جَامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الريَاضيَات رمضَان ١٤٢٧

اَلتّحليل المركّب ١

د. حسين المير ١٨٨٣ *Hassine_elmir@yahoo.fr*

رمز المقرّ ريض 643 عدَد الوحدَات 3 التّقويم الأعمَال الفصليّة من 50 النهَائِي من 50

المحتوَى

معدلَات كوشي ريمَان و الدّوَال التّحليلية. نظريّة كوشي و نتَائِجهَا. اَلنّقَاط الشَّاذة و نظريَات المفكوك. مبدَأ القيمة العظمَى. اَلبوَاقي و تطبيقَاتهَا. اَلإِدمَاج و التّقَارب في فضَاءَات الدّوَال التّحليلية و الميرومرفيّة العَائِلَات الطّبيعتيّة

Complex Analysis (I) 2003-2007

Cauchy-Riemann equations and analytic functions. Cauchy's theorem and consequences. Singularities and expansion theorems. Maximum modules principle. Residue theorem and its applications. Compactness and convergence in spaces of analytic and meromorphic functions. Normal families.

Complex Analysis (II) 2003-02007

The Riemann mapping theorem. Infinite products and the Weierstrass factorization Runge's theorem and Mittag-Leffler's theorem. Analytic continuation and Riemann surfaces. Harmonic functions, subharmonic and superharmonic functions, the Dirichlet problem. Entire function, Jensen's formula, Hadamard 's theorem. The Range of entire functions, Bloch's, Shotcky's, and Picard's thoerems

References

1) John B. Conway :" Functions of One Complex Variable"
2) Lars V. Ahlfors :" Complex Analysis
3) E. Hille : "Analytic Function Theory"(2 vols)
4) C. Caratheodory : "Theory of a Function of a Complex Variable" (2vols)
5) S. Sacks and A. Zygmund : "Analytic Functions"

هذه الدروس كتبت بإِعتمَاد برنَامج *Latex* و برنَامج *arabtex* أنصح الطَّالب بإِتقَانهمَا . أرحب بجميع ملَاحظَاتكم و إِستفسَارَاتكم

الدّوَال التّحليلية

نذكر بأنّ $\mathbb{C}$ هو $\mathbb{R}^2$ حيث $z = x + iy = (x, y)$ و نقول أنّ x هي القيمة الحقيقية $(real)$ و y هي القيمة التّخيّلية $(imaginary)$ لِلعنصر z و نكتب $x = Rez$ و $y = Imz$ في حين أنّ القيمة المطلقة هي $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ أمَّا القرص $(disc)$ $D(z_0, r)$ ذو مركز $z_0 \in \mathbb{C}$ و نصف قطر $r \geq 0$ فهو

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$$

نقول أنّ المجموعة $\Omega \subset \mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة أو مفتوح إن و فقط إن تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall z \in \Omega, \exists r > 0; D(z, r) \subset \Omega$$

و نقول أنّ Ω نطَاق $(Domaine)$ إن كَان مفتوح و مترَابط

تعريف

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $z_0 \in \Omega$ و $f : \Omega \to \mathbb{C}$ نقول أنّ f قَابلة لِلإِشتقَاق عند z_0 إن و فقط إن وجد $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. عندهَا هذه النهَاية تسمَى إِشتقَاق $(Derivative)$ f عند z_O و نرمز إِليهَا كمَا يلي

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نقول أنّ الدَالة تحليلية $(holomorphic)$ علَى Ω إن كَانت قَابلة لِلإِشتقَاق عند جميع عنَاصر Ω

ملَاحظَات

الدَالة f قَابلِةلِلإِشتقَاق عند z_0 و $f'(z_0) = a$ إن و فقط إن وجدت دَالة ε تحقّق $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ بحيث

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + h\varepsilon(h)$$

لِلتّأكد من ذلك يكفَى أن نضع $h = z - z_0$ و $\varepsilon(h) = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$

إِذًا كلّ دَالة قَابلة لِلإِشتقَاق عند z_0 تكون متّصلة عند z_0 أي $\lim_{h \to 0} f(z_0 + h) = f(z_0)$

أمثلة

١) كلّ كثيرة حدود $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + .. + a_0$ هي تحليلية في كَامل $\mathbb{C}$ (نقول أنّهَا كَاملة) و لنَا $P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + .. + a_1$

٢) اَلدَّالة الأسّية $(cosy + siny)$ $e^z = e^x e^{iy} = e^x$ هي كَاملة و إِشتقَاقهَا هو e^z

العلَاقة بين الإِشتقَاق و التّفَاضل

نذكّر بأَنّ

$f : \Omega \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ تكون قَابلة لِلتّفَاضل $(differentiable)$ عند $z_0 = (x_0, y_0)$ إِن و فقط إِن وجدت دَالة خطّية $(linear)$ $l \in L(\mathbb{R}^2)$ و دَالة ε تحقّق $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ بحيث

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = l(h) + |h|\varepsilon(h)$$

إِذًا كلّ دَالة قَابلة لِلإِشتقَاق تكون قَابلة لِلتّفَاضل و إِذَا كَان $h = h_1 + ih_2 = (h_1, h_2)$ و $f'(z_0) = a + ib$ فلنَا

$$l(h) = (ah_1 - bh_2, ah_2 + bh_1)$$

و العكس صحيح لنفترض أنّ f قَابلة لِلتّفَاضل

$$f(x, y) = f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$$

عند (x, y) فإِنّ تفَاضلهَا l يحقّق

$$l(h) = l(h_1, h_2) = (h_1 \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial U}{\partial y}(x, y), h_1 \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial V}{\partial y}(x, y))$$

إِذًا قَابلية f لِلإِشتقَاق تحتّم أنّ

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y = \frac{-\partial V}{\partial x}(x, y)$$

و هذه هي معَادلَات كوشَى ريمَان $(Cauchy - Riemann\ equations)$ و هكذَا نتحصّل علَى

ملَاحظَات

تكون f قَابلة لِلإِشتقَاق عند (x, y) إِن و فقط إِن كَانت قَابلة لِلتّفَاضل و تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان

تمَارين

١) بيّن $z \to \overline{z}$ قَابلة لِلتّفَاضل مَالَانهَاية من المرَّات و لكنّهَا غير قَابلة لِلإِشتقَاق فَى أيٍ من نقَاط المركّب

٢) بيّن أنّ $z \to \overline{z}^2$ قَابلة لِلتّفَاضل مَالَانهَاية من المرَّات و لكنّهَا قَابلة لِلإِشتقَاق فقط عند الصّفر

٣) بيّن أنّ $z \to \frac{\overline{z}^2}{z}$ تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان عند الصّفر و لكنّهَا غير قَابلة لِلإِشتقَاق فَى أيٍ من نقَاط المركّب

بعض الدّوَال المهمة

الدَّالة الأسّية $(exponential)$

الدَّالة $z = x + iy \to e^z = e^x(cosy + isiny)$ هي دَالّة صحيحة $(entire)$ إذ هي قَابلة لِلإِشتقَاق فَى كَامل المركّب. أمَّا مدَاهَا فهو $\mathbb{C}^*$ وهي تحقّق

$$(e^z)' = e^z, \qquad e^{z+z'} = e^z.e^{z'}, \qquad |e^z| = e^x$$

و هي دوريّة و ليست تبَاين

$$(e^z = e^{z'}) \Leftrightarrow (e^{z-z'} = 1) \Leftrightarrow (z - z' = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z})$$

ملَاحظة

نستطيع أن نبرهن علَى جميع المعَادلَات المثلّثية $(trigonometric\ equations)$ العَاديّة بإِستعمَال الدَّالة الأسّية فمثلًا إِذَا كَان $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ فإِنّ

$$e^{i(x-y)} = cos(x - y) + isin(x - y) = e^{ix}.e^{-iy} = (cosx + isinx)(cos(-y) + isin(-y))$$

إِذًا $cos(x - y) = cosx.cosy + sinxsiny$ و $sin(x - y) = sinxcosy - cosxsiny$ و كذَالك

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

نمدّد هذَا لكَامل المركّب فنعرّف الجيب (sin) و جيب التّمَام (cos) كمَا يلَى

$$\forall z \in \mathbb{C}, cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

نستطيع أن نثبت بسرعة أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, cos'(z) = sinz, \qquad sin'(z) = cosz, \qquad cos^2 z + sin^2 z = 1$$

مَا هي أصفَار $(roots)$ هذه الدّوَال

$$(sinz = 0) \Leftrightarrow (e^{iz} = e^{-iz}) \Leftrightarrow (e^{2iz} = 1) \Leftrightarrow (z = k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

أمّا

$$(cos = 0) \Leftrightarrow (e^{iz} = -e^{-iz}) \Leftrightarrow (e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}) \Leftrightarrow (z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

و بهذَا تكون دَالّة المـَمَاس

$$tanz = \frac{sinz}{cosz}$$

تحليلية علَى $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

و كذَالك تمـَاس التّمَام

$$cotanz = \frac{cosz}{sinz}$$

تحليلية علَى $\mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ و لنَا

$$(tan)'(z) = 1 + tan^2(z) = \frac{1}{cos^2(z)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ sin(2z) = \frac{2tan(z)}{1 + tan^2(z)}$$

$$cos(2z) = \frac{1 - tan^2(z)}{1 + tan^2(z)}$$

كذلك نمدّد الجيب الزَّائِدي $(hyperbolic)$ لكَامل المركّب فنعرّف الجيب الزَّائِدي $(sinh)$ و جيب التّمَام الزَّائِدي $(cosh)$ كمَا يلَى

$$\forall z \in \mathbb{C}, cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

فنتحصّل علَى

$$sinh' = cosh, \qquad cosh' = sinh, \qquad cosh^2 - sinh^2 = 1$$

الدَّاوَال اللّوغَاريتميّة (نِسبة إِلَى الخوَارزمي)

نقول أنّ f هو تعيِين $(determination)$ لِلّوغَارتم $(branch\ of\ logarithm)$ علَى المفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ إِن و فقط إِن كَانت f متّصلة و تحقّق الشرط التّالَى

$$\forall \in \Omega,\ e^{f(z)} = z$$

نظريّة

إِذَا كَان f تعيِين لِلّوغَارتم علَى المفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ فإِن f تكون تحليليّة علَى Ω و تحقّق

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

برهَان

عندنَا $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0 \Rightarrow} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ لنضع $w = f(z) \Leftrightarrow z = e^w$ و $w_0 = f(z_0) \Leftrightarrow z_0 = e^{w_0}$ نظرًا لأنّ f و الدَّالة الأَسّية متّصلتين فإِنّ

$(z \to z_0) \Leftrightarrow (f(z) \to f(z_0))$

إذًا

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w-w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}$$

ملَاحظَات

١) بمَا أنّ مدَى الدَّالة الأسّية هو $\mathbb{C}^*$ فإنّه لَا يوجد أيّ تعيِين لِلوغَارتم فَي أيّ مفتوح يحتوي علَى الصفر

٢) إذَا كَانت f تعيِين لِلوغَارتم علَى نطَاق Ω فإنّ $g : \Omega \to \mathbb{C}$ تكون تعيِين لِلوغَارتم علَى Ω إن و فقط إن وجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $g = f + 2ik\pi$ ذلك أنّه إن وجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $g = f + 2ik\pi$ فإنّ

$$e^g = e^{f+2ik\pi} = e^f = z$$

إذًا هو تعيِين لِلوغَارتم أمّا إذَا كَان g تعيِين لِلوغَارتم فإنّه $e^g = e^f = z$ أي

$$\forall z \in \Omega, \exists k(z) \in \mathbb{Z}; f(z) - g(z) = 2i\pi k(z)$$

إذًا الدَّالة k هي متّصلة علَى النطَاق Ω إذًا مدَاهَا هو جزءٌ مترَابط من $\mathbb{Z}$ إذًا يحتوي علَى عنصرٍ وحيد و بهذَا تكون k ثَابتة . و كذلك

$$\forall z \in \Omega, g(z) = f(z) + 2i\pi k$$

تعريف

علَى $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ليكن $z = x + iy$ الدَّالة

$$Log(x+iy) = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2) + 2iarctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})$$

هو تعيِين لِلوغَارتم يسمَّى التّعيِين الأسَاسَى و نرمز إليه $Log(z)$ أو $Ln(z)$

نلَاحظ أنّ

$$e^{Ln(z)} = \sqrt{x^2+y^2}(cos(2arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})) + isin(2arctan(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})))$$

و نظرًا إِلَى أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ sin(2z) = \frac{2tan(z)}{1+tan^2(z)},\ \ cos(2z) = \frac{1-tan^2(z)}{1+tan^2(z)}$$

فإنّ $\forall z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-), e^{Ln(z)} = z$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ لكلّ $z \in \mathbb{C}^*,$ يوجد $\theta(z) \in [\alpha, \alpha+2\pi[$ وحيد بحيث $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ بنفس الطّريقة نبيّن أنّ $log_\alpha(z) = Ln(|z|) + i\theta(z)$ هو تعيين لِلوغَارتم علَى $\mathbb{C} \setminus \{te^{i\alpha}, t \geq 0\}$ وجب حذف النصف المستقيم $\{te^{i\alpha}, t \geq 0\}$ لأنّ الدَّالة $\theta(z)$ و بتَّالَى $log_\alpha(z)$ غير متّصلة في أيّ من نقَاطه إِذ أنّ

$$\lim_{x\to\alpha^+} \theta(te^{ix}) = \alpha, \qquad \lim_{x\to\alpha^-} \theta(te^{ix}) = \alpha + 2i\pi$$

تمارين

١) هل يوجد تعيِين لِلوغَارتم علَى مفتوح يحتوي علَى دَئرة مركزهَا 0

٢) أوجد أكبر مفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ يحقّق

$$\forall (z_1, z_2) \in \Omega \times \Omega, Ln(z_1 z_2) = Ln(z_1) ln(z_2)$$

٣) أوجد مجَال تعريف و قيمة الدَّالة $(Ln - ln_{\frac{\pi}{2}})$ و بين أنّه $\forall n \in \mathbb{N}$ توجد بَالضبط n دَالة تحليليّة f علَى $\mathbb{C} \setminus \{it; t \geq 0\}$ تحقّق

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{it; t \geq 0\}, f^n(z) = z$$

التّكامل

تعريف

نسمّى قوسًا (arc) كلّ دَالة $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ قَابلةلِلإِشتقَاق و تحقّقِق $\forall t \in [a,b], \gamma'(t) \neq 0$ و نقول أنّ القوس أملس $(smooth)$ إِن كَنت γ' متّصلة علَى $[a,b]$ و نقول أنّ القوس γ املس قطعًا $(piecewise)$ إِن و فقط إِن كَان متّصلًا و وجد $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ بحيث علَى $]x_j, x_{j+1}[$ القوس γ يتسَاوَى مع قوسٍ املس معرّف علَى $[x_j, x_{j+1}]$. اَلنقطة $\gamma(a)$ تسمَّى نقطة البِدَاية $(origin)$ و $\gamma(b)$ تسمَّى نقطة النِّهَاية و نقول أنّ القوس مغلق $(closed)$ إِن كَان $\gamma(a) = \gamma(b)$

أمثلة

١) اَلدَّائِرة $\gamma_{z_0,r}$ $(circle)$ اللّتي مركز $z_0 \in \mathbb{C}$ و نصف قطر $r \geq 0$ و هي معرّفة علَى $[0, 2\pi]$ كمَا يلي $\gamma_{z_0,r(t)} = z_0 + re^{it}$ و هو قوس املس لأنّ $\gamma'_{z_0,r}(t) = ire^{it}$ و هو مغلق

٢) اَلقطعة $[A,B]$ $(segment)$ حيث $A \in \mathbb{C}$ و $B \in \mathbb{C}$ و هي معرّفة علَى $[0,1]$ كمَا يلي $[A,B](t) = A + (B - A)t$ هو قوس املس إِن و فقط إِن كَان $A \neq B$

٣) لتكن $y(t) = \{\begin{smallmatrix} e^{it}, & t\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ \frac{2i}{\pi}t, & t\in[\frac{\pi}{2},\pi] \end{smallmatrix}$ بيّن أنّه ليس بأَملس لكنّه املس قطعًا و أرسم صورته

٤) ليكن $\Gamma(t) = t + it^2 sin(\frac{1}{t})$ بين أنّه قوس متّصل و ليس بأملس قطعًا.

تعريف

ليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ قوسًا أملس قطعًا صورته γ^* ولتكن $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ دَالة متّصلة فإِنّنَا نعرّف تكَامل f علَى γ كَالتَّالي

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

أمثلة

١) عِذَا كَان $r > 0$

$$\int_{\gamma(z_0,r)} \frac{1}{z - z_0}dz = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi$$

٢) علَى القطعة $[A,B]$ عندنَا

$$\int_{[A,B]} zdz = \int_0^1 (A+(B-A)t)(B-A)dt = \frac{1}{2}(B^2-A^2)$$

تعريف

ليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ قوسًا أملس قطعًا فإنّ القوس في الإتّجاه المعَاكس هو $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$ بحيث $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$

القوسَان γ و γ^- لهمَا نفس الصّورة إلَا أنّ

$$\gamma(a) = \gamma^-(b), \qquad \gamma(b) = \gamma^-(a), \qquad \int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$$

نظريّة

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ يحتوي علَى صورة قوس املس قطعًا γ فإنّ

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(b))$$

برهَان

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [f\circ\gamma]'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(b))$$

تطبيق

١) عندنَا $\int_{[A,B]} e^z dz = e^B - e^A$

٢) إذَا كَان γ قوس أملس قطعًا و مغلق من مفتوح Ω و f تحليليّة علَى Ω فانّ

$$\int_\gamma f'(z)dz = 0$$

إذًا لَا يوجد تعيين لِلوغَارتم f علَى أيّ مفتوح يحتوي علَى دَائِرة γ مركزهَا الصّفر ذَالك أنّ

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$$

تعريف

ليكن $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ قوسًا مغلقًا أملس قطعًا صورته γ^* لكلّ $z \notin \gamma^*$ فإنّ دَليل $(index)$ القوس γ بالنسبة إلَى العنصر z هو

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}$$

أمثلة

١) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و γ_n هو القوس المعرّف علَى $[0, 2\pi]$ حسب $\gamma_n(t) = z_0 + e^{int}$ فإِنّ

$$I(\gamma_n, z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} \frac{d\omega}{\omega - z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} nidt = n$$

٢) أمَّا $I(\gamma_n^-, z_0)$ فهو $-n$

و هكذَا يبدو $I(\gamma, z)$ هو عدَد المرَّات الّتَى يدورهَا γ حول z في الإِتّجَاه المعَاكس لعقَارب السَّاعة· و هذَا يتأكّد بالنّظريّة التَّالية

نظريّة

ليكن $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ قوسًا مغلقًا أملس قطعًا صورته γ^* لكلّ $z \notin \gamma^*$ فإِنّ $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ و هو ثَابت علَى كلّ جزءٍ مترَابطٍ من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ و يكون صفرًا علَى الجزء المترَابط الغير محدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$

برهَان

ليكن $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ قوسًا مغلقًا أملس قطعًا صورته γ^* و $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$ لنعرّف

$$\psi(x) = e^{\int_a^x \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}}$$

هذه الدَّالة ψ قَابلة للأشتقَاق عند كلّ نقطة تكون فيهَا γ' متّصلة و لنَا

$$\psi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\psi(s)$$

و هذَا يعني أنّ

$$(\frac{\psi(s)}{\gamma(s) - z})' = 0$$

أي أنّ الدَّالة $\frac{\psi(s)}{\gamma(s) - z}$ تكون ثَابتة علَى كلّ فترة تكون عليهَا γ' متّصلة و بمَا أنّه توجد $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$ بحيث علَى $[x_j, x_{j+1}]$ تكون γ' متّصلة· إِذًا

$$\frac{\psi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\psi(x_1)}{\gamma(x_1) - z} = .. = \frac{\psi(b)}{\gamma(b) - z}$$

و بمَا أنّ $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإِنّ

$$\psi(a) = \psi(b) = 1 = e^{2i\pi I(\gamma, z)}$$

إذًا

$$I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$$

علَى الجزء المترَابط الغير محدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ فإنّ $I(\gamma, z)$ يكون ثَابت إذًا

$$I(\gamma, z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z} = 0$$

ملَاحظة

يوجد جزء مترَابط غير محدود وحيد من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ذَالك أنّ $\gamma([a,b])$ هو متراصّ لأنّه صورة متراصّ بدَالة متّصلة إذًا يوجد $r > 0$ بحيث $\gamma^* \subset D(0,r)$ بمَا أنّ $\mathbb{C} \setminus D(0,r)$ هو جزء مترَابط فهو ينتمَى إلَى الجزء المترَابط الغير محدود الوحيد من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ كلّ الأجزَاء الأخرَى هي موجودة دَاخل $D(0,r)$.

تطبيق

لنأخذ الحلزون $A = \{te^{it}; t \geq 0\}$ هو قوس ينطلق من الصّفر و يذهب إلَى مَا لَا نهَاية لكلّ قوسٍ مغلقٍ أملس قطعًا γ من $\mathbb{C} \setminus A$ فإنّ $I(\gamma, 0) = \int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ ذَالك أنّ 0 و كلّ A موجود فِي الجزء المترَابط الغير محدود من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. بالإِعتمَاد علَى نظريّة سَابقة نستنتج أنّ $\frac{1}{z}$ لهَا أصل f علَى $\mathbb{C} \setminus A$ إذًا

$$(ze^{-f(z)})' = e^{-f(z)} - f'(z)ze^{-f(z)} = 0$$

إذًا $ze^{-f(z)}$ هي ثَابتة λ_i علَى كلّ جزء مترَابط Ω_i من $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ بمَا أنّ $\lambda_i \neq 0$ يوجد $c_i \in \mathbb{C}$ بحيث $\lambda_i = e^{c_i}$ إذًا الدَّالة g المعرّفة علَى كلّ Ω_i حسب $g = f + c_i$ هي تعيين متّصل لِلّوغرتم علَى $\mathbb{C} \setminus A$.

و بنفس الطّريقة نبيّن أنّه مهمَا كَان الجزء المترَابط الغير محدود A اللّذِى يحتوِى علَى الصّفر فإِنّه يوجد تعيِين متّصل لِلوغرتم علَى $\mathbb{C} \setminus A$ هذَا و لقد أثبتنَا خلَال هذَا التطبيق النظريّة التَّالية

نظريّة

يوجد تعيِين متّصل لِلّوغرتم علَى مفتوحٍ $\Omega \subset \mathbb{C}$ إن و فقط أن وجدت دَالة f تحليليّة علَى Ω تحقّق

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٤ صفر ١٤٢٤

## تحليل مركب	الَاختبَار الَاول	في سَاعتين

التمرين الَاول

١) ليكن $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ ، أوجد القيمة الحقيقية و القيمة التخيلية لِلدَالة $f(z) = e^{\frac{1}{x-iy}}$.

أين تكون الدَالة f تحليلية.

٢) أوجد القيمة الحقيقية لِلعدَد $\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}$ و أستنتج قيمة $cost + .. + cosnt$

التمرين الثَاني

ليكن γ_R القوس المعرف علَى $[0, \frac{\pi}{4}]$ بحيث $\gamma_R(t) = -1 + e^{it}$

١) أرسم صورة γ_2

٢) أوجد $\lim_{R \to 0} \int_{\gamma_R} \frac{cosz}{z+1}$

٣) أوجد $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2}$

التمرين الثَالث

١) أوجد قيمة $log_{-\frac{\pi}{2}}(e^{1-i\frac{6}{5}\pi})$

٢) أشتقّ $zlog_{-\frac{\pi}{2}}(z)$ و أوجد قيمة $\int_{\gamma_2} log_{-\frac{\pi}{2}}(z)dz$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات	١٦ ربيع الَاوّل ١٤٢٤

## تحليل مركب	الَاختبَار الثَاني	في سَاعتين

التمرين الَاول

١) ليكن $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ ، أوجد القيمة الحقيقية و القيمة التخيلية لِلدَالة $f(z) = e^{(\frac{1}{1-x-iy})}$. أين تكون الدَالة f تحليلية.

٢) أوجد النّقَاط الشَاذة لِلدَّالة $g(z)=\frac{f(z)}{z(z-1)}$ مَا طبيعتهَا و البَاقي فيهَا.

٣) أوجد قوسًا γ_r املس تكون صورته

$$\{(x+iy)\in\mathbb{C}, y>0, (x-1)^2+y^2=r^2\}$$

و استنتِج قيمة $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z)dz$

التمرين الثَاني

أوجد جميع الدّوَال الصّحيحة h بحيث $\forall n\in\mathbb{N}^*, h(\frac{1}{2n})=\frac{1}{n}$

٢) هل توجد دَالة صحيحة لهَا عدَد غير متهي من الاَصفَار دَاخل قرص الوحدة

٣) هل توجد دَالة صحيحة ϕ بحيث

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \phi(\frac{1}{n})=\frac{cosn}{n+1}$$

التمرين الثَالث

١) أكتب نصّ و برهَان تمهيدية شوَارتز

٢) أوجد جميع التّقَابلَات التّحليليّة $\psi: B(0,1)\to B(0,1)$

مفكوك تيلور $(Taylor's\ serie)$

نظريّة

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و ليكن Δ مثلّث محتوَى هو و دَاخله فِي Ω فإِنّ

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0$$

برهَان

لنفترض أنّ $|\int_{\Delta} f(z)dz| = a \neq 0$ بربط أنصَاف الأضلَاع نتحصّل علَى ٤ مثلّثات مجموع التّكَامل عليه يسَاوِي $\int_{\Delta} f(z)dz$ اذًا إِحدَاهَا يكون التّكَامل عليه أكبر من $\frac{a}{4}$ نسمّيه Δ_1 و لنَا طول Δ_1 نسمّيه $L(\Delta_1)$ يحقّق $L(\Delta_1) = \frac{L(\Delta)}{2}$ نعيد الكرّة انطلَاقًا من Δ_1 و هكذَا دوَاليك نبني متتَابعة من المثلّثَات $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث Δ_{n+1} هي أحدَى الأجزَاء الأربعة المتسَاوية للّمثلّث Δ_n و

$$|\int_{\Delta_{n+1}} f(z)dz| \geq \frac{1}{4}|\int_{\Delta_n} f(z)dz|$$

اذَا أخذنَا $z_n \in \Delta_n$ فإِنّ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون كوشيّة و بمَا أنّ $\mathbb{C}$ كَامل فإِنّ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من $z_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ ولنَا

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)$$

إِذًا

$$|\frac{a}{4^n}| \leq |\int_{\Delta_n} f(z)dz| = |\int_{\Delta_n} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz + \int_{\Delta_n} (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)dz|$$

بمَا أنّ $(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))$ كثيرة حدود إِذًا لهَا أصل إِذًا

$$\int_{\Delta_n} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz = 0$$

أمَّا اتكَامل الثَّاني فإِنّه

$$|\int_{\Delta_n} (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)dz| \leq \frac{L}{2^n}\frac{L}{2^n} \sup_{z\in\Delta_n} |\varepsilon(z - z_0)|$$

أي أنّ

$$\frac{a}{L^2} \leq \sup_{z\in\Delta_n} |\varepsilon(z - z_0)|$$

و هذَا تنَاقض نظرًا إلَى أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Delta_n} |\varepsilon(z-z_0)| = 0$$

نظريّة (موريرة $Morera$)

لتكن f دَالة متّصلة علَى قرص $D(a,r)$ بحيث تكَاملهَا علَى كلّ مثلّث من القرص يسَاوِى صفر فإِنّ f يكون لهَا أصل و بالتَّالِى تكون تحليليّة علَى القرص

برهَان

لتكن $F(z)=\int_{[a,z]} f(w)dw$ و لتكن $h\in\mathbb{C}$ بحيث المثلّث $\Delta=[a,z,z+h]$ يكون دَاخل $D(a,r)$ بمَا أنّ

$$\int_\Delta f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,a]} f(w)dw = 0$$

فإِنّ

$$F(z+h)-F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt$$

و بهذَا يكون

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th)dt = f(z)$$

أي أنّ $F\in\mathcal{C}^1$ و $F'=f$

نظريّة

لتكن f دَالة متّصلة علَى نطَاق Ω فإِنّ f يكون لهَا أصل أي أنّ f تكون مشتقّة دَالة F إِذَا و فقط إِذَا كَان تكَاملهَا علَى كلّ قوس مغلق أملس قطعًا يسَاوِى صفر

برهَان

لتكن $F(z)=\int_{[a,z]} f(w)dw$ و لتكن $h\in\mathbb{C}$ بحيث المثلّث $\Delta=[a,z,z+h]$ يكون دَاخل $D(a,r)$ بمَا أنّ

$$\int_\Delta f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+h]} f(w)dw + \int_{[z+h,a]} f(w)dw = 0$$

فإِنّ

$$F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]} f(w)dw=\int_0^1 f(z+th)hdt$$

و بهذَا يكون

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\int_0^1 f(z+th)dt=f(z)$$

أي أنّ $F\in\mathcal{C}^1$ و $F'=f$

نظريّة

ليكن $a\in\mathbb{C},r>0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإِنّ

$$\forall z\in D(a,r), f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(a,r)}}\frac{f(w)d\omega}{\omega-z}$$

برهَان

١) لنفترض أوّلًا أنّ $a=0$ و $r=1$ و f' متّصلة بمَا أنّ z دَاخل القرص $D(0,1)$ فإِنّ

$$I\gamma_{(0,1)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}dt}{e^{it}-z}=1$$

إِذًا

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{(0,1)}}\frac{f(z)d\omega}{\omega-z}=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})e^{it}dt}{e^{it}-z}$$

لتكن

$$g(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(f(e^{it}+s(z-e^{it}))-f(z))e^{it}dt}{e^{it}-z}$$

عندنَا $g(1)=0$ و المطلوب أن نبيّن أنّ $g(0)=0$ بمَا أنّ

$$g'(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-(e^{it}-z)(f(e^{it}+s(z-e^{it}))e^{it}dt}{e^{it}-z}=\frac{-1}{2i\pi(1-s)}\int_0^{2\pi}(f(e^{it}+s(z-e^{it})))'dt=0$$

ذلك أنّ $t\to f(e^{it}+s(z-e^{it}))$ دوريّة و طول دورتهَا 2π إِذًا g ثَابتة و بهذَا يكون

$$g(0)=g(1)=0$$

٢) فِي الحَالة العَامة فإِنّ ه إِن كَانت $\xi\in D(a,r)$ فإِنّ $z=\frac{\xi-a}{r}\in D(0,1)$ و

$$g(z) = f(a+rz)$$

إذًا $D(0,1)$ تكون تحليلية علَى

$$\begin{aligned} f(\xi) = g(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,1)} \frac{g(w)d\omega}{\omega - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(e^{it})e^{it}dt}{e^{it}-z} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})e^{it}dt}{e^{it}-\frac{\xi-a}{r}} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)d\omega}{\omega - z} \end{aligned}$$

ملَاحظة

لقد إشتقَقنَا تحت علَامة التّكَامل وهذه العملية تكون صحيحة لو إفترضنَا من الأول أنّ $f \in \mathcal{C}^1$ فِي الحقيقة $f \in \mathcal{C}^\infty$ ذلك أنّه إن كَان f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإنّه يوجد $R > r$ بحيث f تكون تحليليّة علَى $D(a,R)$ نظرًا لمَا سبق فإنّ f لهَا أصل F يحقّق

$$\forall z \in D(a,r), F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(a+re^{it})re^{it}dt}{a+re^{it}-z}$$

بهذه الصّيغة تكون F قَابلة للْإشتقَاق مَا لَا نهَاية من المرَّات و

$$\forall z \in D(a,r), F^{n+1}(z) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(a+re^{it})re^{it}dt}{(a+re^{it}-z)^{n+1}}$$

إذًا $f = F' \in \mathcal{C}^\infty$

نظريّة

ليكن $a \in \mathbb{C}, r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإنّ

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

حيث

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

برهَان

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})re^{it}dt}{a+re^{it}-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{it})dt}{1-\frac{z-a}{re^{it}}}$$

و بما أنّ $\forall|\lambda|<1, \frac{1}{1-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n$ فإنّ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(a+re^{it})[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-a}{re^{it}})^n]dt$$

و بما أنّ التّقَارب منتظم فيمكن أن نبدّل الجمع مع التّكَامل فنتحصّل علَى

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

هذه المتسلسلة تثقَارب بإِنتظَام علَى $D(a,r)$ إِذًا يمكن أن نشتقّهَا عدّة مرّات حدًا بحد فنتحصّل علَى

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

تعريف

لتكن f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و $a\in\Omega$ ، يوجد $r>0$ بحيث

$$\forall z\in D(a,r), f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-a)^n$$

حيث

$$\alpha_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

هذه الصّيغة تسمّى مفكوك تيلور $(Taylor's\ serie)$ للدَّالة f عند a

نظريّة

ليكن $a\in\mathbb{C}, r>0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\overline{D(a,r)}$ فإنّ

$$|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}|\leq\frac{1}{r^n}sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

برهَان

نعرف أنّ

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})e^{-nit}dt$$

و كذلك

$$|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-nit}dt| \leq \frac{1}{r^n}sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

و هذَا يفضَى إِلَى

$$|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}| \leq \frac{1}{r^n}sup_{|z-a|=r}|f(z)|$$

نظريّة (ليوفل *Liouville*)

كلّ دَالة كليّة (*entire*) و محدودة تكون ثَابتة

برهَان

لتكن $M = \sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$ فإِنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

حيث $\forall R > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| \leq \frac{M}{R^n}$ إِذًا

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{M}{R^n} = 0$$

و بهذَا يكون

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = f(z_0)$$

نظريّة (الأَسَاسيّة فِي الجبر)

كلّ كثيرة حدود $P \in \mathbb{C}[z]$ غير ثَابتة لهَا علَى الأَقلّ جذر

برهَان

لتكن $P \in \mathbb{C}[z]$ غير ثَابتة إِن لم يكن لهَا جذر فإِنّ $\frac{1}{P}$ تكون صحيحة و محدودة إِذًا هي ثَابتة و بهذَا يكون P ثَابت و هذَا تنَاقض

ملَاحظة

إِذَا كَانت درجة $P \in \mathbb{C}[z]$ تسَاوِى $n \in \mathbb{N}^*$ أي

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + .. + \alpha_n z^n$$

فإِنّه يوجد $z_1 \in \mathbb{C}$ بحيث $P(z_1) = 0$ بإِعتمَاد مفكوك تيلور عند z_1 نرَى أَنّه يوجد $P_1 \in \mathbb{C}[z]$ درجته $n-1$ بحيث

$$P(z) = (z - z_1)P_1$$

إن كَان $n-1>1$ نعيد العمليّة بالنسبة لكثيرة حدود P_1 و هكذَا دوَاليك نبرهن أنّه يوجد اعدَاد مركّبة $z_1,..,z_n$ ليست بضرورة مختلفة بحيث

$$P(z) = \alpha_n(z - z_1)..(z - z_n)$$

نظريّة (اَلأصفَار المعزولة)

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق $\Omega \subset \mathbb{C}$ فإن العبَارَات التَّالية تكون متكَافِئة

١) اَلدَالة f تسَاوي صفر علَى كَامل Ω

٢) توجد $a \in \Omega$ بحيث لكلّ $n \in (\mathbb{N}\bigcup\{0\})$ فإنّ $f^{(n)}(a) = 0$

٣) أصفَار f لهَا نقطة ترَاكم في Ω

برهَان

١) ⇐ ٢)

إذَا كَانت الدَالة f تسَاوي الدَالة الصفريّة فلكلّ عددٍ كلّي n و لكلّ $a \in \Omega$ تكون $f^{(n)}(a) = 0$

٢) ⇐ ٣)

ليكن $a \in \Omega$ يحقّق $\forall n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, f^{(n)}(a) = 0$ بمَا أنّ Ω مفتوح يوجد $r > 0$ بحيث $B(a,r) \subset \Omega$ وعلَى $B(a,r)$ لنَا $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0$. إذًا $B(a,r)$ كلهَا نقَاط ترَاكم أصفَار f في Ω .

٣) ⇐ ١)

لنفترض أنّ $a \in \Omega$ هي نقَاط ترَاكم لأصفَار f . بمَا أنّ Ω مفتوح يوجد $r > 0$ بحيث $B(a,r) \subset \Omega$ وعلَى $B(a,r)$ مفكوك تيلور f هو $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

إن وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f^{(n)}(a) \neq 0$ ليكن $k \in \mathbb{N}$ أصغر الأعدَاد الطّبيعيّة $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f^{(n)}(a) \neq 0$ يصبح مفكوك تيلور f هو

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^k(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k})$$

الدَالة $h(z) = (\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k})$ تحليلية إذًا متّصلة و تحقّق $h(a) \neq 0$ إذًا يوجد $\epsilon > 0$ بحيث h ليس لهَا أصفَار علَى $B(a,\epsilon)$ إذًا الصفر الوحيد لِلدَالة $f(z) = (z-a)^k h(z)$

دَاخل $B(a,\epsilon)$ هو a . و هذَا ينَاقض أنّ a هي نقطة ترَاكم لأصفَار f نستنتج أنّ لكلّ $n \in \mathbb{N}$ فإنّ $f^{(n)}(a)=0$ و نلَاحظ أنّه لكلّ نقَاط ترَاكم a لأصفار f و لكلّ $r>0$ بحيث $B(a,r)\subset\Omega$ فإنّ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n=0$ علَى $B(a,r)$

ليكن $A\subset\Omega$ نقَاط ترَاكم أصفَار f في Ω من الملَاحظة يكون A مفتوح من Ω و من ٣) يكون $A\neq\emptyset$ كي نثبت أنّه مغلق من Ω لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متَتَابعة من A تَتقَارب من $a\in\Omega$ فكلّ مفتوح $a\in V$ سيحتوي a_n إنطلَاقًا من رتبة معيّنة و بمَا أنّ a_n نقطة ترَاكم لأصفَار f فإنّ V سيحتوي علَى مَالَانهَاية من لأصفار f وهذَا هو تعريف أن a هي نقطة ترَاكم لأصفَار f إذًا A هو كذلك مغلق بمَا أنّ Ω مترَابط فَالمجموعة الوحيدة المفتوحة من Ω و المغلقة من Ω و الغير فَارغة هي Ω فينتج أنّ $A=\Omega$ أي أنّ الدَالة f تسَاوي صفر علَى كَامل Ω .

تطبيق

١) اَلدَّالة التّحليليّة الوحيدة علَى قرص الوحدة التي تحقّق $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{1+n^2},\forall n\in\mathbb{N}$ هي $f(z)=\frac{z^2}{z^2+1}$ ذلك أنّه إن وجدت دَالة g تحقّق $g(\frac{1}{n})=\frac{1}{1+n^2},\forall n\in\mathbb{N}$ فإنّ $(f-g)(\frac{1}{n})=0,\forall n\in\mathbb{N}$ إذًا 0 هو نقطة ترَاكم لأصفار $f-g$ إذًا $f-g$ تسَاوي صفر علَى كَامل Ω .

٢) لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق $\Omega\subset\mathbb{C}$ ليست صفريّة فإن وجد $a\in\Omega$ بحيث $f(a)=0$ فإنه يوجد $\epsilon>0$ بحث a هو الصفر الوحيد لِلدَالة f دَاخل $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<\epsilon\}$ نقول أنّ الأصفَار معزولة. ليكن $K\Subset\Omega$ مترَاص فإنّ عدَد أصفَار f دَاخل K يكون متهي . ذلك أنّ $A=K\bigcap\{z\in\Omega;f(z)=0\}$ مترَاص لأنّه مغلق من مترَاص. و لكلّ $a\in A$ توجد $\varepsilon_a>0$ بحَيث $(A\bigcap B(a,\varepsilon_a))=a$ يمكن أن نستخلص من الغطَاء المفتوح $\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon_a)$ غطَاء متهي $B(a_1,\varepsilon_{a_1}),..,B(a_n,\varepsilon_{a_n})$ إذًا $A=\{a_1,..,a_n\}$

تمرين

لتكن $f:B(0,1)\to\mathbb{C}^*$ دَالة تحليليّة غير ثَابتة و $A=\{z\in B(0,1);f(z)=1\}$.

١)هل $A\bigcap B(0,\frac{1}{2})$ و $A\bigcap[0,1]$ همَا مجموعتين متهيتين

٢) بين أنّه لكلّ قوس γ من $B(0,1)$ و لكلّ دَالة تحليليّة g متّصلة علَى $\mathbb{C}^*$ ، فإنّ

$$\int_{f\circ\gamma}g(z)dz=\int_{\gamma}g\circ f(z).f'(z)dz$$

٣) إستنتج أنّه لكلّ قوس مغلق γ من $B(0,1)$ ، يكون

$$Ind_{f\circ\gamma}(0)=0$$

في مَا تبقَّى نفترض أنّ f تبَاين.

٤) بيّن أنّه لكلّ قوس مغلق Γ من $f[B(0,1)]$ يوجد قوس مغلق γ من $B(0,1)$ بحيث $f\circ\gamma=\Gamma$.

إِستنتج أنّ $f[B(0,1)]$ نطَاق عليه تعيّين متّصل لِلوغَارتم

٥) بيّن $f[B(0,1)]$ لَا يمكن أن يحتوي دَائِرة مركزهَا الصّفر

نظريّة (مبدَأ اَلقيمة العظمَى)

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω إِن وجد $a\in\Omega$ يحقِّق $|f(a)|=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|$ فإِنّ f تكون ثَابتة علَى Ω

برهَان

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و $a\in\Omega$ يحقِّق $|f(a)|=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|$ لتكن $\theta_0\in[0,2\pi]$ بحيث $|f(a)|=e^{i\theta_0}f(a)$ و $g=e^{i\theta_0}f$ وليكن $t>0$ بحيث $B(a,t)\subset\Omega$ نعرف أنّ

$$g(a)=|f(a)|=\int_0^{2\pi}g(a+te^{i\theta})d\theta=\int_0^{2\pi}\mathcal{R}eg(a+te^{i\theta})d\theta$$

الدَّالة $\varphi(\theta)=g(a)-\mathcal{R}eg(a+te^{i\theta})$ موجبة و متّصلة و تحقِّق $\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=0$ إِذًا $\varphi(\theta)$ هي الدَّالة الصفريّة ضف إِلَى ذلك أنّ

$$\mathcal{R}eg(a+te^{i\theta})=g(a)\geq|g(a+te^{i\theta})|=\sqrt{(\mathcal{R}eg(a+te^{i\theta}))^2+(\mathcal{I}mg(a+te^{i\theta}))^2}$$

إِذًا $\mathcal{I}mg(a+te^{i\theta}))=0$ ينتج أنّه $\forall\theta\in\mathbb{R},g(a)=g(a+te^{i\theta})$ إِذًا الدَّالة التحليليّة $(g-g(a))$ علَى النطَاق Ω لهَا أصفَار غير معزولة إِذًا هي الدَّالة الصفريّة ومن ثمّ فإِنّ $\forall z\in\Omega,g(z)=g(a)$

ملَاحظة

ليكن Ω مفتوح محدود من $\mathbb{C}$ و لتكن f دَالة تحليليّة علَى Ω و متّصلة علَى $\overline{\Omega}$ فإِنّ

$$\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)|=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|$$

ذلك أنّ الدَّالة المتّصلة $|f|$ تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى علَى ال متَرَاص $\overline{\Omega}$ عند a كإِن كَان $a\in\partial\Omega$ فإِنّ $\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)|=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|=|f(a)|$ و إِن كَان $a\in\Omega$ من مبدَأ القيمة العظمَى تكون f ثَابتة علَى الجزء المترَابط من Ω الذي يحتي علَى a حدود هذَا الجزء هي جزء من حدود Ω إِذًا

$$\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| = \sup_{z\in\Omega}|f(z)|$$

تمرين تمهيديّة شوَارتز $(Lemme\ de\ SCHWARTZ)$

لتكن f دَالة تحليليّة علَى $D(0,1)$ تحقّق

$$f(0) = 0; \quad \forall z \in D(0,1),\ |f(z)| \leq 1$$

١) بيّن أنّ $\forall z \in D(0,1),\ |f(z)| \leq |z|$ و $|f'(0)| \leq 1$.

٢) إستنتج أنّه إن كَان $|f'(0)| = 1$ ، أو إن وجد $z_0 \in D(0,1)$ يحقّق $|f(z_0)| = |z_0|$ فإنّ $f(z) = \lambda z, \forall z \in D(0,1)$ حيث $|\lambda| = 1$

٣) بيّن أنّ كلّ تقَابل تحليلي $f : D(0,1) \to D(0,1)$ يثبّت 0 يكتب $f(z) = \lambda z$ ، حيث $|\lambda| = 1$.

٢) بيّن $\forall a \in D(0,1)$ ، اَلدَّالة h_a المعرّفة حسب $h_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ هي تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$.
أوجد معكوسهَا

٣) بيّن أنّ كلّ تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$ هو من شكل λh_a حيث $|\lambda| = 1$ و $|a| < 1$

٤) بيّن أنّ كلّ دَالة تحليلية $f : D(0,1) \to D(0,1)$ تثبّت نقطتين تحقّق $f(z) = z$ ، $\forall z \in D(0,1)$ (أدرس $h_a \circ f \circ h_a$)

ينتج عن هذَا التّمرين النظريّة التَّالية

نظريّة

لتكن $f : D(0,1) \to D(0,1)$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد $\theta \in \mathbb{R}$ و يوجد $a \in D(0,1)$ وحيد يحقّق

$$\forall z \in D(0,1),\ f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

تطبيق

١) ليكن $P^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, y > 0\}$ و $f : P^+ \to D(0,1)$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد $\theta \in \mathbb{R}$ و يوجد $a \in P^+$ وحيد يحقّق

$$\forall z \in P^+,\ f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

٢) ليكن $P^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, y > 0\}$ و $f : P^+ \to P^+$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد أعدَاد حقيقيّة a, b, c, d تحقّق $ad - bc = 1$ بحيث

$$\forall z \in P^+,\ f(z) = \frac{az-b}{cz-d}$$

صيغ كوشى

نظريّة

لتكن f دَالة متّصلة علَى علَى مفتوحٍ Ω و ليكن Δ مستقيم من $\mathbb{C}$ و لنفترض أنّ f تحليليّة علَى $\Omega \setminus \Delta$ فإنّ f تكون تحليليّة علَى كَامل Ω

برهَان

يكفي أن نثبت أنّه لكلّ مثلّث T يكون هو و دَاخله في Ω فإنّ $\int_T f(z)dz = 0$

١) إن كَان $T \bigcap \Delta = \emptyset$ فبديهي أنّ $\int_T f(z)dz = 0$ لأنّ f تكون تحليليّة علَى المفتوح $\Omega \setminus \Delta$ الذي يحتوي علَى المثلّث T و دَاخله.

٢) إن كَان Δ يحتوي علَى أحد أضلَاع المثلّث T لنقل أنّ $T = (A, B, C)$ و أنّ $[B, C] \subset \Delta$ لكلّ $0 < \epsilon, 1$ ليكن $B_\epsilon = A + (1-\epsilon)(B-A)$ و $C_\epsilon = A + (1-\epsilon)(C-A)$ $T_\epsilon = (A, B_\epsilon, C_\epsilon)$ بمَا أنّ f دَالة متّصلة علَى Ω فإنّ

$$\int_T f(z)dz \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_\epsilon} f(z)dz$$

و بمَا أنّ $T_\epsilon \bigcap \Delta = \emptyset$ فمن المرحلة السَّابقة $\int_{T_\epsilon} f(z)dz = 0$ إذًا

$$\int_T f(z)dz \lim_{\epsilon \to 0} \int_{T_\epsilon} f(z)dz = 0$$

٣) إن كَان $T = (A, B, C)$ يتقَاطع مع Δ عند قمّة وحيدة لنقل $T \bigcap \Delta = C$ لتكن $C_\epsilon = A + (1-\epsilon)(C-A)$ بمَا أنّ f دَالة متّصلة علَى Ω فإنّ

$$\int_T f(z)dz \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(A, B, C_\epsilon)} f(z)dz$$

فمن المرحلة الأولَى يكون

$$\int_T f(z)dz \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(A, B, C_\epsilon)} f(z)dz = 0$$

٤) إن كَان $T = (A, B, C)$ يتقَاطع مع Δ في نقطتين لنقل $[A, B] \bigcap \Delta = B'$ و $[A, C] \bigcap \Delta = C'$ فانّ $\int_{(A,B,C)} f(z)dz = \int_{(A,B',C')} f(z)dz + \int_{(A,C',B')} f(z)dz + \int_{(C',B,C)} f(z)dz$ من فمن المرحلة

الثَّانية يكون $\int_{(A,B',C')} f(z)dz = \int_{(A,C',B')} f(z)dz = 0$ و من المرحلة الثَّالثة يكون $\int_{(C',B,C)} f(z)dz = 0$

٥) إن كَان $T = (A,B,C)$ يتقَاطع مع Δ في نقطتين إحدَاهمَا قمّة لنقل $A \ni \Delta$ و $[c,B] \bigcap \Delta = A'$ فانّ $\int_{(A,B,C)} f(z)dz = \int_{(A,B,A')} f(z)dz + \int_{(A,A',C)} f(z)dz = 0$ من المرحلة الثَّانية إذًا لكلّ مثلّث T يكون هو و دَاخله في Ω فإنّ $\int_T f(z)dz = 0$ نتيجة لنظريّة موريرة تكون f دَالة تحليليّة علَى كَامل Ω

نتيجة

ليكن Ω مفتوحًا من $\mathbb{C}$ و $a \in \Omega$ و f دَالة تحليليّة علَى $\Omega \setminus \{a\}$ و محدودة فإنّه توجد دَالّة $\tilde{f}$ تحليليّة علَى كَامل Ω و تسَاوي f علَى $\Omega \setminus \{a\}$

برهَان

بمَا أنّ f محدودة فنتيجة تكون الدَّالة

$$F(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & , \quad z \in (\Omega \setminus \{a\}) \\ 0 & , \quad z = a \end{cases}$$

متّصلة علَى Ω و لكلّ مستقيم Δ يحتوي علَى $\{a\}$ تكون F تحليليّة علَى $\Omega \setminus \Delta$ إذًا F تكون تحليليّة علَى كَامل Ω بمَا أنّ $F(a) = 0$ فبجوَار a مفكوك F هو

$$F(z) = (z-a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$$

لتكن $\widetilde{f(z)} = \frac{F}{z-a}$ فهي تحليليّة و تسَاوي f علَى $\Omega \setminus \{a\}$ و هي كذلك تحليليّة بجوَار a حيث $\widetilde{f(z)} = \frac{F}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$

تمَارين

١) هل يمكن أن نعوّض في النتيجة السَّابقة النّقطة $\{a\}$ بمستقيم Δ

(فكر في $f(z) = eiLog(z)$)

٢) هل يمكن أن نعوّض في النظريّة السَّابقة المستقيم Δ بصورة قوس

(فكر في التّكَامل علَى المثّلثَات كمَا في برهَان تكَامل كوشي)

نظريّة *Schwarz reflection principle*

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ يحقّق $z\in\Omega \Rightarrow \overline{z}\in\Omega$ لتكن $f:\{z\in\Omega, Imz\geq 0\}\rightarrow\mathbb{C}$ دَالة متّصلة و تحليليّة علَى $\{z\in\Omega, Imz>0\}$ و حقيقيّة علَى الأعدَاد الحقيقيّة من Ω فإنّ

$$\widetilde{f}=\begin{cases} f(z) & , \quad z\in\{z\in\Omega, Imz\geq 0\}\\ \overline{f(\overline{z})} & , \quad z\in\{z\in\Omega, Imz<0\}\end{cases}$$

تكون تحليليّة علَى Ω

برهَان

لتكن $f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$ حيث $U=\mathcal{R}e(f)$ هي القيمة الحقيقيّة لِلدَالة f و $V=\mathcal{I}m(f)$ هي القيمة التّخيّليّة لِلدَالة f لنَا $\overline{f(\overline{z})}=U(x,-y)-iV(x,-y)$ لكلّ $(x,y)\in\{z\in\Omega, Imz<0\}$ لنضع $u(x,y)=U(x,-y)$ و $v(x,y)=-V(x,-y)$ فإنّ

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}(x,-y)=\frac{\partial V}{\partial y}(x,-y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y=\frac{-\partial V}{\partial x}(x,y)$$

و هذه هي معَادلَات كوشَى ريمَان $(Cauchy-Riemann\ equations)$ و هكذَا نتحصّل علَى أنّ $\widetilde{f}$ متّصلة علَى كَامل Ω و هي تحليليّة مَاعدَا علَى المحور الحقيقيّ إِذًا من النّظريّة السَّابقة تكون $\widetilde{f}$ تحليليّة علَى كَامل Ω .

نظريّة كوشي $Cauchy's\ integral\ formula$

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و ليكن $\gamma_1,..,\gamma_n$ أقوسًا مغلقة من Ω بحيث $\forall z\notin\Omega,\ \sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z)=0$ فإِنّه

$$\forall z\in(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*), \qquad f(z)\sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$$

برهَان

لتكن $\Omega\times\Omega$ علَى

$$\varphi(z,w)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} & , \quad z\neq w\\ f'(z) & , \quad z=w\end{cases}$$

من تعريفهَا φ دَالة متّصلة علَى $\Omega\times\Omega$ كمَا أنّ لكلّ $w\in\Omega$ فإِنّ $z\rightarrow\varphi(z,w)$ تكون تحليليّة علَى $\Omega\setminus\{w\}$ و متّصلة علَى كَامل Ω إِذًا هي تحليليّة علَى كَامل Ω ليكن

$V=\{z\in(\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*),\ \sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z)=0\}$ بما أنّ الدّليل ثابت محليًّا فإنّ V يكون مفتوح و من المعطيات يحتوي V علَى Ω^c لتكن

$$\Psi(z)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega & , \quad z\in\Omega\\ \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z} & , \quad z\in V\end{cases}$$

١) اَلدَّالة $\Psi(z)$ حسنة التعريف علَى $\mathbb{C}$ ذلك أنّ $\mathbb{C}=V\bigcup\Omega$ و أنّه أن كَان $z\in V\bigcap\Omega$ فإنّ

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{(f(\omega)-f(z))d\omega}{\omega-z}=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}-f(z)\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{d\omega}{\omega-z}=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}$$

لأنّ

$$f(z)\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{d\omega}{\omega-z}=f(z)\sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_j,z)=0$$

٢) نظرًا لإمكَانيّة الأشتقَاق تحت علَامة التّكَامل فإنّ الدَّالة $\Psi(z)$ تكون تحليليّة علَى V ليكن $a\in\Omega$ إذًا يوجد $r>0$ بحيث $B(a,r)\subset\Omega$ لنَأخذ مثلث $\Delta\subset B(a,r)$ لنَا من نظريّة فبيني $Fubini$

$$\int_{\Delta}\Psi(z)dz=\int_{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega dz=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}(\int_{\Delta}\varphi(z,\omega)dz)d\omega$$

بما أنّ $z\to\varphi(z,w)$ تحليليّة علَى Ω فإنّ $\int_{\Delta}\varphi(z,\omega)dz=0$ إذًا $\int_{\Delta}\Psi(z)dz=0$

٣) نلَاحظ أنّ Ψ كليّة و تحقّق

$$\lim_{|z|\to\infty}\Psi(z)=\lim_{|z|\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(\omega)d\omega}{\omega-z}=0$$

إذًا Ψ دَالة كليّة و محدودة من نظريّة ليوفيل $Liouville$ تكون Ψ دَالة ثَابتة و بما أنّ $\lim_{|z|\to\infty}\Psi(z)=0$ إذًا لكلّ $z\in\Omega$ فإنّ $\Psi(z)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega=0$ نلَاحظ أنّه لكلّ $z\in(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*)$ و لكلّ $\omega\in(\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*)$ فإنّ $\varphi(z,w)=\frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z}$

إذًا لكلّ $z\in(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}\gamma_j^*)$ فإنّ

$$\Psi(z)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\varphi(z,\omega)d\omega=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{(f(\omega)-f(z))d\omega}{\omega-z}=0$$

و بما أنّ $\int_{\gamma_j}\frac{f(z)d\omega}{\omega-z}=f(z)Ind(\gamma_j,z)$ إذًا

$$\forall z \in (\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j^*), \quad f(z)\sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_j, z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$$

نظريّة

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و ليكن $\gamma_1, .., \gamma_n$ أقوسًا مغلقة من Ω بحيث $\forall z \notin \Omega,\ \sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_j, z) = 0$ فإنّه

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} f(\omega)d\omega$$

برهَان

ليكن $a \in (\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j^*)$ و $g(z) = (z-a)f(z)$ نلَاحظ أنّ $g(a) = 0$ و من النظريّة السَّابقة لنَا

$$0 = g(a)\sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_j, a) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} \frac{g(\omega)d\omega}{\omega - a}$$

و بمَا أنّ $f(\omega) = \frac{g(\omega)}{\omega - a}$ فإنّ

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} f(\omega)d\omega$$

عندمَا يكون لدينَا قوس وَاحد نتحصل علَى

نظريّة كوشي

لتكن f تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω و ليكن γ قوسًا مغلقًا من Ω بحيث $\forall z \notin \Omega,\ Ind(\gamma, z) = 0$ فإنّه

$$\forall z \in \Omega \setminus \gamma^*, \quad f(z)Ind(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$$

نظريّة كوشي لهَا تطبيقَات جمًّا منهَا نظريّة البوَاقي و كذلك النظريّة التَّالية

نظريّة

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $0 < r < R$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ فإنّه علَى $\{z \in \mathbb{C}, r < |z-a| < R\}$ يتحقَّق

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n}\int_{0}^{2\pi} f(a + re^{it})e^{-int}dt\right)(z-a)^n$$

برهَان

لتكن $\gamma_1 = \gamma^-(a,r)$ و $\gamma_2 = \gamma(a,R)$ إِذَا كَان $z \notin \Omega$ بمَا أَنّ $\Omega \supset \{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ فإِمَّا $|z-a| < r$ عندهَا $Ind(\gamma_1, z) = -1$ و $Ind(\gamma_2, z) = 1$ و إِمَّا $|z-a| > R$ عندهَا $Ind(\gamma_1, z) = Ind(\gamma_2, z) = 0$ في جميع الحَالَات $z \notin \Omega \Rightarrow Ind(\gamma_1, z) + Ind(\gamma_2, z) = 0$ من تكَامل كوشي لنَا

$$\forall z \in (\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{2} \gamma_j^*), \qquad f(z) \sum_{j=1}^{2} Ind(\gamma_j, z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{2} \int_{\gamma_j} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - z}$$

إِذَا $z \in \{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ فإِنّ $Ind(\gamma_1, z) + Ind(\gamma_2, z) = 1$ لأَنّ z يكون دَاخل $B(0,R)$ و خَارج $B(0,r)$ عندهَا

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(a,R)} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - z} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - z}$$

لتكن $h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(a,R)} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$ و $g(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z}$ بمَا أَنّ

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{it}) Re^{it} dt}{a + Re^{it} - z}$$

فمن برهَان مفكوك تيلور $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) e^{-int} dt)(z-a)^n$ تكون تحليليّة في $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| \leq R\}$. أَمَّا بَالنسبة لِلدَالة

$$g(z) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma(a,r)} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - z} = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) re^{it} dt}{a + re^{it} - z} = \frac{1}{2\pi(z-a)} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) re^{it} dt}{1 - \frac{re^{it}}{z-a}}$$

فنضع هذه المرّة $\lambda = \frac{re^{it}}{z-a}$ و بمَا أَنّ $\forall |\lambda| < 1, \frac{1}{1-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ فإِنّ

$$g(z) = \frac{1}{2\pi(z-a)} \int_0^{2\pi} (f(a + re^{it}) re^{it} [\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{re^{it}}{z-a})^n] dt$$

و بمَا أَنّ التّقَارب منتظم علَى $[0, 2\pi]$ فيمكن أَن نبدّل الجمع مع التّكَامل فنتحصّل علَى

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) (\frac{re^{it}}{z-a})^{n+1} dt)$$

و بوضع $k = -n - 1$ فإِنّ

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} (\frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-ikt} dt)(z-a)^k$$

ينتج أَنّ الدَّالة g تكون تحليليّة علَى كَامل $\{z \in \mathbb{C}, r < |z-a|\}$

$$f = g+h = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n+\sum_{n=-\infty}^{n=-1}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

لتكن $r \leq t \leq R$ و $\Omega' = \Omega \setminus a$ لكلّ $n \in \mathbb{Z}$ الدَّالة $f(z-a)^{n-1}$ تحليليّة علَى Ω' و في جميع الحَالَات $z \notin \Omega' \Rightarrow Ind(\gamma(a,R),z) + Ind(\gamma^-(a,t),z) = 0$ من النظريّة التي تلت تكَامل كوشي لنَا

$$\int_{\gamma(a,R)} \frac{f(\omega)d\omega}{(\omega-a)^{n+1}} + \int_{\gamma^-(a,t)} \frac{f(\omega)d\omega}{(\omega-a)^{n+1}} = 0$$

ينتج أنّ لكّل $n \in \mathbb{Z}$ و لكلّ $r \leq t \leq R$ فإِنّ

$$\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi} f(a+te^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

إِذًا لكلّ $r \leq t \leq R$ و لكلّ $z \in \{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ فإِنّ

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi} f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $R > r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى مفتوحٍ Ω يحتوي علَى $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ و ليكن $r \leq t \leq R$ فإِنّه علَى $\{z \in \mathbb{C}, r < |z-a| < R\}$ يتحقَّق

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi} f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$$

هذَا المفكوك يسمَّى مفكوك لورَان لِلدَّالة f $(Laurent's\ serie)$ من برهَان النّظريّة السَّابقة نرَى أنّ $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi} f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$ تكون تحليليّة في $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| \leq R\}$.

في حين أنّ $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=0}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+te^{it})e^{-int}dt)(z-a)^n$ تكون تحليليّة في $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a|\}$ و علَى $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z-a| \leq R\}$ لنَا $f = g+h$

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ نقول أنّ

١) اَلنقطة a شَاذة مزَالة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا أمكن تمديد f كدَالة تحليليّة علَى كَامل $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ أي توجد دَالة $\widetilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ بحيث $f = \widetilde{f}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$.

٢) اَلنقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة $n \in \mathbb{N}$ إذَا و فقط إذَا وجدت دَالة $\widetilde{g}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ بحيث $(z-a)^n f = \widetilde{g}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ و $\widetilde{g}(a) \neq 0$.

٣) اَلنقطة a شَاذة أسَاسيّة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا لم تكن شَاذة مزَالة و لَا قطب لِلدَّالة f

نظريّة (النّقَاط اَلشَاذة)

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ و $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ هو مفكوك لورَان الدَّالة f فإنّه

١) تكون a نقطة شَاذة مزَالة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا كَان $\forall n < 0, a_n = 0$ إذَا و فقط إذَا وجدت $0 < \epsilon < r$ بحيث f تكون محدودة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < \epsilon\}$

٢) تكون a قطب لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا وجد $p \in \mathbb{N}$ بحيث $a_{-p} \neq 0$ و $a_{-n} = 0, \forall n > p$ إذَا و فقط إذَا كَان $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$

٣) تكون a نقطة شَاذة أسَاسيّة لِلدَّالة f إذَا و فقط إذَا $\forall n \in \mathbb{N}$ توجد $p > n$ بحيث $a_{-p} \neq 0$ إذَا و فقط إذَا $\forall 0 < \epsilon < r, \overline{f(\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < \epsilon\})} = \mathbb{C}$

برهَان

ليكن $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ و f دَالة تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ و $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ هو مفكوك لورَان الدَّالة f

١) إذَا كَانت a نقطة شَاذة مزَالة لِلدَّالة f فإنّه يوجد $r > 0$ و دَالة $\widetilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ بحيث $f = \widetilde{f}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$. الدَّالة $\widetilde{f}$ لهَا مفكوك لورَان $\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$ بمَا أنّ $f = \widetilde{f}$ علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ فإنّ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$ من وحدَانيّة مفكوك لورَان نستنتج أنّ $\forall n < 0, a_n = 0$

أمَّا إذَا كَان $\forall n < 0, a_n = 0$ فإنّه علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-a| < r\}$ تكون f مسَاوية لجزئِهَا التّحليلي أي

لنسمّي $f(z)=\sum_{n=O}^{\infty} a_n(z-a)^n$ $\widetilde{f}=\sum_{n=O}^{\infty} a_n(z-a)^n$ فإنّ $\widetilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<r\}$ إذًا هي متّصلة إذًا $\forall\epsilon<r$ تكون $\widetilde{f}$ محدودة علَى المترَاص $\{z\in\mathbb{C},|z-a|\le\epsilon\}$ و من ثمّ فإنّ $\widetilde{f}=f$ تكون محدودة علَى $\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|\le\epsilon\}$

أمَّا إِن وجدت $0<\epsilon<r$ بحيث تكون f محدودة علَى $\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|\le\epsilon\}$ فإنّ الدَّالة

$$g(z)=\begin{cases}(z-a)f(z) & , \quad 0<|z-a|<r\}\\ 0 & , \quad z=a\end{cases}$$

تكون متّصلة علَى كَامل $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<r\}$ و تحليليّة مَاعدَى عند a إذًا هي تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<r\}$ و لهَا مفكوك تيلور $g(z)=\sum_{n=O}^{\infty}\beta_n(z-a)^n$ لنَا $\beta_0=g(a)=0$ إذًا $g(z)=(z-a)f(z)=(z-a)\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(z-a)^{n-1}$ أي أنّ $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(z-a)^{n-1}$ هذَا هو مفكوك لورَان لِلدَالة $f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$ إذًا $\forall n<0, a_n=0$.

٢) اَلنقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة $\mathbb{N}\ni p$ إذَا و فقط إذَا وجدت دَالة $\widetilde{g}$ تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<r\}$ بحيث $(z-a)^p f=\widetilde{g}$ علَى $\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<r\}$ و $\widetilde{g}(a)\neq 0$. اَلدَّلة g لهَا مفكوك تيلور $g(z)=(z-a)^p f=g(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(z-a)^k$ ينتج أنّ $f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n=g(a)(z-a)^{-p}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(z-a)^{k-p}$ إذًا لنَا $a_n=0,\forall n>p$

أمَّا إذَا وجد $p\in\mathbb{N}$ بحيث $a_{-p}\neq 0$ و $a_{-n}=0,\forall n>p$ فإنّ $f=\sum_{n=-p}^{\infty}a_n(z-a)^n=(z-a)^{-p}\sum_{n=-p}^{\infty}a_n(z-a)^{n+p}=(z-a)^{-p}\sum_{k}^{\infty}a_{k-p}(z-a)^k$ عندهَا $g(z)=\sum_k^{\infty}a_{k-p}(z-a)^k=(z-a)^p f(z)$ تكون دَالة تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<r\}$ و تحقّق $g(a)=a_{-p}\neq 0$ إذًا النقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة p كذلك يكون

$\lim_{z\to a}|f(z)|=\lim_{z\to a}|g(z)(z-a)^{-p}|=+\infty$ لأنّ $g(a)\neq 0$

أمَّا إذَا كَان $\lim_{z\to a}|f(z)|=+\infty$ فإنّ $\lim_{z\to a}|\frac{1}{f(z)}|=0$ إذًا تكون الدَّالة $\frac{1}{f}$ محدودة بجوَار a من المرحلة الأولَى لنَا $\frac{1}{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(z-a)^n$ حيث $\lambda_0=\lim_{z\to a}|\frac{1}{f(z)}|=0$ لتكن p أصغر دَليل $\mathbb{N}\ni n$ بحيث $\lambda_n\neq 0$ لنَا $\frac{1}{f(z)}=(z-a)^p\sum_{n=p}^{\infty}\lambda_n(z-a)^{n-p}$ إذَا وضعنَا

فإنّ g $(z-a)^pf(z)=\widetilde{g}(z)=(\sum_{n=p}^{\infty}\lambda_n(z-a)^{n-p})^{-1}$ تكون تحليليّة بجوَار a و تحقّق $g(a)=\lambda_p^{-1}\neq 0$ إِذًا النقطة a قطب لِلدَّالة f من الرتبة p

٣) تكون a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدَّالة f إِذَا و فقط لم تكن شَاذة مزَالة و لَا قطب لِلدّالة f إِذًا ممّا سبق تكون a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدّالة $f=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$ إِذَا و فقط $\forall n\in\mathbb{N}$ توجد $p>n$ بحيث $a_{-p}\neq 0$.

إِذَا كَان $\forall 0<\epsilon<r, \overline{f(\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<\epsilon\})}=\mathbb{C}$ فإِنّ f ليست محدودة بجوَار a إِذًا a ليست شَاذة مزَالة و كذلك a ليست قطب لِلدّالة f لأنّ f لَا تحقّق $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=+\infty$ لأنّ $\forall 0<\epsilon<r$ المفتوح $B(0,1)$ يتقَاطع مع $f(\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<\epsilon\})$ إِذًا توجد z_ϵ تحقّق $0<|z_\epsilon-a|<\epsilon$ و $|f(z_\epsilon)|<1$ إِذًا a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدّالة f

و أخيرًا لنفترض أنّه $\exists 0<\epsilon<r, \overline{f(\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<\epsilon\})}\neq\mathbb{C}$ بما أنّ $\mathbb{C}\setminus\overline{f(\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<\epsilon\})}$ مفتوح فهو يحتوي علَى كرة $B(y,t)$ أي $|f-y|\geq t$ علَى $\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<\epsilon\}$ إِذًا $|\frac{1}{f-y}|\leq\frac{1}{t}$ فالدَّالة $\frac{1}{f-y}$ تكون محدودة علَى $\{z\in\mathbb{C},0<|z-a|<\epsilon\}$ من ١)توجد دَالة $\widetilde{f}$ تحليليّة علَى $\{z\in\mathbb{C},|z-a|<\epsilon\}$ بحيث $\frac{1}{f-y}=\widetilde{f}$ · إِذًا $f=y+\frac{1}{\widetilde{f}}$ إِذَا كَان $\widetilde{f}(a)\neq 0$ فإِنّ f تكون محدودة بجوَار a و من ثمّ فإِنّ a تكون نقطة شَاذة مزَالة لِلدّالة f أمَّا إِذَا كَان $\widetilde{f}(a)=0$ فإِنّ $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=+\infty$ و من ثمّ فإِنّ a تكون قطب لِلدّالة f

نظريّة البوَاقي *Residues theorem*

لتكن $\{a_1,..,a_n\}$ نقَاط مختلفة من مفتوح Ω لتكن f تحليليّة علَى $(\Omega\setminus\{a_1,..,a_n\})$ و ليكن $\gamma_1,..,\gamma_s$ أقوسًا مغلقة من $(\Omega\setminus\{a_1,..,a_n\})$ بحيث كلّ $z\notin\Omega$ يحقّق $\sum_{j=1}^{s}Ind(\gamma_j,z)=0,$ فإِنّه

$$\sum_{j=1}^{s}\int_{\gamma_j}f(\omega)d\omega=2i\pi\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}Ind(\gamma_k,a_j)Res(f,a_j)$$

برهَان

بجوَار a_k الدَّالة f مفكوك لورَان

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a_k+te^{it})e^{-int}dt)(z-a_k)^n$$

حيث $g_k(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=-1}(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(a_k+te^{it})e^{-int}dt)(z-a_k)^n$ تكون تحليليّة في $(\mathbb{C}\setminus a_k)$ إِذًا $h(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}g_j(z)$ تكون تحليليّة علَى $\Omega\setminus\{a_1,..,a_n\}$ بجوَار a_k الدَّالة $f-g_k$ تكون

تحليليّة و كذلك $\sum_{j\neq k}^{n} g_j$ تكون تحليليّة بجوَار a_k إِذًا $h = f - \sum_{j=1}^{n} g_j$ تكون تحليليّة علَى كَامل Ω ينتج من النّظريّة السَّابقة أنّ

$$0 = \sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} h(\omega) d\omega$$

إِذًا

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega) d\omega$$

بمَا أنّ $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} \alpha_n (z - a_k)^n = g_k(z)$ تتَقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متَرَاص من $(\mathbb{C} \setminus a_k)$ فإِنّ

$$\int_{\gamma_j} g_k(\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \alpha_n \int_{\gamma_j} (\omega - a_k)^n d\omega$$

نلَاحظ أنّ لكلّ $n < -1$ الدَّالة $(\omega - a_k)^n$ لهَا أصل $\frac{1}{n+1}(\omega - a_k)^{n+1}$ إِذًا $\int_{\gamma_j} (\omega - a_k)^n d\omega = 0$ و من ثمّ فإِنّ

$$\int_{\gamma_j} g_k(\omega) d\omega = \alpha_{-1} \int_{\gamma_j} (\omega - a_k)^{-1} d\omega = Ind(\gamma_j, a_k) Res(f, a_k)$$

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{\gamma_j} f(\omega) d\omega = 2i\pi \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma_k, a_j) Res(f, a_j)$$

ملَاحظة

عندمَا نتعَامل مع قوس وَاحد نتحصل علَى النّظريّة التَّالية

لتكن $\{a_1, .., a_n\}$ نقَاط مختلفة من مفتوح Ω لتكن f تحليليّة علَى $(\Omega \setminus \{a_1, .., a_n\})$ و ليكن γ أقوسًا مغلقة من $(\Omega \setminus \{a_1, .., a_n\})$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma, z) = 0,$ فإِنّه

$$\int_{\gamma} f(\omega) d\omega = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Ind(\gamma, a_j) Res(f, a_j)$$

تطبيق

١) لكلّ $\lambda \notin [-1, 1]$ بين أنّ $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\lambda + cost} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$

بصفة عَامة إِذَا كَانة $f(sint, cost)$ دَالة كسريّة فإِنّنَا نحسب $\int_0^{2\pi} f(sint, cost) dt$ بَالطريقة التَّالية نضع $z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$ و كذلك $sint = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$ و كذلك $cost = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ فنتحصل علَى

$$\int_0^{2\pi} f(sint, cost)dt = \int_{\gamma(0,1)} f(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{dz}{iz} = 2i\pi \sum_{|a_j|<1} Res(f(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{1}{iz}, a_j)$$

حيث a_j يكون قطب لِلدَالة $\frac{f(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})}{iz}$ و يحقّق $|a_j| < 1$ لَا نعتبر الأقطَاب الأخرَى لأنّ دَليل دَائِرة الوحدة $\gamma(0,1)$ بَالنسبة لكلّ $|a_j| > 1$ يسَاوي صفر.

لتكن $P \in \mathbb{C}[X]$ و dP درَجة P و لتكن $Q \in \mathbb{C}[X]$ بحيث Q ليس لهَا أصفَار حقيقيّة

٢) لنفتض أنّ $dP + 1 \leq dQ$ و لتكن $\alpha > 0$ بيّن أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}dx$ متقَاربة إلّا أنّ $\frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}$ ليست عَادة قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ و أنّ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}dx = 2i\pi \sum_{Q(a_j)=0, \mathcal{I}m(a_j)>0} \mathcal{R}es(\frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)}, a_j)$$

أوجد قيمة $\int_0^{\infty} \frac{costdt}{t^2+1}$

٣) لنفترض أنّ $dP + 2 \leq dQ$ بيّن أنّ $\frac{P(x)Log|x|}{Q(x)}$ قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ و أوجد طريقة لحسَاب $\int_0^{\infty} \frac{P(x)Log|x|}{Q(x)}dx$ و $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

٤) بين أنّ $\int_0^{\infty} \frac{sinx}{x}dx$ متقَاربة و أنّ $\int_0^{\infty} \frac{sinx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ هل $\int_0^{\infty} \frac{cosx}{x}dx$ متقَاربة

تمرين

تأكد من تقَارب كلّ التكَاملَات الوَاردة في هذَا التّمرين

١) بيّن أنّه لكلّ $0 < a < 1$ فإنّ

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{sina\pi}$$

٢) بيّن أنّ $\int_0^{\infty} \frac{Logx}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$ و أنّه لكلّ $0 < a$ $\int_0^{\infty} \frac{cosax}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4}$

ليكن γ_n المستطيل المعرّف بقمَمه $n(1+i)+\frac{1}{2}, n(-1+i)-\frac{1}{2}, n(-1-i)-\frac{1}{2}, n(1-i)+\frac{1}{2}$

٣) بيّن أنّ لكلّ $a \not\in \mathbb{Z}$ فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi}{(z+a)^2} cot\pi z dz = 0$$

و إستنتج $\frac{\pi^2}{sin^2 a\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$

٤) بيّن أنّ لكلّ $a \not\in \mathbb{Z}$ فإنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\frac{\pi}{z^2-a^2}cot\pi z dz=0$$

و إستنتج أنّ $\pi cot\pi a=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و $a_1,...a_n$ هي جميع أصفَار f بحيث a_1 هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m_1 ، ... و a_n هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m_n و ليكن γ قوس مغلق من $\Omega\setminus\{a_1,..,a_n\}$ بحيث كلّ $z\not\ni\Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ فإنّه

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}m_jInd(\gamma,a_j)$$

برهَان

نلَاحظ أنّ $\frac{f'(z)}{f(z)}-\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{z-a_j}$ تحليليّة علَى كَامل Ω بمَا أنّه كلّ $z\notin\Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ فإنّه

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(\frac{f'(z)}{f(z)}-\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{z-a_j})dz=0$$

إذًا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}m_jInd(\gamma,a_j)$$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و a صفر لِلدَّالة f من الرتبة $m>0$ فإنّه توجد $\delta>0$ و $\epsilon>0$ بحيث لكلّ $\omega\in\mathbb{C}$ و $|\omega|<\delta$ الدَّالة $f-\omega$ لهَا m أصفَار بسيطة دَاخل $B(a,\epsilon)$

برهَان

بمَا أنّ أصفَار ff' معزولة فإنّه توجد $\epsilon>0$ بحيث a هو الصّفر الوحيد لِلدَالة ff' الموجود دَاخل $\overline{B(a,\epsilon)}$ الدَّالة $|f|$ تصل إلَى قيمتهَا الصّغرَى علَى المترَاص $\{z\in\mathbb{C},|z-a|=\epsilon\}$ لنسمّي هذه القيمة الصّغرَى $\inf_{\{z\in\mathbb{C},|z-a|=\epsilon\}}|f(z)|=\delta$ لنَا $\delta>0$ الدَّلة

$$k:w\to\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(a,\epsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz$$

من تعريفهَا تحليليّة علَى $B(0,\delta)$ وقيمهَا صحيحة لأنّهَا من النّظريّة السَّابقة تمثّل $k(w)$ عدَد أصفَار $z \to f(z) - w$ الموجود دَاخل $\overline{B(a,\epsilon)}$ إذًا k تكون ثَابتة علَى $B(0,\delta)$ ينتج أنّ $k(w) = k(0) = m$ كلّ أصفَار $z \to f(z) - w$ تكون بسيطة لأنّ $(f - w)' = f'$ ليس لهَا أصفَار دَاخل $B^*(a,\epsilon)$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و غير ثَابتة فإِنّ الدَّالة f تكون مفتوحة

برهَان

ليكن ω مفتوح من Ω و $\xi \in f(\omega)$ يوجد $a \in \omega$ بحيث $f(a) = \xi$ بمَا أنّ f غير ثَابتة لتكن $m \geq 1$ رتبة a كصفر لِلدَّالة $(f - \xi)$ من النّظريّة السَّابقة فإِنّه توجد $\delta > 0$ و $\epsilon > 0$ بحيث لكلّ $x \in \mathbb{C}$ و $|x| < \delta$ الدَّالة $f - \xi - x$ لهَا m أصفَار بسيطة دَاخل $B(a,\epsilon) \subset \omega$ إذًا $B(\xi,\delta) \subset f(\omega)$ و من ثمّ $f(\omega)$ مفتوح من $\mathbb{C}$

نتيجة

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و هي تبَاين فإِنّ $f : \Omega \to f(\Omega)$ يكون تقَابل بين نطَاقين و يكون معكوسه تحليليّ

برهَان

من النّظريّة السَّابقة يكون $f(\Omega)$ مفتوح إذًا $f : \Omega \to f(\Omega)$ يكون تقَابل تحليلي بين نطَاقين بمَا أنّ f مفتوحة فإِنّ معكوسه f^{-1} متّصلة و هو تحليليّ

تعريف

نقول أنّ f دَالة مرومرفيّة علَى مفتوحٍ $\Omega \subset \mathbb{C}$ إذَا و فقط إذَا وجدت مجموعة $G \subset \Omega$ بحيث f تكون تحليليّة علَى $\Omega \setminus G$ و كلّ نقطة من G تكون قطبًا لِلدَّالة f .

مثَال

علَى نطَاق Ω لتكن g دَالة تحليليّة ليست صفريّة و f دَالة تحليليّة فإِنّ $\frac{f}{g}$ تكون مرومرفيّة $(G = \{z \in \Omega, g(z) = 0\})$ و يمكن أن نبرهن أنّ كلّ دَالة مرومرفيّة تكتب علَى هذَا الشكل أي كسر لدَالتين تحليليّتين

نظرية

لتكن g دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و f دَالة مرومرفيّة علَى Ω و لتكن $z_1, .., z_n$ جميع أصفَار f و

$m_1,...,m_n$ هي بترتيب رتب هذه الأصفار و لتكن $p_1,..,p_s$ جميع أقطاب f و $k_1,...,k_s$ هي بترتيب درجاتها و لتكن γ قوس من $\Omega \setminus \{z_1,..,z_n,p_1,..p_s\}$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ فإنّه

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}m_j g(z_j)Ind(\gamma,z_j)-\sum_{j=1}^{s}k_j g(p_j)Ind(\gamma,p_j)$$

برهان

من تعريف الرّتب نلاحظ أنّ

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}-\sum_{j=1}^{n}m_j\frac{g(z_j)}{z-z_j}+\sum_{j=1}^{s}k_j\frac{g(p_j)}{z-p_j}$$

تكون تحليليّة علَى كَامل Ω بما أنّ γ قوس من $\Omega \setminus \{z_1,..,z_n,p_1,..p_s\}$ بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ فإنّه

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}-\sum_{j=1}^{n}m_j\frac{g(z_j)}{z-z_j}+\sum_{j=1}^{s}k_j\frac{g(p_j)}{z-p_j}dz=0$$

إذًا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}m_j g(z_j)Ind(\gamma,z_j)-\sum_{j=1}^{s}k_j g(p_j)Ind(\gamma,p_j)$$

ملَاحظة

إذًا وضعنَا $Z(f,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}m_j Ind(\gamma,z_j)$ و $P(f,\gamma)=\sum_{j=1}^{s}k_j Ind(\gamma,p_j)$ فعندمَا تكون $g=1$ نتحصّل علَى

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)$$

نظرية روشي $Rouche$

لتكن g و f دَالتين مرومرفيّتين علَى نطاق Ω و لتكن γ قوس من Ω بحيث كلّ $z \notin \Omega$ يحقّق $Ind(\gamma,z)=0,$ و γ^* لَا يحتوي علَى أيٍ من اقطاب و أصفَار f و g و يحقّق

$$\forall z\in\gamma^*, |f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$$

فإنّ

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

أي أنّ

$$Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)=Z(g,\gamma)-P(g,\gamma)$$

برهَان

عندنَا $|g(z)|$ $\forall z\in\gamma^*, |f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$ بقسمة طرفي المترَاجحة علَى $|g(z)|$ و هذَا مُمكن لأنّ $\forall z\in\gamma^*, g(z)\neq 0$ نتحصّل علَى $\forall z\in\gamma^*, |\frac{f(z)}{g(z)}+1|<\frac{|f(z)|}{|g(z)|}+1$ المترَاجحة تحتّم $\frac{f(z)}{g(z)}\notin[0,+\infty[$ إذًا لتكن $Log(z)=Log|z|+iargz,\ 0<argz<2\pi$ فإنّ $Log(\frac{f(z)}{g(z)})$ تكون تحليليّة بجوَار γ^* إذًا

$$0=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Log(\frac{f(z)}{g(z)}))'dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(\frac{f(z)}{g(z)})'}{\frac{f(z)}{g(z)}}dz$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}dz=Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)-(Z(g,\gamma)-P(g,\gamma))$$

تمرين

١) ليكن $P(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$ كثيرة حدود من درجة $n>1$ ·

لنفترض أنّه يوجد $k\in\{0,1,...,n\}$ بحيث $\sum_{i=0}^{n}|a_i|<2|a_k|$ ·

بين أنّ عدَد أصفَار P الموجودة خَارج قرص الوحدة محسوبة برتبهَا يسَاوي $n-k$ (إعتمد P و a_kz^k)· إستنتج قيمة $\int_{\gamma(0,1)}\frac{P'(z)}{P(z)}dz$

٢) ليكن $P(z)=z^9-2z^6+z^2-8z-2$ · أوجد

$$\int_{\gamma(0,1)}\frac{P'(z)}{P(z)}dz$$

تعريف

لكن $\mathcal{F}$ مجموعة من الدّوَال من فضَاء متري (E,d) إلَى فضَاء متري (E',d') نقول أنّ $\mathcal{F}$ متسَاوي الإتّصَال عند $x\in E$ إذَا و فقط إذَا تحقَّق

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta_x>0,\forall f\in\mathcal{F},\forall y\in E, d(x,y)\leq\delta\Rightarrow d'(f(x),f(y))\leq\epsilon$$

نقول أنّ $\mathcal{F}$ متسَاوي الإتّصَال علَى E إن كَان متسَاوي الإتّصَال عند كلّ $x\in E$

نقول أنّ $\mathcal{F}$ متظم تسَاوي الإتّصَال علَى E إذَا و فقط إذَا تحقَّق

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall f\in\mathcal{F},\forall x\in E,\forall y\in E, d(x,y)\leq\delta\Rightarrow d'(f(x),f(y))\leq\epsilon$$

أي أنّ δ لَا تعتمد علَى $x \in E$ و لَا علَى $f \in \mathcal{F}$ و إنّمَا تعتمد فقط علَى ϵ

نظريّة

ليكن K متراصّ من فضَاء متري (E,d) و لتكن $\mathcal{F}$ عَائِلة من دَوَال متسَاوية الإتّصَال علَى K فإنّ $\mathcal{F}$ تكون منتظمة تسَاوي الإتّصَال أي

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in K, \forall y \in K, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

أي أنّ δ لَا تعتمد علَى $x \in K$ و لَا علَى $f \in \mathcal{F}$ و إنّمَا تعتمد فقط علَى ϵ

برهَان

ليكن $\epsilon > 0$ ، من تسَاوي الإتّصَال بَالنّسبة إلَى $\frac{\epsilon}{2}$ لنَا

$$\forall x \in K, \exists \delta_x > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in E, d(x,y) \leq \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

الكرَات $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ ذَاتي مركز $x \in K$ و نصف قطرٍ $\frac{\delta_x}{2}$ تغطّي K نستخلص غطَاءً متهيًا $B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}), .., B(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2})$ و لنعرّف $\delta = \inf(\frac{\delta_{x_1}}{2}, .., \frac{\delta_{x_n}}{2})$

لتكن $x \in K$ توجد $1 \leq j \leq n$ بحيث $x \in B(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2})$ إذَا كَان $y \in E$ و $d(x,y) \leq \delta$ فإنّ $y \in B(x_j, \delta_{x_j})$ ، إذًا

$$\forall f \in \mathcal{F}, |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \leq \epsilon$$

نظرية $Ascoli - Arzelah$

ليكن (E,d) فضَاء متري منفصل و $f_n : E \to \mathbb{C}$ متتَابعة من دَوَال متسَاوية الإتّصَال وتحقّق $\forall x \in E, \exists M_x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M_x$ فإنّه $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ لهَا متتَابعة جزئيّة تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من E

برهَان

لتكن (w_n) متتَابعة كثيفة في (E,d) ، بمَا أنّ $(f_n(w_1))$ محدودة فإنّ لهَا متتَابعة جزئيّة متقَاربة نسمّيهَا $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$

نَنطلق من $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ بمَا أنّ $(f_{n,1}(w_2))_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة فإنّ لهَا متتَابعة جزئيّة متقَاربة نسمّيهَا $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ و هكذَا دوَاليك لكلّ $k \in \mathbb{N}$ نبني متتَابعة $(f_{n,k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ جزئيّة من $(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ إذًا هي جزئيّة من جميع سَابقَاتهَا و $(f_{n,k+1}(w_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ متقَاربة. نلَاحظ أنّ المتَتَابعة القطريّة $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقَارب عند كلّ w_k ذلك أنّ $(f_{n,n})_{n>k}$ هي متتَابعة جزئيّة من $(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.

ليكن K متراصّ من فضاء متري (E,d) و ليكن $\epsilon > 0$ ، من النّظريّة السّابقة

$$\exists\delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in K, \forall y \in E, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

الكرَات $(B(w_j,\delta))_{j\in\mathbb{N}}$ تغطّي K نستخلص غطَاءً متهيًا $B(w_1,\delta),..,B(w_N,\delta)$ لكلّ $j \leq N$ توجد $N_j \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq N_j, m \geq N_j \Rightarrow |f_{n,n}(w_j) - f_{m,m}(w_j)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ ليكن $M = \sup(N_1,..,N_N$ و $x \in K$ توجد $j \leq N$ بحيث $x \in B(w_j,\delta)$ لنَا

$$n \geq M, m \geq M \Rightarrow |f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(w_j)| + |f_{n,n}(w_j) - f_{m,m}(w_j)| + |f_{m,m}(w_j) - f_{m,m}(x)| \leq \epsilon$$

نلَاحظ $(f_{n,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ كوشيّة إذًا هي متقَاربة من دَالة f تحقّق

$$\forall\epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall x \in K, |f_{n,n}(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq \epsilon$$

إذًا $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ تتقَارب بإنتظَام علَى K من f .

نظرية $Montel$

ليكن Ω مفتوحًا من $\mathbb{C}$ و لتكن $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ متتَابعة من دَوَال تحليليّة محدودة محلّيًا فإنّه $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ لهَا متتَابعة جزئيّة تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من Ω من دَالة تحليليّة f

برهَان

ليكن $z \in \Omega$ من المعطيَات توجد $r > 0$ بحيث $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$ و توجد $M > 0$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N}, \forall w \in \overline{B(z,r)},\ |f_n(w)| \leq M$ لكلّ $w \in \overline{B(z,\frac{r}{2})}$ لنَا $M(f_n,w,\frac{r}{2}) \leq M$ إذًا $|f_n'(w)| \leq \frac{2M}{r}$ و من ثمّ فإنّ $|f_n(z) - f_n(w)| \leq \frac{2M}{r}|z-w|$ هذه المترَاجحة الأخيرة تبيّن أنّ المتَتابعة $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ متسَاوية الإتّصَال من نظريّة $Ascoli - Arzelah$ $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ لهَا متتَابعة جزئيّة تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من Ω من دَالة تحليليّة f

نظرية $Vitali$

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و لتكن $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ متتَابعة من دَوَال تحليليّة محدودة محلّيًا تتقَارب عند كلّ نقطة من مجموعة $A \subset \Omega$ و A لهَا نقطة ترَاكم دَاخل Ω فإنّه $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من Ω من دَالة تحليليّة f

برهَان

من النّظريّة السَّابقة $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لهَا متتَابعة جزئيّة تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من Ω من دَالة تحليليّة f لو كَانت $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ لَا تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متراصٍ من Ω من f لوجد متراصّ K من Ω و $\epsilon > 0$ و متتَابعة جزئيّة $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ تحقّق $\sup_{z\in K} |f_{n_k}(z) - f(z)| \geq \epsilon$

من النّظريّة السَّابقة $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ لهَا متَتَابعة جزئيّة تَتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متراَصٍ من Ω من دَالة تحليليّة g

لنَا $f=g$ علَى A بمَا أنّ A لهَا نقطة ترَاكم دَاخل Ω فإنّ $f=g$ علَى Ω و هذَا ينَاقض $\sup_{z\in K}|f_{n_k}(z)-f(z)|\geq\epsilon$

تمرين

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و f_n متَتَابعة من الدّوَال التّحليليّة علَى Ω تَتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متراَص من Ω إِلَى دَالة f غير ثَابتة

١) بيّن كمَا جَاء في الدّرس أنّ f تحليليّة علَى Ω

٢) لنفترض أنّ $z_0\in\Omega$ هو صفر لِلدَالة f من الرتبة $m\in\mathbb{N}^*$

بيّن أنّه يوجد $r>0$ ، بحيث لكلّ $0<t<r$ ، يوجد $N_t\in\mathbb{N}$ يحقّق $\forall n>N_t$ فإنّ f_n لهَا بَالضبط m صفر (محسوبة برتبهَا) في القرص $D(z_0,t)$

٣) لنفترض أنّ f_n تبَاينَات علَى Ω

ا) بيّن أنّ f تبَاين علَى Ω و المشتقّة f' ليس لهَا أصفَار علَى Ω

ب) ليكن $a\in\Omega$ ، بيّن أنّه توجد متَتَابعة (a_n) من Ω تحقّق $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ و

$$\exists N\in\mathbb{N}, n>N\Rightarrow f_n(a_n)=f(a)$$

التمرين

لتكن f دَالة تحليليّة علَى $\mathbb{C}$ غير ثَابتة.

١) بيّن أنّ مجموعة النّقَاط $a\in\mathbb{C}$ بحيث $f+a$ لهَاصفر من رتبة أكبر أو يسَاوي 2 فَى $D(0,1)$ هي مجموعة متهية .

٢) لنفترض أنّ $\lim_{|z|\to+\infty}|f(z)|=+\infty$.

اَ) بيّن أنّ 0 هو قطب لِلدَالة $f(\frac{1}{z})$ و أستنتج أنّ $f\in\mathbb{C}[X]$.

ب) بيّن وجود متراَص $K\subset\mathbb{C}$ يحقّق $\forall a\in D(0,1)$ أصفَار $P+a$ تكون فَى K .

٣) ليكن z_0 صفر لِلدَالة f من رتبة $k>0$.

اَ) بين وجود $r>0$ بحيث z_0 هو الصفر الوحيد لِلدَالة ff' الموجود دَاخل $\bar{D}(z_0,r)$.

ب) ليكن $t=inf_{|z-z_0|=r}|f(z)|$ بين $\forall a\in D^*(0,t)$ الدَّالة $f+a$ لهَا بَالضبط k صفر بسيط فَى $\bar{D}(z_0,r)$.

٤) لتكن g دَالة تحليليّة علَى $\mathbb{C}$ ليس لهَا أصفَار.

أَ) لنفترض وجود $a \in D(0,1)$ بحيث $f + ag$ لهَا صفر ذو رتبة 2 فَى $D(0,1)$. بيّن وجود $\epsilon > 0$ بحيث $\forall a' \in \mathbb{C}$ تحقّق $0 < |a - a'| < \epsilon$ الدَالة $f + a'g$ ليس لهَا أصفَار غير بسيطة فَى $D(0,1)$.

ب) بيّن أنّ المجموعة النّقَاط $a \in \bar{D}(0,1)$ التي تحقّق $f + ag$ لهَا صفر غير بسيط فَى $D(0,1)$ هي مجموعة منتهية .