراثية.

نظرية (5.16)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي منتظماً هي خاصية توبولوجية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) منتظم وأن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

تقابل و مفتوحة ومتصلة. لإثبات أن الفضاء (Y,υ) منتظم. نفرض أن $y\in Y$ و $F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة في Yبشرط أن $y\notin F$. بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تقابل و متصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X وأن $x=f^{-1}(y)\notin f^{-1}(F)$. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء منتظم ، إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G,H\in\tau$ بحيث يكون $x\in G$ و $f^{-1}(F)\subseteq H$. بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن:

$$F=f(f^{-1}(F))\in f(H)\quad y=f(x)\in f(G),\ f(G),f(H)\in\upsilon,$$

و حيث أن $f(G)\cap f(H)=f(G\cap H)=f(\phi)=\phi$ إذاً (Y,υ) هو فضاء منتظم .■

نتيجة (5.6)

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ) فضاء $-T_3$ هي خاصية توبولوجية.

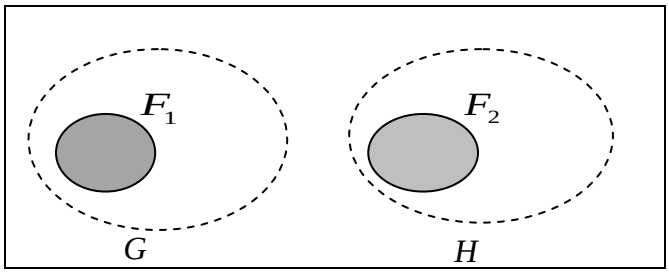
(5.5) الفضاءات العادية Normal Spaces

بعد أن عرفنا مفهوم الفضاء الذي يحقق خاصية الفصل بين المجموعات المغلقة و النقاط التي لا تنتمي لهذه المجموعات، سوف نتعرض فيما يلي لنوع جديد من مسلمات الفصل والتي فيها تتحقق خاصية فصل المجموعات المغلقة الغير متقاطعة بمجموعات مفتوحة وغير متقاطعة ايضا. في هذه الحالة يسمى الفضاء التوبولوجي بالفضاء العادي.

تعريف (5.7)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه فضاء عادي Normal إذا وفقط إذا كانت لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين F_1, F_2 في X (أي أن $F_1 \cap F_2 = \phi$)، توجد مجموعتان $G, H \in \tau$ بحيث يكون

$$F_1 \subseteq G, F_2 \subseteq H, G \cap H = \phi$$



شكل (5.6)

مثال (5.13)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c\}$. هل الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي ؟.

الحل

المجموعات المغلقة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) هي:

$$\phi, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$$

واضح أن هذا الفضاء هو فضاء عادي ،و لكنه ليس فضاءً منتظماً ، حيث توجد مجموعة مغلقة $\{b,c\}$و نقطة $a \notin \{b,c\}$ ، و لكنه لا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين بحيث تحتوي إحداهما على النقطة a و الأخرى تحتوي على المجموعة المغلقة $\{b,c\}$.

مثال (5.14)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c\}$ من السهل التأكد من أن (X,τ) هو فضاء عادي و لكنه ليس فضاء- T_0.

مثال (5.15)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$. **من السهل التأكد من أن** الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي و فضاء- T_0. لكنه ليس منتظم ولا فضاء- T_1 .

مثال (5.16)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$. من السهل التأكد من أن الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي و منتظم و لكنه ليس فضاء $-T_1$.

بعد أن عرفنا أنه ليس من الضروري أن كل فضاء عادي هو فضاء $-T_1$، فإنه في حالة كون الفضاء عادياً و $-T_1$، فإن هذا يقودنا للتعريف التالي:

تعريف (5.8)

يُقال لفضاءٍ عاديٍ أنه فضاء $-T_4$ إذا كان فضاء $-T_1$.

مثال (5.17)

كل فضاء منفصل (X,D) هو فضاء – T_4.

نظرية (5.17)

كل فضاء – T_4 هو فضاء – T_3.

البرهان

نفرض أن (X,τ) هو فضاء – T_4. نفرض أن $x\in X$ و $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة بحيث أن $x\notin F$. من شرط كون الفضاء – T_1 ، فإن $\{x\}$ مجموعة مغلقة و $\{x\}\cap F=\phi$، و لكون الفضاء (X,τ) عادياً فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين G,H بحيث يكون $F\subseteq H$, $x\in\{x\}\subseteq G$ و عليه فإن (X,τ) هو فضاء منتظم و من ثم يكون فضاء - T_3.■

عكس هذه النظرية ليس صحيحاً دائما. المثال التالي لفضاء - يسمى فضاء موور (Moore) أو فضاء نيمتزكي (Niemytzki plane) – هذا الفضاء هو فضاء – T_3 وليس T_4. كما إنه يصلح أن يكون مثالاً لفضاء منتظم و T_2 ولكنه ليس عاديا.

مثال (5.18) (مستوي نيمتزكي Niemytzki plane)

نفرض المجموعات التالية:

(1) $X=\{(x,y)\in R^2 : y\geq 0\}$

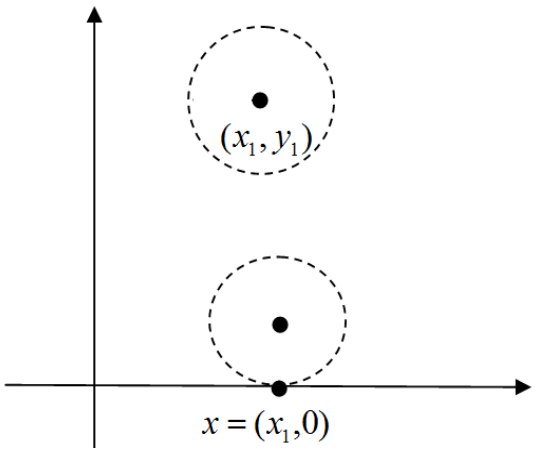
(2) $X_u=\{(x,y)\in R^2 : y>0\}$

(3) $T=\{(x,0) : x\in R\}$

نفرض أن τ_u التوبولوجي الاقليدي (الاعتيادي) على X_u المولد بالأقراص المفتوحة

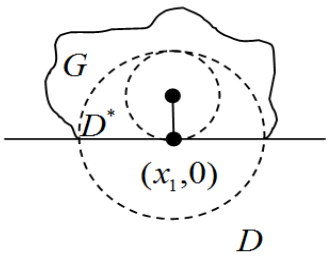
$$D(x,\varepsilon)=\{(x_2,y_2)\in X_u:\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\varepsilon\}$$

حيث أن $x=(x_1,y_1)\in X_u$ و $\varepsilon>0$. نعرف التوبولوجي τ^* على $X=X_u\cup T$ بإضافة المجموعات التي من النوع $D\cup\{p\}$ إلى التوبولوجي τ_u، حيث أن $p\in T$ و D هي قرص مفتوح في X_u و يمس المحور T عند النقطة p (انظر الشكل(5.7)). بفرض أن $G\subset X$ مجموعة مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي الاقليدي على X، ونفرض أن $x=(x_1,x_2)\in G$. فإذا كانت $x\in X_u$، فإنه يوجد جوار مفتوح لهذه النقطة.



شكل (5.7)

وإذا كانت $x\in T$، فإنه يوجد القرص المفتوح $D(x,\frac{\varepsilon}{2})$ مركزه النقطة $x=(x_1,0)$ بحيث أن $D(x,\frac{\varepsilon}{2})\cap X\subset G$. ولذا يمكن إيجاد قرص مفتوح آخر $D^*((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4})$ وبحيث أن $D^*((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4})\subset X_u$ ويمس محور السينات (كما في الشكل التالي)



شكل (5.8)

في حالة $x=(x_1,0)\in T$ نجد أن $\{x\}\cup D((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4})\subset D((x_1,x_2),\frac{\varepsilon}{4})$

أولاً: إثبات أن الفضاء (X,τ^*) هو فضاء هاوسدورف، نختار النقطتين المختلفتين $a=(a_1,a_2)$ و $b=(b_1,b_2)$ في X بحيث أن:

$$d(a,b)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\varepsilon>0$$

ليكن

$$O_{(x_1,x_2)}=\begin{cases} D((x_1,x_2),\frac{\varepsilon}{2}) & if\ \ x_2\neq 0 \\ \{x\}\cup D((x_1,\frac{\varepsilon}{4}),\frac{\varepsilon}{4}) & if\ \ x_2=0 \end{cases}$$

في حالة $a,b\in X_u$ فإن :

$$O_a\cap O_b=D((a_1,a_2),\tfrac{\varepsilon}{2})\cap D((b_1,b_2),\tfrac{\varepsilon}{2})=\phi$$

في حالة $b\in T$ و $a\in X_u$ ، فإن:

$$O_a\cap O_b=D((a_1,a_2),\tfrac{\varepsilon}{2})\cap(\{b\}\cup D((b_1,\tfrac{\varepsilon}{4}),\tfrac{\varepsilon}{4}))=\phi$$

بالمثل في حالة $b\in X_u$ و $a\in T$ ، أو أن $a,b\in T$. في جميع الحالات نجد أن $O_a\cap O_b=\phi$ مما يعني أن (X,τ^*) هو فضاء هاوسدورف.

ثانياً: إثبات أن (X,τ^*) منتظم، نفرض أن F مجموعة مغلقة في (X,τ^*) وأن $a=(a_1,b_1)\in X$ بحيث أن $a=(a_1,b_1)\notin F$.

إذا كانت $a\notin T$ أي أن $a\in X_u$ ، نفرض أن $\varepsilon=d(a,F\cup T)$ فإنه توجد

مجموعتين مفتوحتين

$$G = D(a, \tfrac{\varepsilon}{2}), H = \{(x_1, x_2) \in X : d((x_1, x_2), a) > \varepsilon\}$$

بحيث أن $a \in G$ و $F \subseteq H$ و $G \cap H = \phi$.

أما في حالة أن $a \in T$. بما أن F^c مجموعة مفتوحة تحوي النقطة a، فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $\{(a_1,0)\} \cup D((a_1,0), \varepsilon) \subset F^c$. إذاً :

(i) $\left(\overline{D}((a_1, \tfrac{\varepsilon}{2}), \tfrac{\varepsilon}{2})\right)^c = V$ مجموعة مفتوحة تحوي F

(ii) $D((a_1, \tfrac{\varepsilon}{2}), \tfrac{\varepsilon}{2}) = U$ مجموعة مفتوحة تحوي a

و ايضاً $U \cap V = \phi$.

ثالثاً: أثبات أن هذا الفضاء ليس عادياً.

نختار المجموعتين $A = \{(a,0) : a \in Q\}$ و $B = \{(a,0) : a \in R - Q\}$. هاتين المجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين و نفس الوقت لا نستطيع ايجاد مجموعتين مفتوحتين وغير متقاطعتين بحيث أن أحداهما تحوي المجموعة A والثانية تحوي المجموعة B.

نظرية (5.18)

الفضاء التوبولوجى (X, τ) يكون فضاءً عادياً إذا وفقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة $F \subseteq X$ ولكل مجموعة مفتوحة G بحيث أن $F \subseteq G$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$F \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq G.$$

البرهان

أولاً : نفرض أن (X, τ) فضاء عادي وأن F مجموعة مغلقة في X وأن G مجموعة مفتوحة بحيث أن . المجموعة G^c مجموعة مغلقة وأن $F \cap G^c = \phi$

من شرط كون الفضاء عادياً، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين H,W بحيث أن $F \subseteq H, G^c \subseteq W$. بما أن $H \cap W = \phi$، فإن $H \subseteq W^c$

ومن ثم فإن :

$$F \subseteq H \subseteq W^c \subseteq G$$

وبما أن W^c مغلقة فإن :

$$F \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq W^c \subseteq G$$

وهذا هو المطلوب أولاً.

ثانيا : نفرض أن الشرط متحقق و أن F_1 , F_2 مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين، و من ثم يكون $F_1 \subseteq F_2^C$ حيث أن F_2^Cمجموعة مفتوحة.

وبموجب تحقق الشرط، فإنه توجد مجموعة مفتوحة H بحيث أن :

$$F_1 \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq F_2^C$$

باختيار $G = X - \overline{H}$، فإن H,G مجموعتان مفتوحتان يحققان

$$F_1 \subseteq H,\ F_2 \subseteq G, H \cap G = \phi$$

وهذا هو إثبات أن (X,τ) فضاء عادي.■.

نظرية (5.19)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي عادياً هي خاصية توبولوجية.

البرهان

نفرض أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) هو فضاء عادي ، أن الدالة

$$f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$$

توبولوجية و المطلوب إثبات أن الفضاء (Y,υ) فضاءً عادياً.

نفرض أن F_1 و F_2 مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين في Y ، بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تقابل و مستمرة فإن $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2)$ مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين في X. و بما أن الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون :

$$f^{-1}(F_1)\subseteq G \ , f^{-1}(F_2)\subseteq H, G\cap H=\phi \ .$$

و بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن $f(G), f(H)$ مجموعتان مفتوحتان و يحققان أن

$$F_1\subseteq f(G), F_2\subseteq f(H)$$

و حيث أن

$$f(G)\cap f(H)=f(G\cap H)=f(\phi)=\phi$$

إذاً (Y,υ) هو فضاء عادي .■

نتيجة (5.7)

خاصية كون الفضاء- T_4 هي خاصية توبولوجية.

ملاحظة:

فيما سبق استطعنا إثبات أن خاصية كون الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاء– T_i، حيث أن $i=0,1,2,3$، هي خاصية وراثية ، ولكن المثال التالي يوضح أن هذا ليس صحيحاً في حالة الفضاء العادي ومن ثم الفضاء– T_4.

مثال (5.19)

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. واضح أن الفضاء (X,τ) هو فضاء عادي وذلك لأن عائلة المجموعات المغلقة في X هي

$$\tau^C=\{\phi,X,\{a,c,d\},\{c,d\},\{a,d\},\{d\}\}$$

ولا توجد أي مجموعتين مغلقتين فعليتين غير متقاطعتين ، و لذا فإن (X,τ) فضاء عادي لعدم وجود ما يمنع ذلك. و بفرض أن $A=\{a,b,c\}$ مجموعة جزئية وأن

$$\tau_A=\{A,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

توبولوجي نسبي على المجموعة A ، وأن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ). بالرغم من أن الفضاء (X,τ) فضاءً عاديا، إلا أن الفضاء الجزئي (A,τ_A) ليس عادياً ، وذلك يتضح مما يلي:

المجموعات المغلقة في الفضاء الجزئي (A,τ_A) هي:

$$\phi,A,\{a,c\},\{c\},\{a\}$$

نلاحظ أنه توجد مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتين هما $\{a\},\{c\}$، و لا يمكن إيجاد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين في الفضاء الجزئي (A,τ_A)، بحيث تحتوي إحداهما المجموعة المغلقة $\{a\}$، وتحتوي الأخرى على المجموعة المغلقة $\{c\}$، حيث لا يوجد سوى $\{a,b\}\in\tau_A$ و $\{b,c\}\in\tau_A$ بحيث أن

$$\{a\}\subseteq\{a,b\}\text{ ، }\{c\}\subseteq\{b,c\}$$

ولكن $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}\neq\phi$ وعلى ذلك فإن خاصية كون الفضاء فضاءً عادياً ليست خاصية وراثية.

نظرية (5.20)

الفضاء الجزئي المغلق من فضاء عادي يكون فضاءً عادياً.

البرهان

نفرض أن (A,τ_A) فضاء جزئي مغلق من الفضاء العادي (X,τ)، ونفرض أن B_1 , B_2 مجموعتان مغلقتان بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A وغير متقاطعتين .فإنه توجد مجموعتان F_1 , F_2 مغلقتان في X وغير متقاطعتين بحيث يكون

$$B_1=A\cap F_1 \text{ و } B_2=A\cap F_2$$

بما أن المجموعة A مغلقة في X ، فإن المجموعتان B_1 , B_2 مغلقتان بالنسبة للتوبولوجي τ في X وغير متقاطعتين ،وبموجب كون الفضاء (X,τ) عادياً، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G,H\in\tau$ بحيث يكون

$$B_1\subseteq G,\ B_2\subseteq H$$

ومن ثم فإن

$$B_1\subseteq H_1=A\cap G,\ B_2\subseteq H_2=A\cap H$$

من تعريف الفضاء الجزئي يتضح لنا أن $H_1,H_2\in\tau_A$ وأن

$$H_1 \cap H_2 = (A \cap G) \cap (A \cap H) = A \cap (G \cap H) = A \cap \phi = \phi$$

وعلى ذلك فإن (A, τ_A) فضاء عادي.■

نظرية (5.21):

كل فضاء توبولوجي قابل للتمتر هو فضاء عادي.

البرهان.

نفرض أن (X, τ) فضاء قابل للتمتر بالنسبة لدالة المسافة d. نفرض أن $A, B \subseteq X$ مجموعتين مغلقتين بحيث أن $A \cap B = \phi$. لكل نقطة $a \in A$ نختار ε_a بحيث أن $B_d(a, \varepsilon_a) \cap B = \phi$. بالمثل لكل نقطة $b \in B$ نختار ε_b بحيث أن $B_d(b, \varepsilon_b) \cap A = \phi$.

باختيار

$$H = \cup_{b \in B} B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2}) \ , \ G = \cup_{a \in A} B_d(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2})$$

نلاحظ أن كل من G و H مجموعة مفتوحة وأن $A \subseteq G, B \subseteq H$. يتبقى لنا الآن اثبات أن $G \cap H = \phi$. لاثبات ذلك نفرض العكس أي أن $G \cap H \neq \phi$، لذا يوجد عنصر $p \in G \cap H$ وفي هذه الحالة

$$p \in B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2}) \cap B_d(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2})$$

هذا يقتضي أن $p \in B_d(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2})$ و $p \in B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2})$ ومن ثم يكون $d(a, p) < \tfrac{\varepsilon_a}{2}$ و $d(p, b) < \tfrac{\varepsilon_b}{2}$. بتطبيق الخاصية المثلثية نجد أن

$$d(a, b) \leq d(a, p) + d(p, b) < \tfrac{\varepsilon_a}{2} + \tfrac{\varepsilon_b}{2}$$

فإذا كانت $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$، فإن $d(a, b) < \varepsilon_b$ ومن ثم $a \in B_d(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2})$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن $B_d(b, \varepsilon_b) \cap A = \phi$. وبالمثل إذا كانت $\varepsilon_b \leq \varepsilon_a$، فإن

$d(a,b) < \varepsilon_a$ ومن ثم $b \in B_d(b, \frac{\varepsilon_b}{2})$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن $B_d(a,\varepsilon_a) \cap B = \phi$. إذاً $G \cap H = \phi$.■

نظرية (5.22) (تمهيدية يوريسون) Urysohn`s Lemma

بفرض أن (X,τ) فضاءً عادياً وأن A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X ، فإنه توجد دالة متصلة

$$f : X \to [0,1]$$

بحيث يكون $f(B) = 0$ و $f(A) = 1$.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء عادي وأن A,B مجموعتين مغلقتين بحيث أن $A \cap B = \phi$. بما أن $A \cap B = \phi$ فإن $A \subseteq B^c$ و $U_1 = B^c \in \tau$.

باستخدام نظرية (5.18) يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة U_0 بحيث أن $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$. فيكون لدينا $A \subseteq U_0$ و $\overline{U_0} \subseteq U_1$.

باستخدام نظرية (5.18) بالنسبة للمجموعتين $\overline{U_0} \subseteq U_1$ يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة $U_{\frac{1}{2}}$ بحيث أن $\overline{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_1$. فيكون لدينا

$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_1$.

باستخدام نظرية (5.18) بالنسبة للمجموعتين $\overline{U}_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ يمكن إيجاد مجموعة مفتوحة $U_{\frac{1}{3}}$ بحيث أن

$U_0 \subseteq U_{\frac{1}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{3}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$.

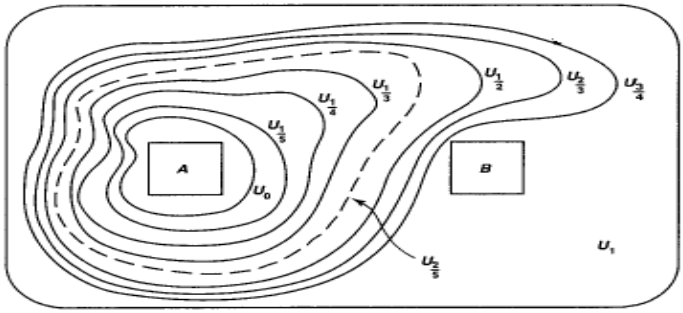
باستخدام نظرية (5.18) بالنسبة للمجموعتين $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_1$ يمكن إيجاد مفتوحة $U_{\frac{2}{3}}$ بحيث أن

$$\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{2}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{2}{3}}} \subseteq U_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$A \subseteq U_0 \subseteq U_{\frac{1}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{3}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{2}{3}} \subseteq \overline{U_{\frac{2}{3}}} \subseteq U_1$$

بتكرار العملية لعدد من المرات نحصل على مجموعات مفتوحة موضحة في الشكل (5.9).



شكل (5.9)

بتكرار هذه العملية ، لكل عدد كسري ثناوي (dyadic rational number) معطى في الصورة $t = \frac{m}{2^n}$ (حيث أن $n = 1,2,3,\ldots$ و $m = 1,2,\ldots,2^n - 1$) يمكن ايجاد مجموعة مفتوحة U_t بحيث أن

$$t_1 < t_2 \Rightarrow A \subseteq U_{t_1} \subseteq U_{\frac{1}{3}} \subseteq \overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2} \subseteq \overline{U_{t_2}} \subseteq U_1$$

الآن نعرف الدالة $f : X \to [0,1]$ كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad if \ \ x \in \forall U_t \\ \sup\{t : x \notin U_t\} \end{cases}$$

يتضح من هذا التعريف أن $f(x)$ تقع في الفترة المغلقة [0,1] وأن

$$f(A)=0 \text{ و } f(B)=1 .$$

لإكمال البرهان يتبقى اثبات أن الدالة $f:X\to[0,1]$ متصلة. كل الفترات التي في الصورة $[0,a)$ أو $(a,1]$، حيث أن $0<a<1$، تشكل أساس جزئي بالنسبة للفضاء [0,1] . لذا يكفي اثبات أن كل من $f^{-1}(a,1]$ و $f^{-1}[0,a)$ مجموعات مفتوحة. من السهل اثبات أن $f(x)<a$ إذا و فقط إذا كانت x تنتمي لبعض U_t لكل $t<a$ و من هذا نجد أن

$$f^{-1}([0,a))=\{x: f(x)<a\}=\cup_{t<a}U_t$$

و التي هي مجموعة مفتوحة. بالمثل $f(x)>a$ إذا و فقط إذا كانت x تقع خارج $\overline{U}_t$ لبعض $t>a$ ومن ثم نجد أن

$$f^{-1}((a,1])=\{x: f(x)>a\}=\cup_{t>a}(\overline{U}_t)^c$$

والتي هي مجموعة مفتوحة.■

نظرية (5.23)

بفرض أن (X,τ) فضاءً عادياً وأن A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X ، فإنه توجد دالة متصلة

$$f:X\to[a,b]$$

بحيث يكون : $f(B)=b$ و $f(A)=a$.

البرهان

إذا كانت $a=b$ ، سنحتاج فقط لتعريف دالة بالصيغة $f(x)=a$ لكل $x\in X$ و هذه الدالة متصلة. سوف نفترض أن $a<b$. بفرض أن

$$g : X \to [0,1]$$

بنفس شروط تمهيدية يوريسون ، فإن الدالة $f = (b-a)g + a$ تحقق الخواص المطلوبة في هذه النظرية.■

في النظرية التالية سوف نبرهن أن عكس تمهيدية يوريسون يكون صحيحاً

نظرية (5.24)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي بحيث أنه لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين A,B في X ، فإنه توجد دالة متصلة

$$f : X \to [0,1]$$

بحيث يكون $f(B)=1$ و $f(A)=0$. فإن الفضاء (X,τ) فضاء عادي.

البرهان

نفرض أن A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X بحيث أن

$f(B)=\{1\}$ و $f(A)=\{0\}$.

المجموعتين :

$$G = \{x \in [0,1] : 0 \le x < \tfrac{1}{2}\}$$

$$H = \{x \in [0,1] : \tfrac{1}{2} < x \le 1\}$$

مفتوحتين في [0,1] غير متقاطعتين . بما أن الدالة $f : X \to [0,1]$ متصلة، فإن $f^{-1}(G), f^{-1}(H) \in \tau$ ومفتوحتين و $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \phi$ و ايضا

$$A \subseteq f^{-1}(G)$$

$$B \subseteq f^{-1}(H)$$

إذاً (X,τ)فضاء عادي.■

يترتب على تمهيدية يوريسون نظرية من النظريات الهامة في التوبولوجي التي تخبرنا عن الظروف التي تسمح بتوسيع دالة حقيقية متصلة معرفة على فضاء جزئي لتكون دالة متصلة ومعرفة على الفضاء الكلي.

نظرية (5.25) (نظرية تيتز Tietze extension theorem)

بفرض أن (X,τ) فضاء عادي ، A مجموعة جزئية مغلقة في X :

(i) لكل دالة متصلة $f: A \to [a,b]$ من A إلى الفترة المغلقة $[a,b]$ من R ،

توجد دالة متصلة و موسعة $g: X \to [a,b]$.

(ii) لكل دالة متصلة $f: A \to R$ ،توجد دالة متصلة و موسعة $g: X \to R$

البرهان

سوف نكتفي ببرهان الفقرة (i). إذا كانت $a = b$فإنه من تطبيق تمهيدية يوريسون تتحقق النظرية. لذلك سنفرض أن $a < b$ و أن $[a,b]$هي أصغر فترة مغلقة بحيث أن $f(A) \subseteq [a,b]$. اسلوب برهان نظرية (5.23) يسمح لنا باختيار الفرض أن $a = -1$ و $b = 1$.سوف نبدأ بتعريف الدالة f_0 لتكون هي الدالة f . أي أن $f_0: A \to [-1,1]$. نعرف المجموعتين الجزئيتين :

$$A_0 = \{x: f_0(x) \le -\tfrac{1}{3}\} \subseteq A$$

$$B_0 = \{x: f_0(x) \ge \tfrac{1}{3}\} \subseteq A$$

المجموعتان A_0, B_0مغلقتان في Aوغير متقاطعتين وغير خاليتين . و هما أيضاً مغلقتان في X لأن Aمغلقة. بتطبيق نظرية (5.23) على المجموعتين المغلقتين A_0, B_0فيمكن إيجاد دالة متصلة $g_0: X \to [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}]$بحيث أن

$g_0(A_0) = -\frac{1}{3}$ ، $g_0(B_0) = \frac{1}{3}$.

من السهل ملاحظة أن $|f_0(a) - g_0(a)| \le \frac{2}{3}$ لكل $a \in A$. فإذا كانت

$$A_1 = \{x : f_1(x) \le -\tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})\} \subseteq A$$

$$B_1 = \{x : f_1(x) \ge \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})\} \subseteq A$$

بتطبيق نظرية (5.23) على المجموعتين المغلقتين A_1, B_1 فيمكن إيجاد دالة متصلة $g_1 : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3}), \frac{1}{3}(\frac{2}{3})]$ بحيث أن $g_1(A_1) = -\frac{2}{9}$ و $g_1(B_1) = \frac{2}{9}$.

بتطبيق نفس الإجراءات نعرف الدالة f_2 على المجموعة المغلقة A بالصيغة

$$f_2 = f_1 - g_1 = f_0 - (g_0 + g_1) : A \to [-\tfrac{4}{9}, \tfrac{4}{9}]$$

و من ثم نلاحظ أن $|f_2(a)| \le (\frac{2}{3})^2$.

بتكرار نفس الإجراءات السابقة، نحصل على متتالية من الدوال المتصلة

$$f_n : A \to [-(\tfrac{2}{3})^n, (\tfrac{2}{3})^n]$$

بحيث أن $|f_n(a)| \le (\frac{2}{3})^n$ لكل $a \in A$. ومن ثم يمكن ايجاد متتالية من الدوال المتصلة

$$g_n : X \to [-(\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n, (\tfrac{1}{3})(\tfrac{2}{3})^n]$$

بحيث أن $|g_n(x)| \le (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^n$ لكل $x \in X$ ، مع الاعتبار بأن

$f_n = f_0 - (g_0 + g_1 + ... + g_{n-1})$.

الآن نعرف

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \text{ لكل } x \in X \ .$$

يمكن للقارئ ملاحظة أن المتسلسلة اللانهائية $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ أنها تقاربية وذلك باستخدام أختبار المقارنة (تأكد من ذلك؟) مع المتسلسلة الهندسية

$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1}$ والتي تتقارب من الواحد الصحيح. لذا نستطيع القول بأن $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ تتقارب بانتظام في X إلى دالة حقيقية محدودة f^* بحيث أن $|f^*(x)|\le 1$. يمكن تلخيص هذا البرهان بملاحظة أنه بما أن $|f_n(x)|\le(\frac{2}{3})^n$ و $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ تتقارب بانتظام في A إلى $f_0=f$ و من ثم فإن $f^*=f$ في A و g توسيع متصل للدالة f على الفضاء الكلي X. ■

ملاحظة:

هذه النظرية قد تكون أحيانا غير صحيحة لو تم التغاضي عن شرط كون المجموعة A مغلقة. هذا الأمر يتضح من المثال التالي:

مثال (5.20)

بفرض أن $X=[0,1]$، $A=(0,1]$ و $f:A\to[0,1]$ دالة على A معرفة بالصيغة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$. واضح أن الفضاء $X=[0,1]$ عادي و أن A ليست مغلقة و من ثم لا يمكن تمديد الدالة f كدالة متصلة على كل X.

تمارين (5.2)

1) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- (X,τ) فضاء منتظم .
- (X,τ) فضاء منتظم و ليس T_1.
- (X,τ) فضاء عادي.
- (X,τ) فضاء عادي و ليس T_1.

2) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$.كون توبولوجي τ على X بحيث يكون:

- $\{a\},\{b\}\in\tau$ و يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء منتظماً .
- $\{a,b\},\{c,d\}\in\tau$ و يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء عاديا.

3) ضع مثال لفضاء يكون منتظم و ليس هاوسدورف.

4) برهن أن كل فضاء متري هو فضاء عادي.

5) بفرض أن τ التوبولوجي المولد على R بالفترات $[a,b)$ حيث أن $a,b\in R$ بين أن (R,τ) فضاء عادي.

6) بين أي فضاء T_1- منته هو فضاء متقطع .

7) برهن أن الفضاء المتري (R^2,d) منتظم، حيث أن

$$d(a,b)=\sqrt{(a_2-b_2)^2+(a_1-b_1)^2}$$

لكل $a=(a_1,a_2),b=(b_1,b_2)$ في R^2 .

8) اثبت أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاءً عادياً إذا و فقط إذا كان لكل $A,B\in\tau$ بحيث $A\cup B=X$ فإنه توجد مجموعتان مغلقتان F_1,F_2 في X بحيث أن $F_1\subseteq A,F_2\subseteq B$ بحيث أن $F_1\cup F_2=X$.

9) ضع مثلاً توضح فيه أن تمهيدية يوريسون قد تكون غير صحيحة لو تغاضينا عن شرط كون المجموعتين $A,B\subseteq X$ مغلقتين؟.

(5.6) الفضاءات المنتظمة تماماً Completely regular spaces

هذا الفضاء كان من الطبيعي أن يكون موضع دراسته بعد الفضاء المنظم ولكن للاستفادة من تمهيدية يورسون تم اراجه في هذا الموضع ليسهل على القارئ تخيل هذا الفضاء .

تعريف (5.9)

يُقال للفضاء التوبولوجى (X,τ) إنه منتظم تماماً إذا كان لكل مجموعة مغلقة $F \subseteq X$ ولكل نقطة $x \in X$ بحيث يكون $x \notin F$ فإنه توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث يكون $f(x)=0$ و $f(F)=1$.

تعريف (5.10)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه فضاء تيكونوف (Tychonoff Space) أو فضاء $-T_{3\frac{1}{2}}$، إذا كان فضاء $-T_1$ و منتظم تماماً.

نظرية (5.26)

الفضاء المنتظم تماماً هو فضاء منتظم.

البرهان

بفرض ان (X,τ) فضاء تام الانتظام ، وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة لا تحتوي النقطة x حيث $x \in X$. بما أن الفضاء (X,τ) منتظم تماماً ، فإنه توجد دالة مستمرة $f : X \to [0,1]$ ، بحيث يكون $f(x)=0$ و $f(F)=1$. ولكن $[0,1] \subseteq R$ و R هو فضاء $-T_2$، أي أن $[0,1]$ هو فضاء $-T_2$. إذاً توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين $G=[0,\frac{1}{2}), H=(\frac{1}{2},1]$. نجد أن $0 \in G$, $1 \in H$. بما أن الدالة $f : X \to [0,1]$ مستمرة ، فإن $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(G)$ مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين وايضا $F \subseteq f^{-1}(H)$, $x \in f^{-1}(G)$ ، و بذلك يكون (X,τ) فضاءً منتظماً.

نظرية (5.27)

كل فضاء منتظم وعادي هو فضاء منتظم تماماً.

البرهان

بفرض ان (X,τ) فضاءً منتظماً و عادياً ، وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة لا تحوي النقطة x حيث $x \in X$. بما أن الفضاء (X,τ) منتظم ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث يكون

$$x \in G \ , \ F \subseteq H \ , G \cap H = \phi$$

نعتبر $E = H^c$ مجموعة مغلقة تحقق $F \cap E = \phi$. بموجب كون الفضاء (X,τ) فضاءً عادياً ، فإنه توجد دالة مستمرة $f : X \to [0,1]$ ، بحيث يكون $f(F) = 1$, $f(E) = 0$.أي أن $f(F) = 1$, $f(x) = 0$

$x \in f^{-1}(G)$, $F \subseteq f^{-1}(H)$ ، و بذلك يكون (X,τ) تام الانتظام. ■

مثال (5.21) (مستوي نيمتزكي Niemytzki plane) منتظم تماماً.

الحل

نعتبر الفضاء (X,τ^*) كما ورد في مثال (5.18) .

لإثبات أن الفضاء (X,τ^*) هو فضاء منتظم تماماً، نختار المجموعة المغلقة A والنقطة $b = (b_1,b_2) \notin A$. إذا كانت $b \in X_u$ ، فإنه يوجد جوار G للنقطة b بحيث أن $G \subseteq X - A$. الجوار G مفتوح بالنسبة لكل من التوبولوجي الاقليدي و التوبولوجي τ^* لذا فإن $(X - G)$ مغلقة بالنسبة للتوبولوجي الاقليدي و بما أن التوبولوجي الاقليدي منتظم تماماً، فإنه توجد دالة منصلة $f : X_u \to [0,1]$ بحيث

أن $f(X-G)=1$ و $f(b)=0$ وهذه الدالة متصلة أيضا بالنسبة للتوبولوجي τ^* وتحقق نفس الشروط السابقة.

في حالة أن $b\in T$. أي أن $b=(b_1,0)$فإنه يوجد قرص مفتوح Dيمس الخط T عند النقطة b بحيث أن $D\cap A=\phi$. دعنا نفترض أن نصف قطر هذا القرص $\varepsilon>0$. نعرف الدالة $f:X\to[0,1]$ تحت الشروط:

$f(x)=1$ إذا كانت $x\notin D\cup\{b\}$ و $f(b)=0$ وعند النقطة $(x,y)\in D$نعرف الدالة بالصيغة $f(x,y)=\frac{((x-b_1)^2+y^2)}{2\varepsilon y}$. الدالة f متصلة لأن $f^{-1}([0,\alpha))$ هي المجموعة المفتوحة $\{b\}\cup D_\alpha$حيث أن D_α هو القرص المفتوح الذي نصف قطره $\varepsilon\alpha$و يمس Tعند النقطة b وذلك لأن

$f^{-1}([0,\alpha))=\{(x,y):(x-b_1)^2+(y-\varepsilon\alpha)^2\le\varepsilon^2\alpha^2\}$. وأيضاً $f^{-1}((\alpha,1])$ هي المجموعة المفتوحة $X-\overline{D_\alpha}$. إذاً الدالة $f:X\to[0,1]$ متصلة و تحقق أن $f(A)=1$ و $f(b)=0$ ما يعني أن (X,τ^*) هو فضاء منتظم تماماً.

نظرية (5.28)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي منتظم تماماً هي خاصية وراثية.

البرهان

(يترك للطالب كتمرين)

نتيجة (5.8)

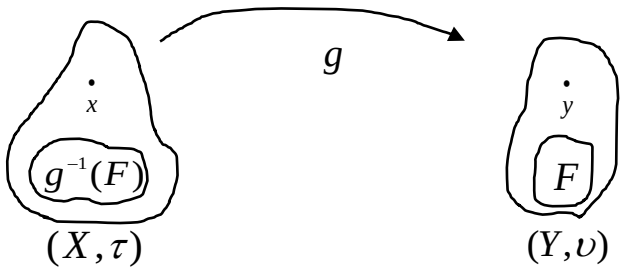
خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ هي خاصية وراثية.

نظرية (5.29)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي منتظم تماماً هي خاصية توبولوجية.

البرهان

نفرض أن $g : X \to Y$ دالة توبولوجية من الفضاء تام الانتظام (X,τ) الى الفضاء التوبولوجي (Y,υ)، و المطلوب اثبات أن (Y,υ) هو فضاء منتظم تماماً .



شكل (5.10)

لاثبات ذلك نفرض أن $F \subseteq Y$ مجموعة مغلقة وأن $y \notin F$ حيث أن $y \in Y$ إذاً $g^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X و لا تحوي $x = g^{-1}(y)$.

بما أن الفضاء (X,τ) منتظم تماماً ، فإنه توجد دالة متصلة $h : X \to [0,1]$، بحيث يكون $h(x) = h(g^{-1}(y)) = 0$ و $h(g^{-1}(F)) = 1$. بما أن الدالة

$$g : X \to Y$$

دالة توبولوجية ، فإن $g^{-1} : Y \to X$ دالة متصلة و من ثم فإن دالة التحصيل $f = h \circ g^{-1} : Y \to [0,1]$ متصلة و تحقق الآتي:

$$f(y) = h \circ g^{-1}(y) = h(g^{-1}(y)) = 0$$

$$f(F) = h \circ g^{-1}(F) = h(g^{-1}(F)) = 1$$

إذاً (Y,υ) فضاء منتظم تماماً.

نتيجة (5.9)

خاصية أن يكون الفضاء التوبولوجي فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ هي خاصية توبولوجية

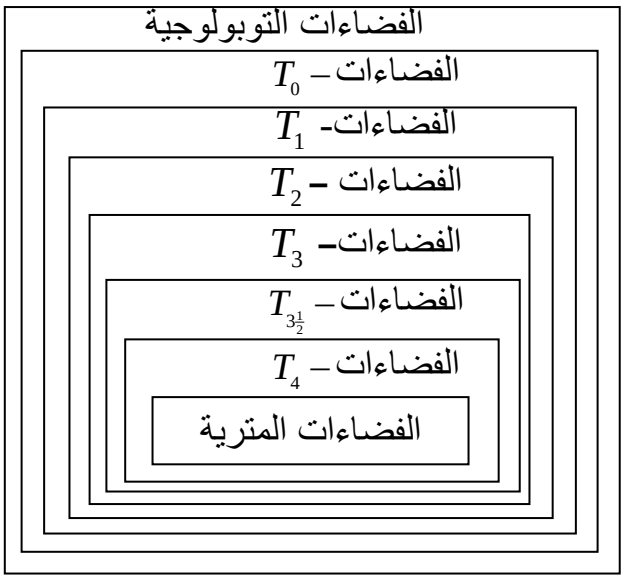
نظرية (5.29)

في الفضاء – $T_{3\frac{1}{2}-}$،إذا كان $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$ ، فإنه توجد دائماً دالة حقيقية $f : X \to R$ بحيث يكون $f(x) \neq f(y)$

البرهان

بموجب أن الفضاء (X, τ) هو فضاء $T_{3\frac{1}{2}-}$، إذاً هو فضاء $T_1 -$، و عليه فإن $\{y\}$مجموعة مغلقة لا تحوي النقطة x (أي أن $x \notin \{y\}$) و بموجب كون الفضاء (X, τ) منتظم تماماً ، فإنه توجد دالة مستمرة $f : X \to [0,1] \subseteq R$ بحيث يكون $f(x) = 0$, $f(y) = f(\{y\}) = 1$ وعليه فإن $f(x) \neq f(y)$. ■

نختم هذا الفصل بتوضيح العلاقة بين كل الفضاءات T_1 ,T_2 , T_3, T_4 يمكن ملاحظتها من خلال المخطط التالي :



تمـاريـن (5.3)

1- لـتكن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b,c\}\}$ توبولـوجي معرفـة علـى المجموعـة $X\{a,b,c\}$. فهل الفضاء (X,τ) منتظم أم عادي؟.

2- أعط مثالاً لفضاء منتظم و ليس عادياً. (فكرة الحل: عرف توبولوجي τ على مجموعة غير خالية X بحيث يكون عادياً و منتظماً معا، ثم اختر مجموعة جزئية $A \in \tau$ و عرف عليها توبولوجي نسبي τ_A ، فحينها يكون الفضاء الجزئي (A,τ_A) فضاءً منتظماً و ليس عاديا).

3- أعط مثالاً يوضح أنه ليس كل فضاء T_3 يكون فضاء T_4 .

4- برهن أن الفضاء الجزئى المغلق من الفضاء العادي يكون عادياً.

5- أعـط مثـالاً يوضـح أنـه لـيس مـن الضـروري أن تكـون الصـورة المتصـلة للفضاء T_2 هي فضاء T_2 .

6- برهن أن خاصية كون الفضاء تام الانتظام هي خاصية وراثية.

(5.7) مسلمات العد The Countability Axioms

تعريف (5.11)

إذا كـان (X,τ) فضـاء توبولـوجي فـأن عائلـة المجموعـات المفتوحـة β_x التـي تحوي النقطة x تسمى اساس موضعي عند x إذا كان لكل مجموعة مفتوحـة G تحوي x يوجد عنصر B_x في β_x بحيث يكون $x \in B_x \subseteq G$.

مثال (5.22)

نفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة

$X=\{a,b,c,d\}$ ، فإن

$\beta_a=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

$\beta_b=\{\{a,b\}\}$

$\beta_c=\{\{a,b,c\}\}$

تعريف (5.12)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه يحقق مسلمة العد الأولى إذا كان لكل نقطة x في X يوجد اساس موضعي قابل للعد.

مثال (5.23)

الفضاء التوبولوجي القوي $(X,P(X))$ يحقق مسلمة العد الأولى و ذلك لأنه لكل نقطة x في X فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة و تنتمي لأي اساس على التوبولوجي $P(X)$ وبهذا فإن أي جوار للنقطة x يحوي الجوار $\{x\}$.

مثال (5.24)

الفضاء المعتاد على R يحقق مسلمة العد الأولى و ذلك لأن عائلة الفترات المفتوحة $\beta_x^n=\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}):n\in N\}$ تمثل اساس موضعي قابل للعد لكل نقطة x في R.

ملاحظة:

كل فضاء توبولوجي قابل للتمتر يحقق مسلمة العد الأولى لأن عائلة الكرات $(B_d(x,\frac{1}{n}))_{n\in N}$ التي مركزها x تمثل أساس قابل للعد عند النقطة x. لذا سوف نقدم النظريات التالية بدون برهان لتطابق براهينها مع براهين نظريات ذكرت في الفصل الثالث.

نظرية (5.30)

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الأولى، فإن النقطة x تنتمي إلى الانغلاق $\overline{A}$ للمجموعة $A\subseteq X$ إذا و فقط إذا وجدت متتالية من نقاط المجموعة A تتقارب إلى النقطة x.

البرهان

أنظر برهان نظرية (3.22).■

نظرية (5.31)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً يحقق مسلمة العد الأولى، فإن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لكل متتالية تقاربية $x_n\in X$ و تتقارب من النقطة x فإن المتتالية $f(x_n)$ تتقارب من النقطة $f(x)$.

البرهان

أنظر برهان نظرية (4.8).■

نظرية (5.32)

كل فضاء جزئي من فضاء توبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الأولى، فإنه يحقق مسلمة العد الأولى.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الأولى و نفرض أن (A,τ_A) فضاء جزئي منه. لتكن $a\in A$، عندئذ تكون $a\in X$ و حيث أن (X,τ) يحقق مسلمة العد الأولى فإنه توجد عند a قاعدة محلية قابلة للعد

$\beta_a = \{B_n\}_{n\in N}$ و عندئذ تكون $\beta_a^* = \{B_n \cap A : n \in N\}$ اساس موضعي قابل للعد بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A عند النقطة a. أي أن (A,τ_A) يحقق مسلمة العد الأولى.■

تعريف (5.13)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه يحقق مسلمة العد الثانية إذا كان للتوبولوجي τ أساس قابل للعد.

مثال (5.25)

الفضاء الاقليدي (R,u) يحقق مسلمة العد الثانية، حيث أن عائلة الفترات:

$$\beta = \{(a,b) : a,b \in Q\}$$

تشكل أساس قابل للعد للتوبولوجي المعتاد u .

يتضح أن كل فضاء يحقق مسلمة العد الثانية فهو يحقق مسلمة العد الأولى ولكن العكس ليس صحيح دائماً كما يتضح من المثال التالي:

مثال (5.26)

الفضاء المتقطع $(X,P(X))$ على مجموعة غير قابلة للعد لا يحقق مسلمة العد الثانية، لكنه يحقق مسلمة العد الأولى لأن المجموعات أحادية العنصر تشكل أساساً عند نقاط X . طالما أن X غير قابلة للعد فإن العائلة $\{p\}$ لكل $p \in X$ غير قابلة للعد وعليه فإن الفضاء $(X,P(X))$ لا يحقق مسلمة العد الثانية بينما يحقق مسلمة العد الأولى.

نظرية (5.33)

كل فضاء جزئي من فضاء توبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية، فإنه يحقق مسلمة العد الثانية.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية و نفرض أن (A,τ_A) فضاء جزئي منه. نفرض أن $\beta=\{B_n : n\in N\}$ أساس قابل للعد للتوبولوجي τ. العائلة $\beta_A=\{A\cap B_n : n\in N\}$ هي أساس قابل للعد للتوبولوجي τ_A و عليه فإن (A,τ_A) يحقق مسلمة العد الثانية .■

تعريف (5.14)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه قابل للانفصال (separable) إذا وجدت مجموعة كثيفة في X و قابلة للعد.

مثال (5.27)

كل فضاء توبولوجي متقطع قابل للعد يكون قابل للانفصال بينما الفضاء المتقطع والغير القابل للعد يكون غير قابل للانفصال.

نظرية (5.34)

كل فضاء يحقق مسلمة العد الثانية هو قابل للانفصال.

البرهان

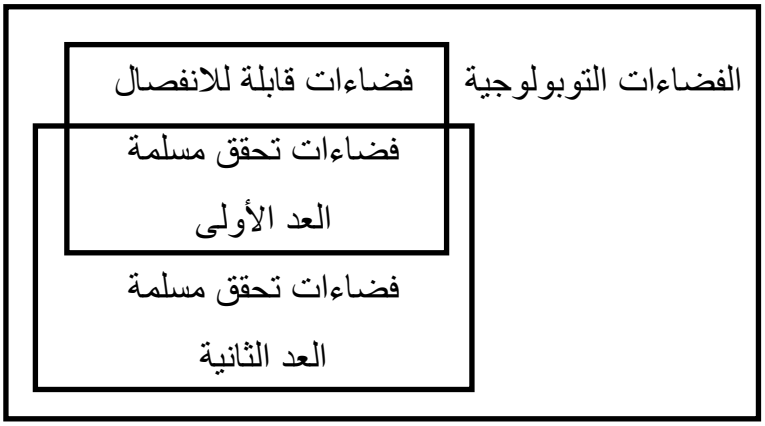
نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية أي أن له أساس قابل للعد و ليكن $\beta=\{B_n : n\in N\}$ ، لكل $n\in N$ نختار $a_n\in B_n$ و نكون المجموعة A على النحو التالي:

$$A=\{a_n : n\in N\}$$

واضح أن A مجموعة قابلة للعد ، و من ناحية أخرى نجد أن أي نقطة $p\in A^c$ هي نقطة نهاية للمجموعة A ، حيث أن أي مجموعة مفتوحة $G\in\tau$ تحوي

النقطة p سوف تحتوي على نقطة من A غير النقطة p لأن $p \notin A$ ، حيث يوجد عنصر من الأساس و ليكن B_{n_0} بحيث يكون $p \in B_{n_0} \subseteq G$ و لكن $a_{n_0} \in A \cap B_{n_0}$ بموجب تكوين A ، عندئذ يكون $\overline{A} = A \cup A' = X$ ، إذاً A مجموعة كثيفة في X و قابلة للعد و من ثم يكون الفضاء (X, τ) قابل للانفصال.■

مما سبق نستطيع رسم الشكل التوضيحي التالي:



تمارين (5.4)

(1) بين أن كل فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية يحقق مسلمة العد الأولى والعكس ليس صحيحاً دائماً؟

(2)برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الأولى هي خاصية وراثية.

(3) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الأولى هي خاصية توبولوجية.

(4) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الثانية هي خاصية وراثية.

(5) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الثانية هي خاصية توبولوجية.

(6) اعط مثال لفضاء قابل للانفصال يحقق مسلمة العد الأولى ولا يحقق مسلمة العد الثانية ؟

(7) برهن أن قابلية الانفصال هي خاصية توبولوجية.؟

(8) برهن نظرية (5.30)؟

(9) برهن نظرية (5.31)؟.

(10) برهن أن أي فضاء يحقق مسلمة العد الثانية يكون قابل للانفصال؟

(11) اعط مثال لفضاء قابل للانفصال يحقق مسلمة العد الأولى و لا يحقق مسلمة العد الثانية؟

(12) بين أن فضاء المكملات المنتهية على مجموعة الأعداد الحقيقية لا يحقق مسلمة العد الأولى.