الفصل السابع

الترابط
Connectedness

مقدمة

لقد تعاملنا إبان دراستنا لحساب التفاضل و التكامل و مبادئ التحليل مع نظرية مهمة من النظريات المتعلقة بالدوال المتصلة ألا و هي نظرية القيمة البينية أو القيمة الوسيطة (Intermediate value theorem) والتي كانت تنص على أنه إذا كانت $f:[a,b]\to R$ دالة متصلة وكان r عدد حقيقي يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد عنصر $c\in[a,b]$ بحيث أن $f(c)=r$. هذه النظرية تعتمد على خاصية من خواص الفترة $[a,b]$ تسمى خاصية الترابط والتي من خلالها ينظر للفترة $[a,b]$ على إنها كما لو كانت قطعة واحدة غير قابلة للتجزئة لفترتين مفتوحتين غير متقاطعتين.

الفضاء التوبولوجي المترابط يمكن تخيله كما لو كان شكلاً هندسياً مكون من قطعة واحدة فقط ولا يمكن تخيله مكوناً من مجموعات مفتوحة غير خالية وغير متقاطعة.

هذا الفصل مخصص لدراسة مفهوم الترابط وخواصه على الفضاءات التوبولوجية . سوف نبدأ أولاً بدراسة مفهوم المجموعات الغير متلاصقة (separated sets) ثم المجموعات المترابطة وبعد ذلك ننتقل لتعريف ودراسة

الفضاء التوبولوجي المترابط وخواصه و كذلك مفاهيم أخرى من ترابط الفضاءات التوبولوجية مثل الترابط الموضعي و الترابط المساري.

(7.1) المجموعات الغير متلاصقة Separated sets

قبل أن نتعرض لتعريف ما هو المقصود بالمجموعة المترابطة وغير المترابطة ، دعنا نتخيل المجموعة $A \neq \phi$ كما لو كانت خريطة لأحدى الدول المحاطة بمياه البحر من جميع جوانبها. فكيف نفرق بين حال كون هذه الدولة مكونة من جزيرة واحدة أو أنها عبارة عن اتحاد جزيرتين أو أكثر ؟ سننظر لخريطة الدولة المكونة من جزيرة واحدة كمجموعة مترابطة ، أما الحالة الثانية فتمثل مجموعة غير مترابطة.

سنبدأ أولاً بتعريف المجموعات الغير متلاصقة ، كما في التعريف التالي:

تعريف (7.1)

المجموعتان A , B في الفضاء المترى (X,τ) يقال أنهما مجموعتين غير متلاصقتين إذا تحقق الشرطين :

$$\overline{A} \cap B = \phi \ , \ A \cap \overline{B} = \phi$$

ويقال أنهما متلاصقتان إذا كان

$$A \cap \overline{B} \neq \phi \ \text{ أو } \ \overline{A} \cap B \neq \phi$$

مثال (7.1)

1) في الفضاء العادي (R,u):

- إذا كانت $A_1 = (0,1), \ B_1 = (1,2), C_1 = [2,3)$ فإن المجموعتان A_1, B_1 غير متلاصقتين لأن

$A_1 \cap \overline{B_1} = (0,1) \cap [1,2] = \phi$ و $\overline{A_1} \cap B_1 = [0,1] \cap (1,2) = \phi$.

ولكن B_1, C_1 متلاصقتين لأن $\overline{B_1} \cap C_1 = [1,2] \cap [2,3) = \{2\} \neq \phi$.

- إذا كانت $A_2 = (0,\infty),\ B_2 = (-\infty,0), C_2 = (-\infty,0]$ فإن المجموعتان A_2, B_2 غير متلاصقتين ، بينما B_2, C_2 متلاصقتين.

2) في الفضاء R^2 ،إذا كانت

$$A_3 = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$
$$B_3 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$$
$$C_3 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

فإن المجموعتان A_3, B_3 غير متلاصقتين ، بينما B_3, C_3 متلاصقتين.

نظرية (7.1)

فى الفضاء التوبولوجي (X,τ)،أي مجموعتين غير متقاطعتين $A, B \in \tau$ تكونان غير متلاصقتين .

البرهان

بفرض أن $A, B \subseteq X$ بحيث أن $A \cap B = \phi$.بما أن المجموعتين A^c, B^c مغلقتان، فإن:

$$(i)\ B \subseteq A^c \Rightarrow B \subseteq \overline{B} \subseteq A^c \Leftrightarrow \overline{B} \cap A = \phi$$
$$(i)\ A \subseteq B^c \Rightarrow A \subseteq \overline{A} \subseteq B^c \Leftrightarrow \overline{A} \cap B = \phi$$

أي أن A, B غير متلاصقتين .■

نظرية (7.2)

إذا كانت A, B مجموعتين غير متلاصقتين فى الفضاء التوبولوجي (X,τ) وكانت $C \subseteq A, D \subseteq B$ فإن C, D مجموعتان غير متلاصقتين أيضا.

البرهان

بما أن المجموعتين A,B غير متلاصقتين فإن :

$(i)\ A\cap \overline{B}=\phi$

$(ii)\ \overline{A}\cap B=\phi$

وبما أن $C\subseteq A\ ,\ D\subseteq B$ ،فإن

$$C\cap \overline{D}\subseteq A\cap \overline{B}=\phi$$

وأيضا فإن :

$$\overline{C}\cap D\subseteq \overline{A}\cap B=\phi$$

وهذا هو إثبات عدم تلاصق المجموعتين C,D .■

نظرية (7.3)

المجموعتان المغلقتان F_1,F_2 في الفضاء التوبولوجي (X,τ) تكونان غير متلاصقتين إذا وفقط إذا كان $F_1\cap F_2=\phi$

البرهان

نفرض أن F_1,F_2 مجموعتان غير متلاصقتين ومغلقتان فإن :

$$\overline{F_1}\cap F_2=F_1\cap \overline{F_2}=F_1\cap F_2=\phi\ .\blacksquare$$

نتيجة (7.1)

إذا كان (X,τ) فضاء T_1 فإن أي مجموعتين منتهيتين و غير خاليتين وغير متقاطعتين في X يكونان غير متلاصقتين .

البرهان

بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتين منتهيتين حيث أن

$$A\cap B=\phi\ ,A\neq\phi\ ,B\neq\phi$$

بما أن كل مجموعة منتهية في فضاء – T_1 هي مجموعة مغلقة وذلك لكونها اتحاد مجموعات منتهية وحيدة العنصر فإن المجموعتين A,B مغلقتان وعليه يكون $\overline{A}\cap B = A\cap\overline{B} = A\cap B = \phi$. ■

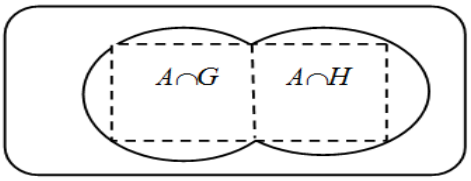
تعريف (7.2)

في أي فضاء توبولوجي (X,τ). يقال للمجموعتين $G,H\in\tau$ انهما مجموعتي انفصال للمجموعة الجزئية $A\subseteq X$ إذا تحقق الآتي:

$(i)\ A\cap G\neq\phi\ ,\ A\cap H\neq\phi$.

$(ii)\ (A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$.

$(iii)\ (A\cap G)\cup(A\cap H)=A.$



شكل (7.1)

مثال (7.2)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ وأن التوبولوجي المعرف على هذه المجموعة هو $\tau=\{X,\phi,\{c\},\{a,b,c\},\{c,d,e\}\}$. المجموعتين :

$$H=\{c,d,e\}\in\tau \quad G=\{a,b,c\}\in\tau$$

هما مجموعتي انفصال للمجموعة $A=\{a,d,e\}$ لأن:

(1) $A\cap G=\{a\}\neq\phi\ ,\ A\cap H=\{d,e\}\neq\phi$

(2) $(A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$

(3) $(A\cap G)\cup(A\cap H)=A.$

تعريف (7.3)

يُقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاءً مترابطاً إذا كان من غير الممكن التعبير عن X كإتحاد لمجموعتين غير خاليتين ومفتوحتين وغير متلاصقتين. خلاف ذلك يقال أن الفضاء غير مترابط (disconnected).

من هذا التعريف يمكن القول بأن الفضاء مترابط إذا لم توجد مجموعتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون

$$X=G\cup H,\ \overline{G}\cap H=\phi,\ G\cap\overline{H}=\phi,\ G\neq\phi,\ H\neq\phi$$

ملاحظات (7.1)

حيث أن $G,H\in\tau$ و $G\neq\phi,\ H\neq\phi$ فإن الشرط :

$G\cap H=\phi$ يكافئ أن $\overline{G}\cap H=\phi,\ G\cap\overline{H}=\phi$

وذلك لأن $G\subseteq\overline{G},\ H\subseteq\overline{H}$. لذا يمكن القول بأن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون مترابطاً إذا تحقق أحد الشرطين:

(i) إذا لم توجد فيه مجموعتان غير خاليتين $G,H\in\tau$ بحيث أن

$X=G\cup H,\ G\cap H=\phi$.

(ii) إذا كانت $A,A^c\in\tau$ ، فإن $A=\phi$ أو $A=X$. أي أن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد في (X,τ).

ملاحظات (7.2)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون غير مترابط إذا وجدت فيه مجموعة جزئية غير خالية $A\neq X$ بحيث تكون A مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت لأنه إذا كانت $A\subseteq X$ مجموعة جزئية فعلية مفتوحة و مغلقة فإن $A^c=X-A$ تكون مجموعة مغلقة و مفتوحة و حيث أن $A\cap A^c=\phi$ و $A\cup A^c=X$. و من ذلك نستنتج أن

الفضاء (X,τ) فضاء غير مترابط.

مثال (7.3)

الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D) ، حيث أن X تحتوي على عنصرين على الأقل ، هو فضاء غير مترابط وذلك لأن أي مجموعة جزئية فعلية فيه تكون مفتوحة ومغلقة.

مثال (7.4)

الفضاء التوبولوجي الغيرمتقطع (X,I) هو فضاء مترابط وذلك لأن المجموعتين المفتوحتين و المغلقتين معاً هما فقط X,ϕ .

مثال (7.5)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. الفضاء التوبولوجي (X,τ) مترابط وذلك لأن المجموعتين المفتوحتين و المغلقتين معاً هما فقط X,ϕ .

مثال (7.6)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. الفضاء التوبولوجي (X,τ) غير مترابط لأنه توجد في X المجموعتين $\{a\},\{b,c,d,e\}$كل منهما مفتوحة و مغلقة و ان $\{a\}\cup\{b,c,d,e\}=X$.

تعريف (7.4)

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي و $A\subseteq X$. يقال أن المجموعة A غير مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) غير مترابط. أما إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) مترابط فإن المجموعة A تسمى مترابطة.

مثال (7.7)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $A=\{b,d,e\}$ و $B=\{a,b\}$. فإن المجموعة A مترابطة وذلك لأنه لا توجد مجموعتان منفصلتان و مفتوحتان و غير خاليتين في الفضاء الجزئي (A,τ_A) حيث أن $\tau_A=\{A,\phi,\{b\}\}$. بينما المجموعة $B=\{a,b\}$ غير مترابطة لأنه توجد المجموعتان المنفصلتان و غير الخاليتان $\{a\},\{b\}$في الفضاء الجزئي (B,τ_B)، حيث أن $\tau_B=\{B,\phi,\{a\},\{b\}\}$.

مثال (7.8)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. المجموعة $A=\{b,d,e\}$ مترابطة وذلك أنه في التوبولوجي الجزئي $\tau_A=\{A,\phi,\{d\}\}$ لا توجد مجموعات مفتوحة ومغلقة في آن واحد غير المجموعتين A,ϕ .

نظرية (7.4)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً. العبارات التالية متكافئة:

(i) الفضاء (X,τ) مترابط.

(ii) لا يمكن التعبير عن X كإتحاد مجموعتين غير خاليتين مغلقتين و غير متقاطعتين.

(iii) إذا كانت $A,A^c\in\tau$ ، فإن $A=\phi$ أو $A=X$.

(**iv**) لأي مجموعة جزئية فعلية $A\neq X$ من X يكون $b(A)\neq\phi$.

البرهان.

$(i) \Leftarrow (ii)$:

نفرض العكس، أي توجد مجموعتين مغلقتين A,B في X بحيث أن

$$X = A \cup B, A \cap B = \phi, A \neq \phi, B \neq \phi$$

و بالتالي فإن A^c, B^c مجموعتين مفتوحتين حيث أن

$$X = A^c \cup B^c \, , \, A^c \cap B^c = \phi$$

وهذا يتعارض مع الفرض بأن الفضاء (X,τ) مترابط.

$(ii) \Leftarrow (iii)$:

نفرض العكس، أي توجد مجموعة جزئية A من X مفتوحة و مغلقة في آن واحد بحيث أن $A \neq \phi, A \neq X$ فإن هذا يقتضي أن $A^c \neq X \, , \, A^c \neq \phi$ و حيث أن $X = A \cup A^c \, , \, A \cap A^c = \phi$ وعليه تكون المجموعتين A, A^c مغلقتين وغير متقاطعتين و اتحادهما يساوي X و هذا يتعارض مع الفرض (ii) و من ثم فإن X, ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المغلقتان و المفتوحتان في آن واحد في X.

$(iii) \Leftarrow (iv)$:

نفرض أن A مجموعة جزئية فعلية من X و غير خالية بحيث أن $b(A) = \phi$ ولكن

$$\overline{A} = A^o \cup b(A) \Rightarrow \overline{A} = A^o$$

و هذا يعني أن $A = \overline{A}, A = A^o$ أي أن A مجموعة مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت و هذا يتعارض مع الفرض (iii).

$(iv) \Leftarrow (i)$:

نفرض أن الفضاء (X,τ) غير مترابط ، لذا يمكن ايجاد مجموعة جزئية فعلية

A في X بحيث تكون مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت أي أن

$A=\overline{A}, A^c=\overline{A^c}$. لذا فإن $b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}=A\cap A^c=\phi$ وهذا يتعارض مع الفرض (iv).■

تمهيدية (7.1)

الفترة المغلقة $[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$ في الفضاء التوبولوجي العادي (R,u) تكون مترابطة.

البرهان

نفرض أن الفترة المغلقة $[a,b]$ ليست مترابطة لذا توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث يكون

$$[a,b]=G\cup H, G\cap\overline{H}=\phi,\ \overline{G}\cap H=\phi$$

نفرض أن $a\in G, b\in H$ و أن $a<b$. نظراً لكون المجموعة $G\cap[a,b]$ غير خالية محدودة من أعلى بالعنصر b فيمكن فرض أن

$$c=\sup(G\cap[a,b])$$

وعليه فإن $c\in G$ أو $c\in H$. فإذا كانت $c\in G$ و $G\neq\phi$ مجموعة مفتوحة فإنه يوجد $r>0$ بحيث أن $(c-r,c+r)\subseteq G$. و هذا يعني أن $c+r\in G$و $c+r<b$ و هذا يتعارض مع تعريف العنصر c لأن $c=\sup(G\cap[a,b])$.

أما في حالة $c\in H$ و $H\neq\phi$ مجموعة مفتوحة فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subseteq H$و هذا يعني أن $c+\varepsilon\in H$ و يناقض الفرض بأن $c=\sup(G\cap[a,b])$ و من ثم فإن $[a,b]$ مجموعة مترابطة.■

نظرية (7.5)

أي مجموعة $A \subseteq R$ تحوي أكثر من عنصر تكون مترابطة إذا وفقط إذا كانت فترة.

البرهان

أولاً سنبرهن إنه إذا كانت $A \subseteq R$ مجموعة مترابطة تحوي أكثر من عنصر فإنها تكون فترة.

نفرض العكس، أي أن A ليست فترة و هذا يعني أنه يوجد $a,b \in A$ و كذلك عدد $c \in R$ بحيث أن $a < c < b$ و لكن $c \notin A$ و من ثم يمكن التعبير عن المجموعة A في الصورة $A = G \cup H$ حيث أن

$$H = A \cap (c,\infty),\ G = (-\infty,c) \cap A .$$

بما أن $a \in G,\ b \in H$ فإن المجموعتين $G \neq \phi, H \neq \phi$ وكل منهما مجموعة مفتوحة في A وكذلك $G \cap H = \phi$ وهذا يعني أن A مجموعة غير مترابطة وهذا تعارض.

ثانياً: سنكمل البرهان بتوضيح أنه إذا كانت A فترة ، فإنه من الضروري أن تكون مترابطة. خطتنا في الاثبات هي الافتراض بأن المجموعة A ليست مترابطة بهدف الوصول لتعارض مع الفرض بأنها فترة. نفرض أن G, H هما مجموعتي انفصال المجموعة الغير مترابطة A. بما أن كل من G و H مجموعة غير خالية وأن $G \cap H = \phi$، فإنه يمكن اختيار نقطة $a \in G$ و $b \in H$ بحيث أن $a \neq b$. نفترض أن $a < b$. بما أن A فترة ، فإن $[a,b] \subseteq A$ و كل نقطة في $[a,b]$ تقع في G أو في H. نفرض أن $c = \sup([a,b] \cap G)$. فإنه يتضح أن $a \leq c \leq b$ ومن ثم نجد أن $c \in A$. بما أن G مجموعة مغلقة في A فإن تعريف العنصر c يبين أن $c \in G$. من هذا نستخلص أن $c < b$. و ايضاً من تعريف

العنصر c نجد أنه، لكل $\varepsilon > 0$ ، فإن العنصر $c+\varepsilon$ ينتمي للمجموعة H بحيث أن $c+\varepsilon \le b$ و بما أن H مغلقة في A ، فإن $c \in H$. الآن لدينا $c \in G$ و $c \in H$ و هذا يتعارض مع الفرض بأن $G \cap H = \phi$. ■

نظرية (7.6)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن G,H مجموعتي انفصال للفضاء X. إذا كانت A مجموعة جزئية مترابطة في X. فإن A تقع بالكامل داخل المجموعة G او داخل المجموعة H.

البرهان

بما أن كل من G و H مجموعتي انفصال للمجموعة X فإن $G \cap H = \phi, G \cup H = X$ حيث أن $G,H \in \tau$ و من ثم يكون $(A \cap H), (A \cap G) \in \tau_A$ و أيضا نجد أن

$$(i)\ (A \cap H) \cap (A \cap G) = A \cap (G \cap H) = A \cap \phi = \phi$$

$$(ii)\ (A \cap H) \cup (A \cap G) = A \cap (G \cup H) = A \cap X = A$$

وهذا يعني أن $(A \cap H), (A \cap G)$ هما مجموعتي انفصال للمجموعة A و هذا يتعارض مع الفرض بأن A مترابطة. لذا فإن واحدة من المجموعتين يجب أن تكون خالية. فإذا كانت $(A \cap H) = \phi$ فإن $A \subseteq H^c \subseteq G$ أي أن A تقع بالكامل داخل المجموعة G او داخل المجموعة H. ■

نتيجة (7.2)

إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ) فإنه لأي مجموعة جزئية B من X بحيث أن $B, B^c \in \tau$. فإن $A \subseteq B$ أو $A \subseteq B^c$.

البرهان

بما أن $B, B^c \in \tau$ فإن $X = B \cup B^c$ و من ثم تقع A بالكامل في B أو في B^c. ■

نتيجة (7.3)

إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ) و المجموعة B أي مجموعة جزئية من X بحيث أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فإن المجموعة B تكون أيضاً مترابطة.

البرهان:

نفرض أن A مجموعة مترابطة و أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. نفترض أن B غير مترابطة وأن المجموعتين $G, H \in \tau$ هما مجموعتا انفصال لها. أي أن

$$(B \cap G) \cap (B \cap H) = \phi,\ B \cap H \neq \phi, B \cap G \neq \phi, B \subseteq G \cup H.$$

بناءاً على النظرية السابقة فيجب أن تقع A بالكامل داخل المجموعة $(B \cap G)$ أو داخل المجموعة $(B \cap H)$. نفترض أن $A \subset B \cap H$ فإن هذا يؤدي أن $\overline{A} \subset \overline{H}$ وحيث أن $G \cap \overline{H} = \phi$ فإن $\overline{A} \cap G = \phi$ وحيث أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فإن $B \cap G = \phi$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن $B \cap G \neq \phi$. إذاً B مترابطة.■

مما سبق ، فإذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ) فإن $\overline{A}$ تكون أيضاً مترابطة.

تمرين محلول

إذا كانت A مجموعة مترابطة في فضاء توبولوجي (X,τ).

(i) هل A^o مترابطة؟.

(ii) هل $b(A)$ مترابطة؟.

الحل

(i) إذا كانت A مجموعة مترابطة في X ، فليس من الضروري أن تكون A^o مترابطة كما يتضح من المثال التالي:

نفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,d\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. بفرض أن $A=\{a,b,c\}$ مجموعة جزئية من X . واضح أن A مترابطة ، حيث لا يمكن التعبير عنها كإتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين ، بينما $A^o=\{a,b\}$ هي مجموعة غير مترابطة حيث توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتين هما $\{a\},\{b\}$ و يحققان $A^o=\{a\}\cup\{b\}$.

(ii) إذا كانت A مجموعة مترابطة في X ، فليس من الضروري أن تكون $b(A)$ مترابطة كما يتضح من المثال التالي:

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. بفرض أن $A=\{a,c,e\}$ مجموعة جزئية من X . بإيجاد التوبولوجي النسبي $\tau_A=\{A,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,e\}\}$ نجد أن المجموعة A مترابطة . بما أن $ext(A)=(\{b,d\})^o=\phi, A^o=\{a,c\}$ فإن $b(A)=\{b,d,e\}$ بإيجاد التوبولوجي النسبي $\tau_{b(A)}=\{b(A),\phi,\{d\},\{b,e\}\}$ نجد أن المجموعة $b(A)=\{b,d,e\}$ ليست مترابطة.

نتيجة (7.4)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون مترابط إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة ومترابطة.

البرهان:

بفرض أن A مجموعة كثيفة ومترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) فإن $A\subseteq \overline{A}=X$ وحيث أن $\overline{A}$ مترابطة فإن X تكون أيضاً مترابطة.■

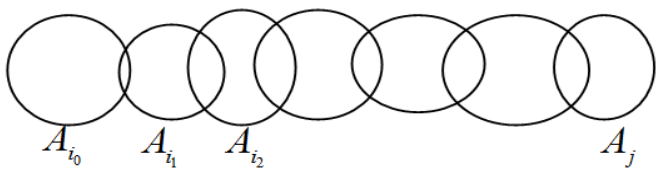
نظرية (7.7)

بفرض أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية المترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) ، بحيث أنه لأي زوج i,j ،من الأدلة، توجد أدلة منتهية $i=i_0,i_1,i_2,...,i_{n-1},i_n=j$ بحيث أن $A_{i_k}\cap A_{i_{k+1}}\neq\phi$ لكل $0\le k\le n-1$.

فإن المجموعة $A=\cup_i A_i$ مترابطة.

البرهان

نفرض أن $A=\cup_i A_i$ ليست مترابطة وأن G,H هما مجموعتا انفصال المجموعة A. نختار الدليل $i\in I$. ترابط عناصر العائلة $\{A_i\}_{i\in I}$ يقتضي أن $A_i\subseteq G$ أو $A_i\subseteq H$. نفرض أن $A_i\subseteq G$. نفرض أن $j\in I$ دليل آخر وأن $i=i_0,i_1,i_2,...,i_{n-1},i_n=j$.



شكل (7.2)

بما أن $G\cap A_{i_1}\neq\phi$ ،فإن G تحوي A_{i_1} و هذا يقتضي أن $G\cap A_{i_2}\neq\phi$ و من ثم نجد أن G تحوي A_{i_2} و بالاستقراء الرياضي يمكن أن نجد أن G تحوي A_{i_n}. أي أن G تحوي A_j. لذا فإن المجموعة G تحوي $A=\cup_i A_i$ ومن ثم يكون $G=A$ وهذا يتعارض مع الفرض بأن H مجموعة غير خالية. إذا $A=\cup_i A_i$

مترابطة.■

نتيجة (7.5)

بفرض أن $\{A_i\}$ عائلة من المجموعات الجزئية المترابطة في الفضاء (X,τ) .

(i) إذا وجد عنصر من العائلة يتقاطع مع باقي عناصر العائلة، فإن المجموعة $\cup_i A_i$ مترابطة.

(ii) إذا كان $\cap A_i \neq \phi$ ، فإن المجموعة $\cup_i A_i$ مترابطة.

نظرية (7.8)

الصورة المتصلة للفضاء المترابط تكون مجموعة مترابطة.

البرهان

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي المترابط (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,δ). نريد اثبات أن $f(X)$ مجموعة جزئية مترابطة في Y. لإثبات ذلك نفترض العكس بأن $f(X)$ غير مترابطة وأن $G,H\in\delta|_{f(X)}$ هما مجموعتي انفصال المجموعة $f(X)$.لذا نجد أن

$$f(X)=G\cup H, G\cap H=\phi, G\neq\phi, H\neq\phi$$

و من ذلك نستنتج أن

$$X=f^{-1}(G)\cup f^{-1}(H)\ ,\ f^{-1}(G)\cap f^{-1}(H)=\phi$$

حيث أن $f^{-1}(G),\ f^{-1}(H)$ مجموعتين جزئيتين مفتوحتين في X و غير متقاطعتين فإنهما مجموعتي إنفصال للمجموعة X و هذا يتعارض مع الفرض بأن X مجموعة مترابطة.■

نتيجة (7.6)

إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ دالة متصلة و شاملة من الفضاء التوبولوجي

المترابط (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,δ) فإن الفضاء (Y,δ) مترابط.

نتيجة (7.7)

خاصية أن يكون الفضاء مترابط هي خاصية توبولوجية.

نظرية (7.9)

مدى الدالة المتصلة $f:X\to R$ والمعرفة على الفضاء المترابط (X,τ) عبارة عن فترة.

البرهان

بما أن الدالة متصلة ، فإن $f(X)\subseteq R$ مجموعة مترابطة وبناءً على نظرية (7.8) فإنها تكون فترة.■

نظرية (7.10)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون غير مترابط إذا وفقط إذا وجدت دالة متصلة وشاملة من X إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$.

البرهان

نفرض أن الفضاء (X,τ) غير مترابط وأن A,B هما مجموعتي انفصال X . أي أن $X=A\cup B$. لذا يمكن تعريف دالة متصلة $f:X\to\{0,1\}$ من خلال الصيغة

$$f(x)=\begin{cases}0 & if \quad x\in A\\ 1 & if \quad x\in B\end{cases}$$

هذا التعريف متحقق نظرا لكون المجموعتين A,B غير متلاصقتين وأن $X=A\cup B$. بما أن A,B مجموعتين غير خاليتين وكل منهما مفتوحة، فإن الدالة f متصلة وشاملة.

من ناحية أخري،بفرض أن (X,τ) فضاء مترابط وأنه توجد دالة متصلة وشاملة $f:X\to\{0,1\}$ ، فإنه من نظرية (7.7) يكون لدينا الفضاء المتقطع $\{0,1\}$ مترابطاً و هذا تعارض.■

مثال (7.9)

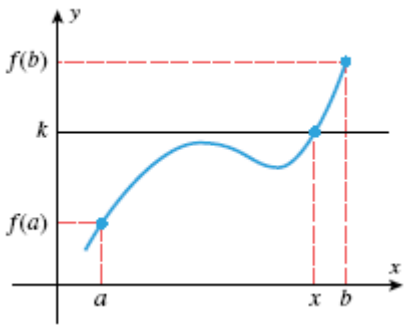
في المستوي R^2 ، الدائرة $C=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ تعتبر مجموعة مترابطة وذلك لكونها صورة متصلة للفترة المترابطة $[0,1]$ وذلك باعتبار الدالة المتصلة

$$f:[0,1]\to C$$

و المعرفة بالصيغة $f(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$ حيث أن $f([0,1])=C$.

من خلال دراستنا لمقررات التحليل و حساب التفاضل نعلم أن نظرية القيمة البينة تنص على التالي:

إذا كانت $f:[a,b]\to R$ دالة متصلة و كان $k\in R$ أي عدد حقيقي يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل العدد x في الفترة $[a,b]$ بحيث يكون $f(x)=k$.



شكل (7.3)

النظرية التالية تعتبر تعميم لنظرية القيمة البينة .

نظرية (7.11)

بفرض أن $f : X \to R$ دالة متصلة حيث أن (X,τ) فضاء مترابط . فإذا كانت $a,b \in X$ و $k \in R$ عنصر يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد $x \in X$ بحيث يكون $f(x) = k$.

تعتبر نظرية القيمة البينية الخاصة بحساب التفاضل و التكامل حالة خاصة من هذه النظرية وذلك يحدث لو أخذنا $X = [a,b] \subset R$.

البرهان

بما أن (X,τ) فضاء مترابط و $f : X \to R$ دالة متصلة فإن $f(X) \subset R$ مجموعة مترابطة و من ثم فهي فترة و حيث أن $f(a), f(b) \in f(X)$ و $f(a) < k < f(b)$ فإن $k \in f(X)$ و عليه يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = k$. ■

(7.2) مركبات الفضاءات التوبولوجية

Components of Topological Spaces

بفرض أن X فضاء اختياري ، فإنه قد توجد طرق طبيعية لتقسيم هذا الفضاء إلى أجزاء مترابطة (أو مترابطة مسارياً). هذه الأجزاء سوف يطلق عليها مركبات الفضاء أو المركبات المترابطة.

قبل الشروع في تعريف و دراسة مفهوم المركبات المترابطة (Connected components)، دعنا نمهد لذلك بالتمهيدية التالية:

تمهيدية (7.2)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة معرفة على X بالصورة:

$x \sim y$ إذا وجدت مجموعة مترابطة $A \subset X$ بحيث أن $x, y \in A$

فإن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

البرهان

هذه العلاقة عاكسة لأن المجموعات وحيدة العنصر دائماً مترابطة لذا فلكل $x \in X$ توجد مجموعة مترابطة وهي $\{x\}$.كما أن هذه العلاقة متماثلة. إثبات أن هذه العلاقة متعدية، نفترض أن $x \sim y$ وأن $y \sim z$ لأي $x, y, z \in X$. لذا توجد مجموعتان مترابطتان $A, B \in X$ بحيث أن كل من $x, y \in A$ و $y, z \in B$.

بما أن كل من A, B مجموعة مترابطة و $A \cap B \neq \phi$ فإن $A \cup B$ مجموعة مترابطة وأن $x, z \in A \cup B$.لذا $x \sim z$. ■

تعريف (7.5)

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة تكافؤ معرفة على X بالصورة:

$x \sim y$ إذا وجدت مجموعة مترابطة $A \subset X$ بحيث أن $x, y \in A$

فإن فصول تكافؤ هذه العلاقة تسمى مركبات الفضاء (X, τ).

نظرية (7.12)

بفرض أن $A \subset X$ مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التوبولوجي (X, τ) وأن B هي إحدى مركبات هذا الفضاء بحيث أن $A \cap B \neq \phi$ فإن $A \subset B$.

البرهان

نفرض أن $x \in A \cap B$. يتضح أنه لكل نقطة $a \in A$ فإن $x \sim a$ وبما أن $x \in B$ فإن $x, a \in B$ ومن ثم يكون كل عنصر من عناصر A محتوى في المركبة B. ■

نظرية (7.13)

أي مركبة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) تكون مجموعة مترابطة.

البرهان

بفرض أن C مركبة من مركبات الفضاء التوبولوجي (X,τ) وأن $x\in C$. لذا لكل $y\in C$ توجد مجموعة مترابطة ولتكن $K_y\subset X$ بحيث أن $x,y\in K_y$. بما أن $x\sim y$ لكل نقطة y في K_y فإن $K_y\subset C$. من هذا نجد أن

$$C=\cup\{K_y : y\in C\}$$

و هذه المجموعة مترابطة لأنها عبارة عن اتحاد مجموعات مترابطة وأن $\cap K_y\neq\phi$ (لأن النقطة x موجودة في كل K_y).■

نظرية (7.14)

أي مركبة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) تكون مجموعة مغلقة.

البرهان:

بفرض أن C مركبة مترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) و حيث أن $C\subseteq\overline{C}$ فإن $\overline{C}$ مجموعة مترابطة تحوي المجموعة C وحيث أن C مركبة فهي أكبر مجموعة مترابطة و بالتالي فإن $\overline{C}\subseteq C$ و من ثم نجد أن $C=\overline{C}$ أي أن C مغلقة.■

مثال (7.10)

بفرض أن $X=[0,1]\cup[2,3]$ فضاء جزئي من الفضاء التوبولوجي الاعتيادي (R,u). الفضاء X له المركبتين [0,1] و [2,3].

مثال (7.11)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{b,c\},\{a,d,e\}\}$ توبولوجي على المجموعة

$X = \{a,b,c,d,e\}$. فإن مركبات الفضاء التوبولوجي (X,τ)، هي

$\{b,c\},\{a,d,e\}$.

مثال (7.12)

مركبات الفضاء التوبولوجي المتقطع هي عائلة المجموعات وحيدة العنصر.

تعريف (7.6)

يقال أن الفضاء (X,τ) غير مترابط بالكامل (Totally disconnected) إذا كانت كل مركبة من مركباته عبارة عن مجموعة وحيدة العنصر.

نظرية (7.15)

كل فضاء غير مترابط بالكامل هو فضاء T_1 − .

البرهان

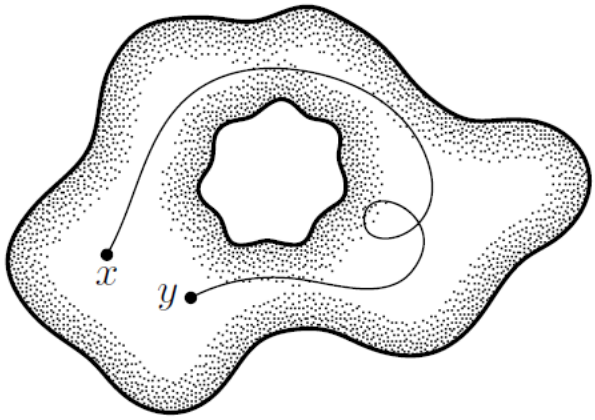
بما أن مركبات الفضاء الغير مترابط بالكامل مغلقة وهي مجموعات وحيدة العنصر فإن هذا الفضاء يكون فضاء T_1 −.■

مثال (7.13)

الفضاء التوبولوجي المتقطع هو فضاء غير مترابط بالكامل.

(7.3) الترابط المساري Path Connectedness

ترابط الفترات في R يقودنا لمفهوم مهم لنوع جديد من الترابط والذي يبن أن الفضاء X يكون مترابطاً ، تبعاً لهذ النوع من الترابط، متى كانت كل نقطتين فيه مرتبطتين بمسار يقع بالكامل داخل هذا الفضاء. هذا النوع من الترابط يسمى بالترابط المساري وهو ما سنُعرفه فيما يلي.



شكل (7.4) الترابط المساري

تعريف (7.7)

بفرض أن $x, y \in X$ نقطتين في الفضاء X ، المسار (Path) في X من النقطة x إلى النقطة y هو الدالة المتصلة $f:[a,b] \to X$ المعرفة من أي فترة مغلقة في R إلى الفضاء X بحيث أن $f(a) = x$ و $f(b) = y$.

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يسمى مترابط مسارياً (path connected) إذا كان لكل $x, y \in X$ يوجد مسار في X من النقطة x إلى النقطة y .

مثال (7.14)

الفضاء التوبولوجي التافه مترابط مساريا وذلك لأن كل دالة $f:[0,1] \to X$ متصلة.

مثال (7.15)

الفضاء العادي (R,u) مترابط مساريا وذلك لأي $a,b \in R$ فإن الدالة $f:[0,1] \to R$ و المعرفة بالصورة

$$f(x) = (1-x)a + bx, x \in [0,1], a,b \in R$$

هي دالة متصلة وتحقق $f(0)=a, f(1)=b$ وعليه فإنها تمثل مسارمن a إلى b داخل R.

نظرية (7.16)

كل فضاء مترابط مسارياً هو فضاء مترابط.

البرهان

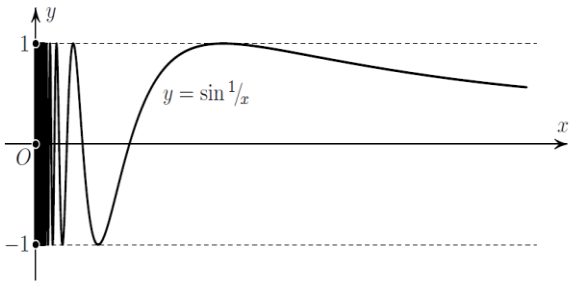
نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي مترابط مساريا . في حالة $X=\phi$ فإن النتيجة تصبح بديهية. لنفرض أن $X\neq\phi$ ، $x_0\in X$ نقطة ثابتة مختارة. من الترابط المساري للفضاء (X,τ) فإنه لكل $x\in X$ يوجد مسار $f_x:[a,b]\to X$ بحيث أن $f_x(a)=x_0$ ، $f_x(b)=x$ وحيث أن المسار دالة متصلة من الفترة المترابطة $[a,b]$، فإن المجموعة $f_x([a,b])$ مجموعة مترابطة لكل $x\in X$. لكن $X=\bigcup_{x\in X} f_x([a,b])$. إذاً X مترابطة لكونها اتحاد مجموعات مترابطة تقاطعها غير خال. ■

عكس هذه النظرية ليس من الضروري أن يكون صحيحاً دائما وهذا يتضح من خلال المثال التالي

مثال (7.16)

باعتبار المجموعة $A=\{(x,y):0<x\le 1, y=\sin(\frac{1}{x})\}\subset R^2$ مترابطة وذلك لكونها صورة متصلة للفترة $(0,1]$ تحت تأثير الدالة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$.

من ذلك يكون $\overline{A}=A\cup\{(0,y):-1\le y\le 1\}$ فضاء مترابط ولكنه غير مترابط مسارياً وذلك لعدم أي مسار من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(0,\frac{1}{\pi})$ مثلاً.



شكل (7.5): منحي الدالة $y = \sin \frac{1}{x}$

(7.4) الترابط الموضعي Locally Connectedness

خاصية الترابط تعتبر من الخواص المهمة التي يجب أن تتحقق في فضاء ما. ولكنه أحياناً تستدعي الحاجة أن يحقق الفضاء شرط الترابط موضعياًعند نقطة ما دون غيرها . أو بمعنى آخرأن هذه النقطة يتوفر لها جوار صغير مترابط. هذا النوع من الترابط يعرف في السطور التالية:

تعريف (7.8)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) مترابط موضعياً عند النقطة x إذا كان كل جوار U للنقطة x يحوي جوارا مترابطاً V للنقطة x بحيث يكون $V \subseteq U$.

إذا كان الفضاء (X,τ) مترابطاً موضعياً عند كل نقاطه، فإنه يسمى فضاءً مترابطاً موضعياً.

تعريف (7.9)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) مترابط ترابط مساري موضعي عند النقطة x إذا كان كل جوار U لنقطة x يحوي جوارا مترابطاً مسارياً V

للنقطة x بحيث يكون $V \subseteq U$.

إذا كان الفضاء (X,τ) مترابط ترابط مساري موضعي عند كل نقاطه، فإنه يسمى فضاء مترابط ترابط مساري موضعي.

مثال (7.17)

(1) كل فترة في خط الأعداد مترابطة و مترابطة موضعياً

(2) أي فضاء متقطع مترابط موضعياً

(3) أي فضاء تافه مترابط موضعياً

(4) الفضاء الجزئي $X = [-1,0) \cup (0,1]$ من خط الاعداد غير مترابط ولكنه مترابط موضعياً

(5) مجموعة الاعداد القياسية Q ليست مترابطة ولا مترابطة موضعياً.

لاحظنا من المثال السابق أن الترابط الموضعي لا يعني الترابط، في المقابل ما يمكننا أن نقول عندما يكون الفضاء (X,τ) مترابط هل بالضرورة يكون مترابطاً موضعياً؟ هذا السؤال تتضح اجابته من خلال المثال التالي:

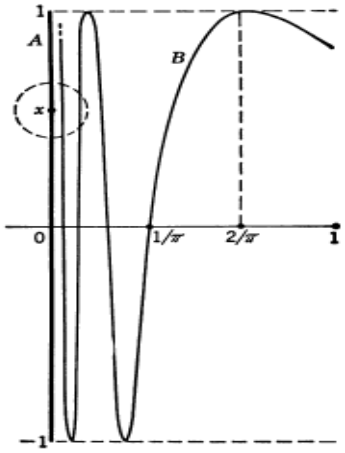
(6) بفرض أن X فضاء جزئي من المستوي الأقليدي وأن

$X = A \cup B$ حيث أن

$$A = \{(x,y) : x = 0, -1 \le y \le 1\}$$

$$B = \{(x,y) : 0 < x \le 1,\ y = \sin(1/x)\}$$

المجموعة B مترابطة وذلك لكونها صورة الفترة $(0,1]$ تحت تأثير الدالة المتصلة f المعرفة بالصيغة $f(x) = (x, \sin(1/x))$. بما أن $X = \overline{B}$ فإن الفضاء X مترابط ولكنه غير مترابط موضعياً لأنة يمكن بسهولة ملاحظة أن كل نقطة $x = (0,b)$ في A لها جوار لا يحوي أي جوار مترابط.

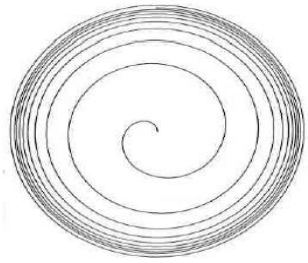


شكل (7.6)

(7) في المستوي مع التوبولوجي الاعتيادي، افترض أن $X = A \cup B$ فضاء جزئي من R^2 حيث أن

$$A = \{(r\cos t, r\sin t) : r = 1 - \frac{1}{t}, t \geq 1\} \quad \text{و} \quad B = \{(\cos t, \sin t) : t \in R\}$$

المجموعة $X = A \cup B$ مترابطة لأن المجموعة A مترابطة لكونها صورة مستمرة للفترة المترابطة $R_0 = [0,+\infty)$ و $X = A \cup B$ مترابطة لكنها غير مترابطة موضعيا لأنه باختيار النقطة $(1,0)$ فإن كل جوار مفتوح وصغير بقدر كاف للنقطة $(1,0)$ لا يكون مترابطاً.



شكل (7.7)

نظرية (7.17)

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون مترابطاً ترابطاً موضعيً إذا وفقط إذا كانت مركبة أي مجموعة مفتوحة A، في X ،هي مجموعة مفتوحة.

البرهان

اولاً نفرض أن (X,τ) فضاء مترابط موضعياً وأن $A\subseteq X$ مجموعة جزئية مفتوحة في X وأن C مركبة للمجموعة المفتوحة A. إذا كانت $x\in C$ فإنه يمكن اختيار جوار مترابط V للنقطة x بحيث أن $V\subset A$. حيث أن V مجموعة مترابطة فإنه يجب أن تقع بالكامل في داخل المركبة C للمجموعة A ومن ثم فإن C تكون مجموعة مفتوحة في X.

ثانياً نفترض أن مركبات المجموعات المفتوحة في X هي مجموعات مفتوحة. باختيار $x\in X$ كنقطة اختيارية وبفرض أن $V\in\tau$ جوار لهذه النقطة و C مركبة للمجموعة V و تحوي النقطة x. الآن المركبة C مترابطة ومفتوحة في X. إذاً الفضاء (X,τ) مترابط ترابط موضعي عند النقطة x.■

تمـارين (7.1)

1) إذا كـان $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجيـا معرفـة علـى المجموعـة $X=\{a,b,c,d,e\}$. ادرس تـرابط الفضـاء (X,τ)؟. هـل المجموعة الجزئية $A=\{b,d,e\}$ مترابطة؟.

2) المجموعات التالية جزئية من R^2.ادرس ترابط هذه المجموعات :

- $A=\{(a,b):b=0\}\cup\{(a,b):a>o,b=\frac{1}{a}\}$.
- $A=R^2-\{0\}$.

- $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.
- $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

3) لتكن $f : (X,\tau) \to (Y,\delta)$ دالة تشاكل توبولوجي ، برهن أن الفضاء (Y,δ) يكون مترابطاً إذا و فقط إذا كان الفضاء (X,τ) فضاءً مترابطاً .

4) بين بمثال أن خاصية الترابط ليست خاصية وراثية؟

5) بفرض أن كل من A,B مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) حيث أن $A \cap B \neq \phi$ ..فبرهن أن $A \cup B$ مجموعة مترابطة.

6) لتكن $f : (X,\tau) \to (Y,\delta)$ دالة متصلة و مفتوحة و شاملة من الفضاء التوبولوجي المترابط موضعياً (X,τ) إلى (Y,δ) .فبين أن الفضاء (Y,δ) مترابط موضعياً.

7) لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى المترابط موضعياً (X,τ) وبحيث أن $b(A)$ مجموعة مترابطة موضعياً. فبين أن $\overline{A}$ مجموعة مترابطة موضعياً.

8) اثبت أن الصورة المتصلة لأي مجموعة جزئية مترابطة مسارياً هي مجموعة مترابطة مسارياً.

9) ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي و لتكن $A \subseteq X$ مجموعة جزئية كثيفة في X و مترابطة مسارياً. هل الفضاء (X,τ) مترابط مسارياً.

10) برهن أن اتحاد عائلة المجموعات المترابطة مسارياً ذات التقاطع غير الخال هو مجموعة مترابطة مسارياً.

11) إذا كان (X,τ) فضاءً مترابطاً موضعياً و لتكن $A \subseteq X$ و المجموعة B مركبة في A. برهن أن

(1) $B^o = B \cap A^O$

(2) $b(B) \subseteq b(A)$

(3) $if \ \ A = \overline{A} \Rightarrow b(B) = B \cap b(A).$

12) ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً مترابطاً موضعياً و A مجموعة جزئية من X بحيث أن الفضاء الجزئي (A,τ_A) مترابط موضعيا .برهن أن المجموعة $\overline{A}$ مترابطة موضعياً.

13) أثبت أن الفضاء $R^2 - \{0\}$ مترابط؟.

14) لتكن $f : R^2 - \{0\} \to [0,1]$ دالة متصلة و شاملة. اثبت أنه لكل $0 < c < 1$ فإن $f^{-1}(c)$ غير قابل للعد.؟

15) اثبت أن كل مفتوح مترابط في R^n يكون مترابط مسارياً و هو مترابط موضعياً.؟

16) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين R و المجموعة $\{(x,y) \in R^2 : xy = 0\}$.؟

17) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين R و اي مجموعة مفتوحة جزئية من R.؟

18) بين أن الفضاء ذو بعد صفري إما غير متقطع أو غير مترابط.؟

19) بين أن الفضاء صفري البعد و الذي فيه كل مجموعة وحيدة العنصر مغلقة هو غير مترابط بالكامل؟

20) برهن أن كل فضاء هاوسدورف و صفري البعد هو غير مترابط بالكامل؟

21) ضع مثال لفضاء صفري البعد و غير مترابط بالكامل و مثال لفضاء غير مترابط بالكامل وليس صفري البعد.؟

22) برهن أن كل فضاء جزئي من الفضاء الغير مترابط بالكامل هو فضاء غير مترابط بالكامل؟