المجموعة الأولى من تمارين مقرر التحليل الدالي

1 . على $\mathbb{R}^2$ عرف الدالة

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & ,x = y \\ 1 & ,x \neq y \end{cases}$$

(a) بين أن d_0 هي دالة مسافة على $\mathbb{R}$.

(b) بين أن $K \subset \mathbb{R}$ يكون متراص في $(\mathbb{R}, d_0)$ إذا وفقط إذا كان منتهي.

(c) هل المتتابعة $(x_n = \frac{1}{n})$ متقاربة في $(\mathbb{R}, d_0)$؟ متى تكون المتتابعة (y_n) متقاربة في هذا الفضاء؟

2 . ليكن (E,d) فضاء متري.

(a) بين أن الدالة $f(x) = \frac{x}{x+1}$ متصاعدة وهي تقابل من $[0,\infty)$ إلى $[0,1)$.

(b) بين أن $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ دالة مسافة على E.

(c) بين أن O يكون مفتوح من (E,d) إذا وفقط إذا كان O مفتوح من (E,d').

(d) في $(\mathbb{R}, \frac{|\ |}{1+|\ |})$, هل كل مغلق ومحدود يكون متراص؟

3 . لتكن f_n معرفة بالصورة التالية:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ,-1 \leq x \leq \frac{-1}{n} \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} & ,\frac{-1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & ,\frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) بين أن المتتابعة $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كوشية في الفضاء $(C[a,b], \|\ \|_1)$.

(b) هل المتتابعة تقاربية في الفضاء $(C[a,b], \|\ \|_1)$؟

(c) هل الفضاء $(C[a,b], \|\ \|_1)$ تام؟ ماذا عن الفضاء $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$؟

(d) بين أن الفضائين $(C[a,b], \|\ \|_1)$ و $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ غير متكافئين؟

4 . ليكن الفضاء l^∞ هو الفضاء الذي عناصره متتابعات $x = (\xi_1, ..., \xi_n, ...)$ بحيث جميع المركبات ξ_n تكون حقيقية وتحقق أن $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty$.

(a) بين أن $\rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n - \eta_n|$ دالة مسافة على l^∞.

(b) لتكن E هي مجموعة العناصر من الفضاء l^∞ التي على الصورة $x_\xi = (\xi_1, ..., \xi_n, ...)$ بحيث المركبات ξ_n إما 1 او 0. بين أن المجموعة E غير قابلة للعد, وأن $\rho(x_\xi, x_{\xi'}) = 1$ عندما $\xi \neq \xi'$.

(c) بين أنه لكل $\xi \neq \xi'$ فإن $B(x_\xi, \frac{1}{3}) \cap B(x_{\xi'}, \frac{1}{3}) = \emptyset$.

(d) استنتج أنه لا توجد مجموعة كثيفة وقابلة للعد في l^∞ اي أن الفضاء غير قابل للفصل.

5 . إذا كانت $f_n \to f$ في الفضاء $L^p(\mathbb{R})$ و $g_n \to g$ في الفضاء $L^q(\mathbb{R})$ حيث $1 \leq p,q \leq \infty$ وتحقق أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. فأثبت أن $f_n g_n \to fg$ في الفضاء $L^1(\mathbb{R})$.

6 . أثبت أن تقاطع أي عدد لمجموعات متراصة من فضاء متري يكون متراص.

7 . لتكن (x_n) متتابعة تقاربية في الفضاء المعياري$(X, \|\ \|)$ إلى العنصر x. أثبت أن المتتابعة $(\alpha_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n})_n$ تتقارب إلى x.

8 . هل $C[a,b]$ مغلق في الفضاء $L^1(a,b)$؟ برر إجابتك.