جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات   صفر ١٤٢٨

أَلتّحليل المركّب ٢   درَاسَات عليَا

رمز المقرّ ريض 644   عدَد الوحدَات 3   التّقويم الأعمَال الفصليّة من 50 النّهَائي من 50

المحتوَى

نظريّة ريمَان الضرب اللّامتهي و تحليلَات ويرسترَاس. نظريّة رونج. و نظريّة مِتَّاق لفلر التّمدُد التّحليليّ. أَلدّوَال التّوافقيّة و تحت التّوافقيّة مسألة ديريكلي الدّوَال الكليّة. معَادلة ينسين نظريّة بيكَارد

Complex Analysis (I)

Cauchy-Riemann equations and analytic functions. Cauchy's theorem and consequences. Singularities and expansion theorems. Maximum modules principle. Residue theorem and its applications. Compactness and convergence in spaces of analytic and meromorphic functions. Normal families.

Complex Analysis (II)

The Riemann mapping theorem. Infinite products and the Weierstrass factorization Runge's theorem and Mittag-Leffler's theorem. Analytic continuation and Riemann surfaces. Harmonic functions, subharmonic and superharmonic functions, the Dirichlet problem. Entire function, Jensen's formula, Hadamard 's theorem. The Range of entire functions, Bloch's, Shotcky's, and Picard's thoerems

References

1) John B. Conway :" Functions of One Complex Variable"

2) Lars V. Ahlfors :" Complex Analysis

3) E. Hille : "Analytic Function Theory"(2 vols)

4) C. Caratheodory : "Theory of a Function of a Complex Variable" (2vols)

5) S. Sacks and A. Zygmund : "Analytic Functions"

هذَا المقرّر مبني علَى مقرّر تحليل المركّب ١ فنحَافظ علَى نفس الرّموز و نستعمل النظريَات التي برهنَاهَا في الفصل الأوّل.

أَلمطلُوب من الطَالب هومُحتوَى المُحَاضرَات المختصر في هذه المذكرة و هنَاك درجَات تحفيزيّة لِلإستفسَارَات الجيّدة و محَاولَات حلّ التّمَارين الجيّدة من كتّاب كنوَاي. تفَاصيل بعض البرَاهين و بعض الأمثلة تركت لِلمنَاقشة في المحَاضرة فلَابدّ من الإستعَانة بَالدفتر

نظريّة ريمَان

تعريف

نقول أنّ النطَاق $\Omega \subset \mathbb{C}$ نجم بَالنسبة لأحد نقَاطه $a \in \Omega$ إذَا و فقط إذَا لكلّ $x \in \Omega$ فإنّ كَامل القطعة $[a,x]$ تكون محتوَاة في Ω

$$\forall x \in \Omega, \quad [a,x] \subset \Omega$$

و نقول أنّ النطَاق $\Omega \subset \mathbb{C}$ محدّب إذَا و فقط إذَا كَان نجم بِالنسبة لجميع نقَاطه

أمثلة

١) قرص الوحدة $D(0,1)$ محدّب في حين أنّ $\mathbb{C}^*$ ليس بنجم أمَّا $\mathbb{C}^* \backslash]-\infty, 0]$ نجم بَالنسبة لِلنقطة -1 .

تعريف

ليكن γ_0 و γ_1 قوسين مغلقين في نطَاق Ω معرّفين علَى $[0,1]$ نقول أنّهمَا متحَاولَان (*Homotopic*) في Ω إن وجدت دَالة متّصلة $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ تحقّق

أ) $\forall s \in [0,1], h(s,0) = \gamma_0(s)$

ب) $\forall s \in [0,1], h(s,1) = \gamma_1(s)$

ج) $\forall t \in [0,1], h(0,t) = h(1,t)$

أمثلة

١) في نطَاقٍ نجم بِالنسبة لأحد نقَاطه a يكون كلّ قوس مغلق γ متحَاول مع القوس الثَّابت a يكفي أن نأخذ $h(s,t) = t\gamma(s) + (1-t)a$

٢) اَلتّحَاول في Ω هي علَاقة تكَافُؤ علَى الأقوَاس المغلقة

٣) إذَا كَان γ_0 و γ_1 قوسين مغلقين متحَاولين في نطَاق Ω فإنَّنَا نكتب $\gamma_0 \sim \gamma_1$ و إذَا كَان γ متحَاول مع قوس ثَابت $s \to a$ فإنَّنَا نقول أنّ γ متحَاول مع الصفر و نكتب $\gamma \sim 0$

نظرية

ليكن γ_0 و γ_1 قوسين مغلقين متحَاولين في نطَاق Ω و f دَالة تحليليّة علَى Ω فإنّ

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

برهَان

توجد دَالة متّصلة $h:[0,1]\times[0,1]\rightarrow\Omega$ تحقّق

$\forall s\in[0,1], h(s,0)=\gamma_0(s)$ و $\forall s\in[0,1], h(s,1)=\gamma_1(s)$ و $\forall t\in[0,1], h(0,t)=h(1,t)$

بمَا أنّ $[0,1]\times[0,1]$ متَرَاص و h متّصلة فإنّ صورة h تكون متَرَاص K من Ω لتكن $r=d(K,\Omega^c)$ نلَاحظ أنّ $r>0$ ۰ كذلك h متّصلة علَى المتَرَاص $[0,1]\times[0,1]$ إِذًا هي منتظمة الإِتّصل إِذًا توجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$\sup(|x-x'|,|y-y'|)\leq\frac{1}{n}\Rightarrow||h(x,y)-h(x',y')||\leq\frac{1}{2r}$$

لنعرف أقوَاسًا بينيّة مكوّنة من خطوط منكسرة $\Gamma_k=[h(0,\frac{k}{n}),h(\frac{1}{n},\frac{k}{n})]..[h(\frac{n-1}{n},\frac{k}{n}),h(1,\frac{k}{n})]$ لنبرهن أنّ

$$\int_{\gamma_0}f(z)dz=\int_{\Gamma_1}f(z)dz=..=\int_{\Gamma_k}f(z)dz=\int_{\Gamma_{k+1}}f(z)dz..=\int_{\gamma_1}f(z)dz$$

من إِحتيطَاتنَا الربَاعي $[h(\frac{s}{n},\frac{k}{n}),h(\frac{s+1}{n},\frac{k}{n}),h(\frac{s}{n},\frac{k+1}{n}),h(\frac{s+1}{n},\frac{k+1}{n})]$ موجود كلّه في قرص من Ω مركزه $h(\frac{s}{n},\frac{k}{n})$ و نصف قطره r ليكن $I_{s,k}$ تكَامل f علَى هذَا الربَاعي فإِنّ $I_{s,k}=0$ لأَنّ f لهَا أصل علَى القرص۰ إِذًا $\sum_{s=0}^{n-1}I_{s,k}=0$ نستنج علَى رسم بسيط أنّ $\sum_{s=0}^{n-1}I_{s,k}=\int_{\Gamma_k}f(z)dz-\int_{\Gamma_{k+1}}f(z)dz$ إِذًا

$$\int_{\Gamma_k}f(z)dz=\int_{\Gamma_{k+1}}f(z)dz$$

ولنفس السّبَب نرَى أنّ

$$\int_{\gamma_0}f(z)dz=\int_{\Gamma_1}f(z)dz=..=\int_{\Gamma_k}f(z)dz=\int_{\Gamma_{k+1}}f(z)dz..=\int_{\gamma_1}f(z)dz$$

نظرية

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و $a_1,...a_n$ هي جميع أصفَار f بحيث a_1 هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m_1 ، ... و a_n هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m_n و ليكن $\gamma\sim 0$ قوس مغلق من $\Omega\setminus\{a_1,..,a_n\}$ فإِنّ

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Sigma_{j=1}^{n}m_jInd(\gamma,a_j)$$

برهَان

نلَاحظ أنّ $\frac{f'(z)}{f(z)}-\Sigma_{j=1}^{n}\frac{m_j}{z-a_j}$ تحليليّة علَى كَامل Ω بمَا أنّ $\gamma\sim 0$ فإِنّ

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\frac{f'(z)}{f(z)} - \Sigma_{j=1}^n \frac{m_j}{z-a_j})dz = 0$$

إذًا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma_{j=1}^n m_j Ind(\gamma, a_j)$$

تعريف

نقول أنّ f دَالة مرومرفيّة علَى مفتوحٍ $\Omega \subset \mathbb{C}$ إذًا و فقط إذَا وجدت مجموعة $G \subset \Omega$ بحيث f تكون تحليليّة علَى $\Omega \setminus G$ و كلّ نقطة من G تكون قطبًا لِلدَّالة f .

مثَال

علَى نطَاق Ω لتكن g دَالة تحليليّة ليست صفريّة و f دَالة تحليليّة فإِنّ $\frac{f}{g}$ تكون مرومرفيّة $(G = \{z \in \Omega, g(z) = 0\})$ و يمكن أن نبرهن أنّ كلّ دَالة مرومرفيّة تكتب علَى هذَا الشكل أي كسر لدَالتين تحليليّتين

نظرية

لتكن g دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω و f دَالة مرومرفيّة علَى Ω و لتكن $z_1, .., z_n$ جميع أصفَار f و $m_1, ..., m_n$ هي بتّرتيب رتب هذه الأصفَار و لتكن $p_1, .., p_s$ جميع أقطَاب f و $k_1, ..., k_s$ هي بتّرتيب درجَاتها و لتكن γ قوس من $\Omega \setminus \{z_1, .., z_n, p_1, ..p_s\}$ متحَاولة مع الصّفر فإِنّ

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma_{j=1}^n m_j g(z_j) Ind(\gamma, z_j) - \Sigma_{j=1}^s k_j g(p_j) Ind(\gamma, p_j)$$

برهَان

من تعريف الرّتب نلَاحظ أنّ

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} - \Sigma_{j=1}^n m_j \frac{g(z_j)}{z-z_j} + \Sigma_{j=1}^s k_j \frac{g(p_j)}{z-p_j}$$

تكون تحليليّة علَى كَامل Ω بما أنّ γ قوس من $\Omega \setminus \{z_1, .., z_n, p_1, ..p_s\}$ متحَاولة مع الصّفر فإِنّ

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} - \Sigma_{j=1}^n m_j \frac{g(z_j)}{z-z_j} + \Sigma_{j=1}^s k_j \frac{g(p_j)}{z-p_j} dz = 0$$

إذًا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma_{j=1}^n m_j g(z_j) Ind(\gamma, z_j) - \Sigma_{j=1}^s k_j g(p_j) Ind(\gamma, p_j)$$

ملَاحظة

إِذَا وضعنَا $Z(f,\gamma)=\Sigma_{j=1}^{n} m_j Ind(\gamma,z_j)$ و $P(f,\gamma)=\Sigma_{j=1}^{s} k_j Ind(\gamma,p_j)$ فعندمَا تكون $g=1$ نتحصّل علَى

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)$$

نظرية روشي $Rouche$

لتكن g و f دَالتين مرومرفيّتين علَى نطَاق Ω و لتكن γ قوس من Ω متحَاولة مع الصّفر بحيث γ^* لَا يحتوي علَى أيٍ من اقطَاب و أصفَار f و g و يحقّق

$$\forall z\in\gamma^*, |f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$$

فإنّ

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

أي أنّ

$$Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)=Z(g,\gamma)-P(g,\gamma)$$

برهَان

عندنَا $\forall z\in\gamma^*, |f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$ بقسمة طرفي المترَاجحة علَى $|g(z)|$ و هذَا مُمكن لأنّ المترَاجحة تحتّم $\forall z\in\gamma^*, g(z)\neq 0$ نتحصّل علَى $\forall z\in\gamma^*, |\frac{f(z)}{g(z)}+1|<\frac{|f(z)|}{|g(z)|}+1$ إِذًا $\frac{f(z)}{g(z)}\notin [0,+\infty[$ لتكن $Log(z)=Log|z|+iargz,\ 0<argz<2\pi$ فإنّ $Log(\frac{f(z)}{g(z)})$ تكون تحليليّة بجوَار γ^* إِذًا

$$0=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (Log(\frac{f(z)}{g(z)}))'dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(\frac{f(z)}{g(z)})'}{\frac{f(z)}{g(z)}}dz$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}dz=Z(f,\gamma)-P(f,\gamma)-(Z(g,\gamma)-P(g,\gamma))$$

تعريف

نقول أنّ النطَاق $\Omega\subset\mathbb{C}$ بسيط الترَابط إِذَا كَان فيه كلّ قوس γ مغلق متحَاول مع الصفر

أمثلة

١) كلّ نطَاقٍ نجم بَالنسبة لأحد نقَاطه يكون بسيط التّرَابط

٢) إِذَا كَانت $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ دَالة متّصلة فإِنّ $\mathbb{C}\setminus\{x+if(x), x\in[0,\infty[\}$ يكون بسيط الترَابط

نظرية

ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ بحيث $\Omega \neq \mathbb{C}$ فإنّ الجمل التّالية تكون متكَافِئة

١) اَلنّطاق Ω بسيط التّرَابط

٢) لكلّ قوسٍ مغلقٍ γ من Ω أملس قطعًا و لكلّ $z \notin \Omega$ دَليل γ بَالنّسبة لِلعنصر z يسَاوي صفر $I_\gamma(z) = 0$.

٣) لكلّ قوسٍ مغلقٍ γ من Ω أملس قطعًا و لكلّ دَالة تحليليّة f علَى Ω لنَا

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

٤) لكلّ دَالة تحليليّة f علَى Ω ليس لهَا أصفَار توجد دَالة تحليليّة h علَى Ω تحقّق

$$f = e^h$$

٥) لكلّ دَالة تحليليّة f علَى Ω ليس لهَا أصفَار توجد دَالة تحليليّة g علَى Ω تحقّق

$$f = g^2$$

٦) يوجد تقَابل تحليلي $f : \Omega \to D(0,1)$

برهَان

$1) \Rightarrow 2)$

لكلّ قوسٍ مغلقٍ γ من Ω أملس قطعًا و لكلّ $z \notin \Omega$ دَليل γ بَالنّسبة لِلعنصر z يسَاوي صفر لأنّ γ متحَاول مع نقطة A إذًا $2i\pi I_\gamma(z) = \int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_A \frac{dw}{w-z} = 0$ لأنّنَا نجد نفس القيمة إذَا كَاملنَا دَالة تحليليّة علَى قوسين متحَاولين

$2) \Rightarrow 3)$

من نظريّة كوشي

$3) \Rightarrow 4)$

الدَّالة $\frac{f'}{f}$ لهَا أصل h_1 علَى Ω إذًا $(fe^{-h_1})' = 0$ إذًا $\exists c \in \mathbb{C}, fe^{-h_1} = e^c$ إذًا

$$f = e^{-h_1+c}$$

$4) \Rightarrow 5)$

الدَّالة $g = e^{\frac{h}{2}}$ تفي بَالغرض

$5) \Rightarrow 6)$ لنثبّت $a \in \Omega$ و ليكن F مجموعة الدّوَال التّحليليّة $f : \Omega \to D(0,1)$ بحيث f تكون تبَاين و $f(a) = 0$ و $f'(a) > 0$ لنبين أوّلًا أنّ F غير فَارغة ليكن $b \notin \Omega$ بمَا أنّ الدَّالة $z - b$ ليس لهَا أصفَار في Ω فبإعتمَاد 5 توجد دَالة تحليليّة g علَى Ω بحيث

$$\forall z \in \Omega, g^2(z) = z - b$$

بمَا أنّ g غير ثَابتة إذًا هي مفتوحة علَى Ω و من ثمّ يوجد $r > 0$ بحيث $D(g(a), r) \subset g(\Omega)$ لنبين $\forall z \in \Omega, |g(a) + g(z)| \geq r$ و إلّا فيوجد $z_1 \in \Omega, -g(z_1) \in D(g(a), r)$ إذًا يوجد $z \in \Omega, g(z) = -g(z_1)$ إذًا $g^2(z) = g^2(z_1) = z_1 - b = z - b$ أي $z_1 = z$ إذًا $g(z) = -g(z_1) = 0$ و هذَا مستحيل

الدَّالة $h(z) = \frac{r}{g(a)+g(z)}$ هي تبَاين من Ω إلَى $D(0,1)$ إذًا $\phi(z) = \frac{h-h(a)}{1-\overline{h(a)}h}$ هي تبَاين من Ω إلَى $D(0,1)$ و تحقّق $\phi(a) = 0$ و من ثمّ $\frac{|\phi'(a)|}{\phi'(a)}\phi \in F$

لتكن (f_n) متتَابعة من F بحيث

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(a) = sup\{f'(a); f \in F\}$$

بمَا أنّ (f_n) محدودة فلهَا متتَابعة جزئيّة متقَاربة بإنتظَام علَى كلّ مترَاصّ من Ω من دَالة f بإعتمَاد نظريّة سَابقة فإمّا أن تكون f ثَابتة أو هي تبَاين بمَا أنّ $f'(a) \neq 0$ فإنّ $f \in F$ لنبيّن أنّ f شَاملة و إلّا يوجد $w \in D(0,1)$ بحيث $\forall z \in \Omega; f(z) \neq w$ إذًا توجد دَالة تحليليّة θ علَى Ω بحيث $\theta^2 = \frac{f-w}{1-\overline{w}f}$ ، إذًا $2\theta'(a)\theta(a) = f'(a)(1-|w|^2)$ لنعتمد $\psi = \frac{\theta-\theta(a)}{1-\overline{\theta(a)}\theta}$ الدَّالة $\psi : \Omega \to D(0,1)$ هي تبَاين لأنّهَا تحصيل لتبَاين مع تنَاظر و تحقّق $\psi(a) = 0$ و لنَا

$$|\psi'(a)| = |\frac{\theta'(a)}{1-|\theta(a)|^2}| = |f'(a)\frac{1+|w|}{2\sqrt{|w|}}| > |f'(a)|,$$

إذًا الدَّالة $\frac{|\psi'(a)|}{\psi'(a)}\psi$ تنتمَى إلَى F و تنَاقض تعريف f

$6) \Rightarrow 1)$

بمَا أنّ $D(0,1)$ محدّب فإنّ كلّ قوسٍ مغلقٍ γ من Ω أملس قطعًا يكون متحَاول مع نقطة A إذًا بإستعمَال التقَابل تحليلي $f^{-1} : D(0,1) \to \Omega$ تحوّل هذه الخَاصيّة إلَى Ω

نظريّة تمهيديّة شوَارتز $Schwarz's\ lemma$

لتكن $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ دَالة تحليلي تحقّق $f(0) = 0$ و $\forall z \in D(0,1), |f(z)| \leq 1$ فإنّ $\forall z \in D(0,1), |f(z)| \leq |z|$ و $|f'(0)| \leq 1$ و إن وجد $z_0 \neq 0$ بحيث $|f(z_0)| = |z_0|$ أو كَانت $|f'(0)| = 1$ فإنّه توجد $\theta \in \mathbb{R}$ بحيث $\forall z \in D(0,1), f(z) = e^{i\theta}z$

برهَان

الدَّالة

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & , \quad z \neq 0 \\ f'(0) & , \quad z = 0 \end{cases}$$

تكون تحليلية علَى $D(0,1)\setminus\{(0,0)\}$ و متّصلة علَى كَامل $D(0,1)$ إذًا هي تحليلية علَى كَامل $D(0,1)$
. إذَا كَان $0<r<1$ و $|z|=r$ فإنّ $|g(z)|\le\frac{1}{r}$ من مبدَإ القيمة العظمَى فإنّ
$\forall z\in D(0,r),|g(z)|\le\frac{1}{r}$ بترك $r\to 1$ نتحصّل علَى $\forall z\in D(0,1),|g(z)|\le 1$ إن وجد $z_0\neq 0$
بحيث $|z_0|=|f(z_0)|$ أو كَانت $|f'(0)|=1$ فإنّ g تصل إلَى قيمتهَا العظمَى دَاخل $D(0,1)$ عندهَا
تكون g ثَابتة قيمتهَا المطلقة 1 إذًا توجد $\theta\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall z\in D(0,1),f(z)=e^{i\theta}z$

نظريّة

لتكن $f:D(0,1)\to D(0,1)$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد $\theta\in\mathbb{R}$ و يوجد $a\in D(0,1)$ وحيد يحقّق

$$\forall z\in D(0,1),\ \ f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

برهَان

لتكن $\forall a\in D(0,1),\ \ \varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ فإنّه $\forall a\in D(0,1)$ تكون φ_a تحليليّة بجوَار $\overline{D(0,1)}$ و تحقّق

$$\forall\theta\in\mathbb{R},|\varphi_a(e^{i\theta})|=|\frac{e^{i\theta}-a}{1-\overline{a}e^{i\theta}}|=|\frac{e^{i\theta}-a}{e^{-i\theta}-\overline{a}}|=1$$

من مبدَإ القيمة العظمَى $\varphi_a:D(0,1)\to D(0,1)$ تكون تحليلية و بمَا أنّ

$$\varphi_a\circ\varphi_{-a}(z)=z=\varphi_{-a}\circ\varphi_a(z)$$

فإنّ φ_a تكون تقَابل تحليلي بجوَار $\overline{D(0,1)}$ يحقّق

$$\varphi_a(\partial D(0,1))=\varphi_a(\partial D(0,1))$$

لتكن $f^{-1}:D(0,1)\to D(0,1)$ تقَابل تحليلي و $a=f^{-1}(0)$ عندهَا $h=\varphi_a\circ f^{-1}$ يكون تقَابل تحليلي علَى $D(0,1)$ يحقّق $h(0)=0$ لتكن g هي معكوس h لنَا $h\circ g(z)=z$ من قَاعدة السلسلة $h'(0).g'(0)=1$ إذًا $h'(0)\ge 1$ أو $g'(0)\ge 1$ من تمهيديّة شوَارتز توجد $\theta\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall z\in D(0,1),h(z)=e^{i\theta}z$ أو $\forall z\in D(0,1),g(z)=e^{i\theta}z$ في كلَا الحَالتين توجد $\theta\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall z\in D(0,1),\varphi_a\circ f^{-1}(z)=e^{i\theta}z$ عندهَا نضع $z=f(w)$ فيصبح $f(w)=e^{-i\theta}\varphi_a(w)$ إذًا

$$\forall z\in D(0,1),\ \ f(z)=e^{-i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

نظريّة ريمَان *Riemann mapping Theorem*

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ بسيط التّرَابط بحيث $\Omega\neq\mathbb{C}$ و $a\in\Omega$ فإنّه يوجد تقَابل تحليلي وحيدة $f:\Omega\to D(0,1)$ يحقّق $f(a)=0$ و $f'(a)>0$

برهَان

نعرف أنّه يوجد تقَابل تحليلي $g:\Omega \to D(0,1)$ يحقّق $g(a)=0$ لتكن $f=\frac{\overline{g'(a)}}{|g'(a)|}g$

فإنّ $f:\Omega \to D(0,1)$ تقَابل تحليلي يحقّق $f(a)=0$ و $f'(a)>0$

لنفترض أنّ $h:\Omega \to D(0,1)$ تقَابل تحليلي يحقّق $h(a)=0$ و $h'(a)>0$ عندهَا يكون $f\circ h^{-1}:D(0,1)\to D(0,1)$ تقَابل تحليلي يحقّق $f\circ h^{-1}(0)=0$ و $(f\circ h^{-1})'(0)>0$ إذًا $\forall z\in D(0,1), f\circ h^{-1}(z)=z$ أي $f=h$

تطبيق

١) ليكن $P^+=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2=\mathbb{C}, y>0\}$ و $f:P^+\to D(0,1)$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد $\theta\in\mathbb{R}$ و يوجد $a\in P^+$ وحيد يحقّق

$$\forall z\in P^+,\ \ f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

٢) ليكن $P^+=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2=\mathbb{C}, y>0\}$ و $f:P^+\to P^+$ تقَابل تحليلي فإنّه توجد أعدَاد حقيقيّة a,b,c,d تحقّق $ad-bc=1$ بحيث

$$\forall z\in P^+,\ \ f(z)=\frac{az-b}{cz-d}$$

صيغة ينسَان *Jensen Formula*

لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω يحتوي علَى $\overline{B}(0,r)$ لنفترض أنّ 0 هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m و أنّ $\{a_1,..,a_n\}$ هي أصفَار f الموجودة في $\overline{B}(0,r)\setminus\{0\}$ مكرّرة حسب رتبهَا فإنّ

$$log|\frac{f^{(m)}(0)}{m!}|+mlogr=\sum_{k=1}^{n}log|\frac{a_k}{r}|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|f(re^{i\theta}|d\theta$$

برهَان

١) لنفترض أنّ $m=0$ أي $f(0)\neq 0$ ، ليكن $P(z)=(z-a_1)..(z-a_n)$ الدَّالة $g=\frac{f}{P}$ تكون تحليليّة علَى النّطَاق Ω و ليس لهَا أصفَار بجوَار $\overline{B}(0,r)$ إذًا توجد h تحليليّة بجوَار $\overline{B}(0,r)$ بحيث $e^h=g$ ، أي $log|g|=\mathcal{R}eh$ من متبَاينَات كوشي لنَا

$$(*)\qquad log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|g(re^{i\theta}|d\theta$$

أي $log|f(0)|-log|a_1|..|a_n|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|f(re^{i\theta}|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|P(re^{i\theta}|d\theta$

لنَا $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|P(re^{i\theta}|d\theta=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|(re^{i\theta}-a_k|d\theta$

و بمَا أنّ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|(re^{i\theta}-a_k|d\theta=logr+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|1-\frac{|a_k|}{r}e^{i\theta}|d\theta=logr$

ذلك أنّه إِذَا طبّقنَا $(*)$ حيث $g(z)=1-z, r'=\frac{|a_k|}{r}<1$ نتحصّل علَى $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|1-\frac{|a_k|}{r}e^{i\theta}|d\theta=0$ و كذلك من التّقَارب المطّرد $\int_0^{2\pi} log|1-e^{i\theta}|d\theta=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} log|1+\frac{1}{n}-e^{i\theta}|d\theta=0$

إِذًا

$$log|f(0)|+mlogr=\sum_{k=1}^{n} log|\frac{a_k}{r}|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(re^{i\theta}|d\theta$$

٢) أمَّا إِذَا كَان 0 هو صفر لِلدَّالة f من الرتبة m فإِنّ

$$k(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z^m} & , \quad z\neq 0\\ \frac{f^{(m)}(0)}{m!} & , \quad z=0\end{cases}$$

تكون تحليليّة و تحقِّق

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|k(re^{i\theta}|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(re^{i\theta}|d\theta-m\log r$$

نطبّق المرحلة الأولَى علَى k ينتج

$$log|\frac{f^{(m)}(0)}{m!}|+mlogr=\sum_{k=1}^{n} log|\frac{a_k}{r}|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(re^{i\theta}|d\theta$$

الجدَاء اللَّانهَائِي

تعريف

لتكن (a_n) متتَابعة من $\mathbb{C}$ نقول أنّ الجدَاء اللَّانهَائِي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقَارب من P إِذَا و فقط إِذَا كَانت المتَتَابعة $(\prod_{n=1}^{p} a_n)_{p\in\mathbb{N}}$ متَقَاربة من P عندهَا نكتب $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P$

أمثلة

١) إِذَا كَانت $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ فإِنّ $(\prod_{n=1}^{p} a_n) = p+1$ إِذًا هذَا الجدَاء اللَّانهَائِي لَا يتقَارب

٢) إِذَا كَانت $a_1 = 1$ و $\forall n > 1, a_n = 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ فإِنّ $(\prod_{n=1}^{p} a_n) = \dfrac{p+1}{2p}$ إِذًا هذَا الجدَاء اللَّانهَائِي يتقَارب من $\frac{1}{2}$

ملَاحظة

إِذَا كَان $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \neq 0$ فإِنّ $\lim_{p\to\infty} a_p = \lim_{p\to\infty} \frac{\prod_{n=1}^{p} a_n}{\prod_{n=1}^{p-1} a_n} = 1$ المثَال الأوّل يبيّن أنّ هذَا الشرط ضروريّ و لكن غير كَاف

نظريّة

ليكن log الّوغَارتم الأسَاسي المعرف علَى $\mathbb{C}^*$ حسب

$$log(z) = log|z| + iarg(z); -\pi < arg(z) \leq \pi$$

و a_n متتَابعة من $\mathbb{C}$ فإِنّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P \neq 0$ إِن كَانت $\sum Log(a_n)$ متقَاربة

برهَان

لنفترض أنّ $\sum Log(a_n)$ متقَاربة من S أي $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} Log(a_n) = S$ إِذًا

$$\lim_{p\to\infty} e^{\sum_{n=1}^{p} Log(a_n)} = \lim_{p\to\infty} \prod_{n=1}^{p} a_n = e^S$$

أمَّا الإِتّجَاه الثَّاني فإِذَا كَان

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{n=1}^{p}a_n=\lim_{p\to\infty}e^{\sum_{n=1}^{p}Log(a_n)}=P\neq 0$$

فإنّه يوجد $\epsilon>0$ بحيث على $D(P,\epsilon)$ يوجد تعيّن متّصل لِلوغَارتم نسمّيه f . بمَا أنّ

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{n=1}^{p}a_n=\lim_{p\to\infty}e^{\sum_{n=1}^{p}Log(a_n)}=P$$

إِذًا

$$\exists k_p\in\mathbb{Z}; f(\prod_{n=1}^{p}a_n)=\sum_{n=1}^{p}Log(a_n)+2ik_p\pi$$

بمَا أنّ f متّصلة فإِنّ

$$0=\lim_{p\to\infty}[f(\prod_{n=1}^{p+1}a_n)-f(\prod_{n=1}^{p}a_n)]=\lim_{p\to\infty}loga_{p+1}+(2ik_{p+1}-2ik_p)\pi$$

إِذًا

$$\exists n_0\in\mathbb{N}, p\geq n_0\Rightarrow 2ik_{p+1}=2ik_p=2ik_{n_0}$$

إِذًا

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}Log(a_n)=f(P)-2ik_{n_0}\pi$$

نظريّة

لنفترض أنّ $\Re eal(a_n)>-1$ فإِنّ $\sum|Log(a_n+1)|$ تكون متقَاربة إِذَا و فقط إِذَا كَانت $\sum|a_n|$ متقَاربة

برهَان

من مفكوك تيلور

$$\forall|z|<1, Log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

إِذًا

$$|z|-\frac{|z|^2}{2(1-|z|)}\leq|Log(1+z)|\leq|z|+\frac{|z|^2}{2(1-|z|)}$$

إِذًا

$$\forall|z|<\frac{1}{2},\frac{|z|}{2}\leq|Log(1+z)|\leq\frac{3}{2}|z|$$

في كلتَا الحَالتين $\sum|a_n|<\infty$ أو $\sum|Log(1+a_n)|<\infty$ فإِنّ $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ إِذًا

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{2} \leq |Log(1+a_n)| \leq \frac{3}{2}|a_n|$$

و بَالمقَارنة فإِنّ $\sum |Log(a_n+1)|$ تكون متقَاربة إِن و فقط إِن كَانت $\sum |a_n|$ متقَاربة

تطبيق

ليكن $P_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z}{k^2})$ فإِنّ P_n دَوَال صحيحة و $\sum|\frac{z}{k^2}|<\infty$ علَى $D(0,R)$ عندنَا $|P_n(z)|\leq \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{R}{k^2})$ إِذًا (P_n) محدودة علَى كلّ متَرَاصّ و من ثمّ فهي تَتقَارب من دَالة صحيحة g أصفَارهَا هي $\{k^2, k\in\mathbb{N}\}$ و هي كلّهَا أصفَار بسيطة

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و (f_n) متتَابعة من الدّوَال التّحليليّة علَى Ω بحيث $f_n\neq 0$ و $\sum|1-f_n|$ تَتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متَرَاصّ من Ω فإِنّ

$g(z)=\prod_{k=1}^{\infty} f_n$ تكون دَالة تحليليّة علَى Ω تحقّق $g(a)=0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}, f_n(a)=0$ و رتبة a كصفر لِلدَالة g هي مجموع رتب a كصفر لِلدّوَال f_n

برهَان

بمَا أنّ $\sum|1-f_n|$ تَتقَارب بإِنتظَام من دَالة h فإِنّ h تكون متّصلة و من ثمّ لكلّ متَرَاص $K\subset\Omega, \exists M>0, \sup_{z\in K} h(z)\leq M$ إِنطلَاقًا من رتبة معيّنة n_0 فإِنّ $\sup_{z\in K}|1-f_n(z)|\leq\frac{1}{2}$ إِذًا بإِعتمَاد علَى المقَارنة $\sum_{n=n_0}^{\infty} |log f_n|$ تكون محدودة علَى K إِذًا $F_p=\prod_{n=1}^{p} f_n$ تَتقَارب علَى Ω و هي محدودة علَى كلّ متَرَاص بإِعتمَاد نظريّة منتَال (F_p) تَتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متَرَاص من دَالة تحليليّة F علَى Ω علَى K لنَا $\prod_{n_0}^{\infty} f_n(z)=e^{\sum_{n=n_0}^{\infty} log f_n(z)}\neq 0$ إِذًا علَى K أصفَار $\prod_{1}^{\infty} f_n$ هي بَالضبط أصفَار $\prod_{1}^{n_0} f_n$

عوَامل ويرَاسترَاس $Weierstrass's \quad Factors$

تعريف

عوَامل ويرَاسترَاس هي إِحدَى الدوَال التَّالية

$$E_0(z)=(1-z),\qquad E_n(z)=(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+..+\frac{z^n}{n}}\qquad n\in\mathbb{N}$$

نظريّة

لكلّ $n\in\mathbb{N}$ و لكلّ $|z|\leq 1$ فإِنّ

$$|1-E_n(z)|\leq|z|^{n+1}$$

برهَان

بما أنّ $E'_n(z)=-z^n e^{z+\frac{z^2}{2}+..+\frac{z^n}{n}}$ فإنّ

$$E_n(z)-E_n(0)=\int_{[0,z]}E'_n(w)dw=\int_0^1 zE'_n(tz)dt=-z^{n+1}\int_0^1 t^n e^{tz+\frac{(tz)^2}{2}+..+\frac{(tz)^n}{n}}dt$$

إذًا

$$|E_n(z)-E_n(0)|\leq|z^{n+1}|\int_0^1 t^n e^{t+\frac{(t)^2}{2}+..+\frac{(t)^n}{n}}dt=|z^{n+1}|\int_0^1 -E'_n(t)dt=|z^{n+1}||E_n(1)-E_n(0)|=|z^{n+1}|$$

نظريّة

لتكن (a_n) متتَابعة من $\mathbb{C}^*$ تحقّق $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$ و لتكن (p_n) متتَابعة من $\mathbb{N}$ بحيث لكلّ $r>0$ تكون $\sum(\frac{r}{|a_n|})^{1+p_n}$ متقَاربة فإنّ $\prod E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$ يتقارب من دَالة صحيحة أصفَارهَا هي $\{a_n,n\in\mathbb{N}\}$

برهَان

ليكن $r>0$ لكلّ $z\in D(0,r)$ فإنّ

$$|1-E_{p_n}(\frac{z}{a_n})|\leq|\frac{z}{a_n}|^{1+p_n}\leq(\frac{r}{r_n})^{1+p_n}$$

و بما أنّ $\sum(\frac{r}{r_n})^{1+p_n}$ متقَاربة فإنّ $\sum|1-E_{p_n}(\frac{z}{a_n})|$ تتقَارب بإنتظَام علَى $D(0,r)$ إذًا من النّظريّة السَّابقة $\prod E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$ صحيحة و أصفَارهَا هي $\{a_n,n\in\mathbb{N}\}$

نظريّة $Weierstrass\ Factorization\ theorm$

لتكن (a_n) متتَابعة من نقَاط مختلفة من نطَاق $\Omega\subset\mathbb{C}$ ليس لهَا نقطة ترَاكم دَاخل Ω و لتكن m_n متتَابعة من $\mathbb{N}$ فإنّه توجد دَالة تحليليّة f علَى Ω بحيث لكلّ $n\in\mathbb{N}$ يكون a_n صفكر لِلدَالة f من الرتبة m_n

برهَان

١) لنفترض أنّ (a_n) محدودة إذًا $\Omega\neq\mathbb{C}$ ذلك أنّ (a_n) لهَا نقطة ترَاكم لنعتمد المتَتَابعة (b_n) التي نتحصل عليهَا بتكرَار كلّ a_n m_n مرة و ليكن $c_n\notin\Omega$ بحيث $b_n-c_n=\inf_{c\notin\Omega}|b_n-c|$ ليكن K متراَص من Ω و $d_K=d(K,\Omega^c)$ بما أنّ

$$\lim_{n\to\infty}|b_n-c_n|=0$$

و إلَا (b_n) يكون لهَا نقطة ترَاكم في Ω فإنّه

$$\exists N\in\mathbb{N},\forall z\in K\forall n\geq N,\frac{|b_n-c_n|}{|z-c_n|}\leq\frac{|b_n-c_n|}{d_K}\leq\frac{1}{2}$$

إذًا

$$|1-E_n(\frac{b_n-c_n}{z-c_n})|\leq(\frac{1}{2})^{n+1}$$

إذًا $f_p(z)=\prod_{n=1}^{p}E_n(\frac{b_n-c_n}{z-c_n})$ تتقَارب بإِنتظَام علَى كلّ متَرَاص من دَالة f تحقّق

$$f(z)=0\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{N},E_n(\frac{b_n-c_n}{z-c_n})=0\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{N},z=b_n$$

بمَا أنّ (b_n) محدودة و $\lim_{n\to\infty}|b_n-c_n|=0$ فيوجد $R>0$ بحيث

$$\forall n\in\mathbb{N},|b_n|<R,|c_n|<R$$

إذًا

$$\forall|z|\geq 5R,|1-E_n(\frac{b_n-c_n}{z-c_n})\leq(\frac{2R}{4R})^{n+1}\leq(\frac{1}{2})^{n+1}$$

إذًا $f_p(z)=\prod_{n=1}^{p}E_n(\frac{b_n-c_n}{z-c_n})$ تتقَارب بإِنتظَام علَى $\{z\in\mathbb{C},|z|\geq 5R\}$ و من ثمّ

$$\lim_{|z|\to\infty}f(z)=\lim_{p\to\infty}\lim_{|z|\to\infty}f_p(z)=1$$

أمَّا إِذَا كَانت (a_n) غير محدودة فنبني (b_n) كمَا سبق و نأخذ $b\in\Omega\setminus\{a_n,n\in\mathbb{N}\}$ إذًا يوجد $\varepsilon>0$ بحيث $\forall\in\mathbb{N},|b_n-b|>\varepsilon$ لتكن $g(z)=\frac{1}{z-b}$ المتّتَابعة $g(b_n)$ محدودة و ليس لهَا نقطة ترَاكم في $g(\Omega\setminus\{b\})$ إِذًا من المرحلة الأولَى توجد دَالة تحليليّة f_1 علَى $g(\Omega\setminus\{b\})$ أصفَارهَا هي بَالضبط $g(b_n)$ و $\lim_{|z|\to\infty}f_1(z)=1$ لتكن $f(z)=f_1\circ g(z)$ تكون f تحليليّة علَى $\Omega\setminus\{b\}$ و تحقّق

$$\lim_{z\to b}f(z)=1$$

إذًا f تحليليّة علَى Ω

تعريف

نقول أنّ f ميرومرفيّة علَى مفتوح $\Omega\subset\mathbb{C}$ إِن وجدت متّتَابعة (a_n) من نقَاط مختلفة من Ω ليس لهَا نقطة ترَاكم دَاخل Ω بحيث f تكون تحليليّة علَى $\Omega\setminus\{a_n,n\in\mathbb{N}\}$ و لكلّ $n\in\mathbb{N}$ فإنّ a_n هو قطب لِلدَالة f

نظريّة

تكون f ميرومرفيّة علَى المفتوح $\Omega\subset\mathbb{C}$ إِن و فقط إِن وجدت دَالتَان تحليليّتَان h و g علَى المفتوح Ω بحيث $f=\frac{g}{h}$

برهَان

لتكن m_n هي رتبة a_n كقطب لِلدَالة f ، توجد من النّظريّة السَّابقة دَالة تحليليّة g علَى Ω بحيث a_n هو صفر لِلدَالة g من الرتبة m_n إِذًا $g.f$ يمكن تمديدهَا كدَالة تحليليّة h علَى Ω و من ثمّ $f=\frac{h}{g}$

تمارين

التمرين الاول

١) أوجد متتابعة (a_n) من $D(0,1)^*$ بحيث $\sum_1^\infty (1-|a_n|^2)$ تكون متقاربة و $\{z\in\mathbb{C}, |z|=1\}\subset\overline{\{a_k, k\in\mathbb{N}\}}$

٢) بيّن أنّ $f_p=\prod_{n=1}^{p}(\frac{z-a_n}{z-\frac{1}{\bar{a}_n}})$ تحقّق $|f_p(z)|<1, \forall |z|<1$

٣) إستنتج أنّه توجد دالة تحليليّة f علَى $D(0,1)$ أصفارها هي $\{a_k, k\in\mathbb{N}\}$ و $\forall |z|<1, |f(z)|<1$

٤) لتكن g دالة تحليليّة و محدودة علَى $D(0,1)$ تحقّق $g(0)\neq 0$ و لتكن $\{y_k, k\in\mathbb{N}\}$ أصفار g بيّن أنّ $\sum_{n\geq 0} Log(|y_n|)$ متقاربة و من ثمّ فإنّ $\sum_{n\geq 0}(1-|y_n|^2)$ متقاربة

٥) إستنتج أنّه علَى كلّ نطاق بسيط الترابط Ω توجد دالة تحليليّة محدودة لا يمكن تمديدها كدالة تحليليّة علَى نطاق من $\mathbb{C}$ أكبر من Ω هل العكس صحيح

التمرين الثّاني

ليكن Ω نطاق من $\mathbb{C}$ و f_n متتابعة من الدّوال التّحليليّة علَى Ω بحيث $\prod f_n$ تتقارب من دالة غير صفريّة f

١) بيّن أنّ

$$\frac{f'}{f}=\sum \frac{f'_n}{f_n}$$

و التقارب يكون بإنتظام علَى كلّ متراصّ من $\{z\in\Omega, f(z)\neq 0\}$

٢) بيّن أنّه توجد دالة g صحيحة تحقّق

$$\forall z\in\mathbb{C}, sin\pi z = e^{g(z)} z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

٣) بيّن أنّ

$$\pi cotan\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

٤) إستنتج أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, sin\pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^2 n^2)$$

٥) بيّن أنّ

$$\forall z \in \mathbb{C}, cos\pi z = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2})$$

نظريّة $Mittag - Leffler$

لتكن a_n متتَابعة من نقَاط مختلفة من مفتوح $\Omega \subset \mathbb{C}$ ليس لهَا نقطة ترَاكم في Ω و لتكن P_n متتَابعة من كثيرَات حدود تحقّق $P_n(0) = 0$ فإنّه توجد دَالة ميرومورفيّة علَى Ω و تحليليّة علَى $\Omega \setminus \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ بحيث لكلّ $n \in \mathbb{N}$ تكون $f - P_n(\frac{1}{z-a_n})$ تحليليّة بجوَار a_n

الدّوَال التّوَافقيّة

تعريف

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $U : \Omega \to \mathbb{R}$ دَالة من نوع $\mathcal{C}^2$ نقول أنّ الدّالة U توَافقيّة علَى Ω إن تحقّقت علَى Ω المعَادلة التّالية

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

أمثلة

لتكن f دَالة تحليليّة علَى مفتوح Ω

$$f(x,y) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y) = (U(x,y), V(x,y))$$

من معَادلَات كوشَى ريمَان $(Cauchy - Riemann\ equations)$ عند (x,y) فإنّ

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y = \frac{-\partial V}{\partial x}(x,y)$$

إذًا $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{-\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ إذًا $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

فمثلًا تكون $Log|z|$ تكون توَافقيّة علَى $\mathbb{C}^*$ لأنّها بجوَار كلّ نقطة هي قيمة حقيقيّة لدَالة تحليليّة $Log|z| = \mathcal{R}e(log_\pi z)$ علَى $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ و $Log|z| = \mathcal{R}e(log_{\frac{\pi}{2}} z)$ علَى $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ بسيط التّرَابط و $U : \Omega \to \mathbb{C}$ فإنّ U تكون توَافقيّة علَى Ω إذَا و فقط إذَا وجدت دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$

برهَان

إذَا كَان Ω مفتوحًا من $\mathbb{C}$ و كَانت f دَالة تحليليّة علَى Ω نعرف من معَادلَات كوشَى ريمَان و المثَال السَّابق أنّ $U = \mathcal{R}e(f)$ تكون توَافقيّة علَى Ω حتّى و لم يكن Ω بسيط التّرَابط.

أمّا إذَا كَانت $U : \Omega \to \mathbb{C}$ دَالة توَافقيّة فنعرّف

$$h(x+iy) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$$

لتكن $P = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)$ و $R = -\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) =$ نلَاحظ أنّ $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y = \frac{-\partial R}{\partial x}(x,y)$ و كذلك نلَاحظ أنّ $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)$ إذًا h تحقّق معَادلَات كوشَى ريمَان إذًا h دَالة تحليليّة علَى Ω بمَا أنّ Ω بسيط التّرَابط فإنّ h لهَا أصل F علَى Ω . لنَا

$$h(x+iy) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = F' = \frac{\partial \mathcal{R}e(F)}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial \mathcal{I}m(F)}{\partial x}(x,y)$$

إِذًا $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \mathcal{R}e(F)}{\partial x}(x,y)$ و $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \mathcal{R}e(F)}{\partial y}(x,y)$ فحتمًا يوجد ثابت $c \in \mathbb{R}$ يحقّق $U = \mathcal{R}e(F+c)$

رأينَا أنّ $Log|z|$ تكون توَافقيّة علَى $\mathbb{C}^*$ و لكن لَا توجد دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $Log|z| = \mathcal{R}e(f)$ و السّبَب هو أنّ $\mathbb{C}^*$ غير بسيط التّرَابط كمَا تأكّده النّظريّة التّالية.

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ فإِنّ Ω يكون بسيط التّرَابط إِذَا و فقط إِذَا لكلّ دَالة U توَافقيّة علَى Ω توجد دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$

برهَان

بإِعتبَار النّظريّة السَّابقة بقي إِثبَات إِتّجَاه وَاحد و هو إِذَا كَان Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ غير بسيط التّرَابط فإِنّه توجد دَالة U توَافقيّة علَى Ω و لَا توجد دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$

إِذَا كَان Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ غير بسيط التّرَابط فإِنّه توجد $a \in \Omega^c$ بحيث $\frac{1}{z-a}$ ليس لهَا أصل في Ω عندهَا $Log|z-a|$ تكون توَافقيّة علَى Ω لو وجدت دَالة تحليليّة f علَى Ω تحقّق $Log|z-a| = \mathcal{R}e(f)$ لكَان $f'(z) = \frac{\partial Log|z-a|}{\partial x} - i\frac{\partial Log|z-a|}{\partial y}$

لنفترض أنّ $z=(x,y)$ و $a=(\alpha,\beta)$ فإِنّ $Log|z-a| = \frac{1}{2}log[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]$ إِذًا $f'(z) = \frac{\partial Log|z-a|}{\partial x} - i\frac{\partial Log|z-a|}{\partial y} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} - i\frac{(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \frac{1}{z-a}$ و هذَا تنَاقض.

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و U دَالة توَافقيّة علَى Ω فإِنّه لكلّ $z \in \Omega$ توجد دَالة تحليليّة f علَى $B(z,d(z,\Omega^c))$ تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$ علَى $B(z,d(z,\Omega^c))$

و لكلّ $r < d(z,\Omega^c)$ لنَا

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z+re^{it})dt$$

برهَان

بمَا أنّ $B(z,d(z,\Omega^c))$ بسيط التّرَابط فإِنّه توجد دَالة تحليليّة f علَى $B(z,d(z,\Omega^c))$ تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$ علَى $B(z,d(z,\Omega^c))$ لنَا من كوشي $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r)}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt$

إِذًا بإِعتبَار القيم الحقيقيّة لنَا $U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z+re^{it})dt$

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و U دَالة توَافقيّة علَى Ω إن وجد $z_0 \in \Omega$ يحقّق $U(z_0) = \sup\{U(z); z \in \Omega\}$ فإنّ الدَالة U تكون ثَابتة علَى Ω

برهَان

توجد دَالة تحليليّة f علَى $B(z_0, d(z_0, \Omega^c)$ تحقّق $U = \mathcal{R}e(f)$ علَى $B(z_0, d(z_0, \Omega^c)$ إذًا الدَّالة التّحليليّة $F = e^f$ تصل إلَى قيمتهَا العظمَى عند نقط دَاخليّة z_0 إذًا هي ثَابتة علَى $B(z_0, d(z_0, \Omega^c)$ و من ثمّ فإنّ علَى $B(z_0, d(z_0, \Omega^c)$ الدَّالة U تسَاوي ثَابت c

لتكن A مجموعة النّقَاط من Ω الّتي بجوَارهَا U تسَاوي هذَا الثّابت c . من التّعريف يكون A مفتوحًا من Ω يحتوي علَى z_0 كي نثبت أنّه مغلق من Ω نأخذ متّتَابعة (z_n) من A تتقَارب من $z \in \Omega$

توجد دَالة تحليليّة g علَى $B(z, d(z, \Omega^c))$ تحقّق $U = \mathcal{R}e(g)$ علَى $B(z, d(z, \Omega^c))$. إنطلَاقًا من رتبة معيّنة لنَا $z_n \in B(z, d(z, \Omega^c))$ و ممّا سبق تكون e^g ثَابتة بجوَار z_n إذًا هي نفس الثَّابت علَى $B(z, d(z, \Omega^c))$ و من ثمّ فإنّ $z \in A$

ينتج أنّ A مغلق و مفتوح غير فَارغ من نطَاق Ω إذًا $A = \Omega$

نظريّة

ليكن Ω نطَاقًا من $\mathbb{C}$ محدودًا و U و V دَالتين توَافقيّتين علَى Ω و متّصلتين علَى $\overline{\Omega}$ إن كَانت $U = V$ علَى حدود Ω فإنّ $U = V$ علَى كَامل $\overline{\Omega}$

برهَان

لو وجد $z \in \Omega$ بحيث $U(z) > V(z)$ بما أنّ $\overline{\Omega}$ متَراص من $\mathbb{C}$ إذًا الدَّالة المتّصلة $U - V$ تصل إلَى قيمتهَا العظمَى علَى $\overline{\Omega}$ عند $z_0 \in \Omega$ إذًا الدَالة التوَافقيّة $U - V$ تكون ثَابتة علَى Ω من النّظريّة السَّابقة. أي $U = V$ و هذَا تنَاقض إذًا $U \leq V$ علَى $\overline{\Omega}$ و بنفس الطّريقة نبرهن أنّ $V \leq U$ إذًا $U = V$ علَى $\overline{\Omega}$

نوَاة بوسّون $Poisson's\ kernel$

ليكن $R > 1$ و f دَالة تحليليّة علَى $B(0, R)$.

من صيغة كوشي نعرف أنّ

$$\forall a \in B(0,1), f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,1)} f(z)[\frac{1}{z-a} + \frac{\bar{a}}{1-\bar{a}z}]dz$$

. بتعويض $a = re^{iu}$ نتحصّل علَى

$$\forall r < 1, \forall u \in \mathbb{R},\ \ f(re^{iu}) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})[\frac{1}{e^{it} - re^{iu}} + \frac{re^{-iu}}{1 - re^{-iu}e^{it}}]ie^{it}dt$$

لنَا

$$[\frac{1}{e^{it} - re^{iu}} + \frac{re^{-iu}}{1 - re^{-iu}e^{it}}]e^{it} = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(t-u) + 1}$$

بَالتعويض نتحصّل علَى

$$\forall r < 1,\ \ f(re^{iu}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(t-u) + 1}dt$$

إِذَا كَانت U دَالة توَافقيّة علَى $B(0,R)$ فإِنّه توجد دَالة تحليليّة f علَى $B(0,R)$ بحيث U تكون القيمة الحقيقيّة لِلدَّالة f فمن المعَادلة السَّابقة تنتج صيغة بوسّون

$$\forall r < 1,\ \ U(re^{iu}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(e^{it})\frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(t-u) + 1}dt$$

أمَّا إِذَا كَانت U دَالة توَافقيّة بجوَار $\overline{B(0,R)}$ فإِنّ $V(z) = U(Rz)$ تكون توَافقيّة بجوَار $\overline{B(0,1)}$ إِذًا

$$\forall r < 1,\ \ V(re^{iu}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(e^{it})\frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(t-u) + 1}dt$$

إِذًا بوضع $z = |z|e^{iu} = Rre^{iu}$ لنَا

$$\forall |z| < R,\ \ U(|z|e^{iu}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(Re^{it})\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 + |z|^2 - 2|z|R\cos(t-u)}dt$$

فمثلًا لو كَانت $U = 1$ فإِنّ

$$\forall |z| < R,\ \ 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 + |z|^2 - 2|z|R\cos(t-u)}dt$$

نظريّة $Harnack's\ inequality$

ليكن $R > 0$ و $a \in \mathbb{C}$ و U توَافقيّة بجوَار $\overline{B(a,R)}$ و موجبة فإِنّ

$$\forall z \in B(a,R), \qquad \frac{R - |z|}{R + |z|}U(a) \leq U(a+z) \leq \frac{R + |z|}{R - |z|}U(a)$$

برهَان

بمَا أنّ

$$\forall |z| < R,\ \ U(a + |z|e^{iu}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(a + Re^{it})\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 + |z|^2 - 2|z|R\cos(t-u)}dt$$

و بمَا أنّ

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} \leq \frac{R^2-|z|^2}{R^2+|z|^2-2|z|R\cos(t-u)} \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}$$

و نظرًا لأنّ U موجبة فإنّ

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(a+Re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(a+Re^{it})\frac{R^2-|z|^2}{R^2+|z|^2-2|z|R\cos(t-u)}$$
$$\leq \frac{R+|z|}{R-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(a+Re^{it})$$

إذًا

$$\forall z \in B(a,R), \qquad \frac{R-|z|}{R+|z|}U(a) \leq U(a+z) \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}U(a)$$

نظريّة

ليكن Ω نطَاقًا من $\mathbb{C}$ و (U_n) متَتَابعة متناقصة من دوَال توَافقيّة علَى Ω إن وجد $a \in \Omega$ بحيث متَتَابعة $(U_n(a))$ تَتقَارب من عدَد في $\mathbb{R}$ فإنّ (U_n) تَتقَارب من دَالة توَافقيّة علَى Ω .

برهَان

نظريّة $Dirichlet$

لتكن $u \to f(e^{iu})$ دَالة متّصلة علَى $\mathbb{R}$

$$\widetilde{f}(|z|e^{iu}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1-|z|^2}{|z|^2-2|z|cos(t-u)+1}dt & |z|<1 \\ f(e^{iu}) & |z|=1 \end{cases}$$

برهَان

الدَّالة $g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,1)} f(w)\frac{1}{w-z}dw$ تكون تحليليّة علَى $B(0,1)$

كذلك $h(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,1)} f(w)\frac{1}{w-\frac{1}{z}}dw$ تكون تحليليّة علَى $B(0,1)$ نلَاحظ أنّ $\widetilde{f}(z) = \mathcal{R}e(g(z)) + \mathcal{R}e(h(\overline{z}))$ علَى $B(0,1)$. و بما أنّ $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ فإنّ

$$\mathcal{R}eh(z) = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n z^n})$$

إذًا $\mathcal{R}e(h(\overline{z}) = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{z}^n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^n) = \mathcal{R}e\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^n)$ ينتج من هذَا أنّ $\widetilde{f}$ تكون توَافقيّة علَى $B(0,1)$.

لنبرهن أنّ $\lim_{|z|\to 1^-, u\to\theta} \widetilde{f}(|z|e^{iu}) = f(e^{i\theta})$ بما أنّ

$$\forall |z|<1, \ 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z|^2-2|z|\cos(t-u)+1}dt$$

فإنّ

$$\widetilde{f}(|z|e^{iu}) - f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(e^{it}) - f(e^{i\theta}))\frac{1-|z|^2}{|z|^2 - 2|z|\cos(t-u)+1}dt$$

إذًا

$$|\widetilde{f}(|z|e^{iu}) - f(e^{i\theta})| \leq |\frac{1}{2\pi}\int_{(t-u)\in]\epsilon,2\pi-\epsilon[}(f(e^{it}) - f(e^{i\theta}))\frac{1-|z|^2}{|z|^2 - 2|z|\cos(t-u)+1}dt| +$$
$$|\frac{1}{2\pi}\int_{(t-u)\in[0,\epsilon]\bigcup[2\pi-\epsilon,2\pi]}(f(e^{it}) - f(e^{i\theta}))\frac{1-|z|^2}{|z|^2 - 2|z|\cos(t-u)+1}dt|$$

لكلّ $\varepsilon > 0$ لتكن $M_\epsilon = \sup_{(t-u)\in]\epsilon,2\pi-\epsilon[,|z|\leq 1}|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})|\frac{1}{|z|^2 - 2|z|\cos(t-u)+1}$ و $m_\varepsilon = \sup_{(t-u)\in[0,\epsilon]\bigcup[2\pi-\epsilon,2\pi]}|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})|$

لنَا

$$|\widetilde{f}(|z|e^{iu}) - f(e^{i\theta})| \leq M(1-|z|^2) + m_\varepsilon$$

و نظرًا لأنّ f منتظمة الإتّصَال و $|f(e^{it}) - f(e^{i\theta})| \leq |f(e^{it}) - f(e^{iu})| + |f(e^{iu}) - f(e^{i\theta})|$ و إذَا إعتبرنَا أنّ $|e^{iu} - e^{i\theta}| < \epsilon$ فإنّ $\lim_{\epsilon\to 0} m_\varepsilon = 0$ ينتج أنّ $\lim_{|z|e^{iu}\to e^{i\theta}}|\widetilde{f}(|z|e^{iu}) - f(e^{i\theta})| = 0$

كتطبيق لنظريّة *Dirichlet* بمَا أنّ $\widetilde{f}$ منتظمة الإتّصَال علَى قرص الوحدة المغلق و في دَاخل القرص توجد دَالة تحليليّة $h(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ تحقّق $\widetilde{f} = \mathcal{R}eh$

إذًا $\frac{1}{2}(\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} + \overline{a_n} r^n e^{-int})$ تتقَارب بإنتظَام من $f(e^{it})$ عندمَا تتقَارب r من الصفر

إذًا كثيرَات الحدود المثلثيّة كثفة في مجموعة الدّوَال المتّصلة و ذَاتي دورة 2π أي أنّه

نظريّة

لتكن f دَالة متّصلة و دوريّة دورتهَا 2π فلكلّ $\epsilon > 0$ توجد كثيرة حدود $P_\epsilon(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ بحيث

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t) - P_\epsilon(t)| \leq \epsilon$$

و بمَا أنّ $\Sigma_{n=0}^{s}\frac{(ikt)^n}{n!}$ تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ متَرَاصّ من e^{ikt} فيمكن أن نستنتج النّظريّة التَّالية

نظريّة *Weierstrass approximation theorem*

ليكن K متَرَاصًّا من $\mathbb{R}$ و $f : K \to \mathbb{R}$ دَالة متّصلة فلكلّ $\epsilon > 0$ توجد كثيرة حدود $P_\epsilon \in \mathbb{R}[X]$ تحقّق

$$\forall x \in K; |f(x) - P_\epsilon(x)| \leq \epsilon$$

تعريف *Subharmonic functions*

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و $U:\Omega\to[-\infty,+\infty[$ نقول أنّ الدَّالة U تحت التّوَافقيّة علَى Ω إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق

١) اَدَّالة متّصلة فوقيًّا $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ تكون $\{z\in\Omega, f(z)<\alpha\}$ مفتوح في Ω و يوجد $z_0\in\Omega$ بحيث $u(z_0)\neq-\infty$

٢) و لكلّ $z\in\Omega$ و لكلّ $r<d(z,\Omega^c)$ لنَا

$$U(z)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z+re^{it})dt$$

أمثلة

١) لتكن f دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω فإِنّ $log|f|$ و $|f|$ و $\mathcal{R}ef$ تكون دوَال تحت توَافقيّة

٢) إِذَا كَانت u و v دَالتين تحت توَافقيّتين علَى نطَاق Ω و $\alpha>0$ فإِنّ $sup(u,v)$ و $u+\alpha v$ تكونَان دَالتين تحت توَافقيّتين

٣) لتكن u دَالة تحت توَافقيّة علَى نطَاق Ω و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ محدّبة و متزَايِدة فإِنّ $h\circ u$ تكون دوَال تحت توَافقيّة علَى Ω

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و U دَالة تحت التّوَافقيّة علَى Ω إِن وجد $z_0\in\Omega$ يحقّق $U(z_0)=\sup\{U(z);z\in\Omega\}$ فإِنّ الدَالة U تكون ثَابتة علَى Ω

برهَان

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و $U:\Omega\to[-\infty,+\infty[$ تكون الدَّالة U تحت التّوَافقيّة علَى Ω إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق

١) اَدَّالة متّصلة فوقيًّا $(\forall\alpha\in\mathbb{R}$ تكون $\{z\in\Omega, f(z)<\alpha\}$ مفتوح في Ω و يوجد $z_0\in\Omega, b.hy_t u(z_0)\neq-\infty$

٢) و لكلّ $z\in\Omega$ يوجد $0<r_z<d(z,\Omega^c)$ بحيث لكلّ $r<r_z$ لنَا

$$U(z)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z+re^{it})dt$$

برهَان

نظريّة

ليكن U دَالة تحت التّوَافقيّة علَى $\mathbb{C}$ بحيث يوجد $m \in \mathbb{R}$ يحقّق $U \leq m$ فإنّ U تكون ثَابتة

نظريّة

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و U دَالة تحت التّوَافقيّة علَى Ω و متّصلة لكن $\overline{B(a,R)} \subset \Omega$ فإنّ

$$\widetilde{U}(a+|z|e^{iu}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(a+Re^{it})\frac{R^2-|z|^2}{R^2+|z|^2-2|z|R\cos(t-u)}dt & a+|z|e^{iu} \in B(a,R) \\ U(z) & z \notin B(a,R) \end{cases}$$

تكون تحت التّوَافقيّة علَى Ω

نظريّة *Great Picard Theorem*

لتكن a نقطة شَاذة أَساسيّة لِلدَّالة f فإِنّه لكلّ $\alpha \in \mathbb{C}$ مَا عدَا علَى أقصَى تقدير نقطة وحيدة و لكلّ $\epsilon > 0$ فإِنّ الدَّالة $f - \alpha$ لهَا عدَد غير متنهي من الأَصفَار دَاخل $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < \epsilon\}$

نظريّة *Little Picard Theorem*

لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دَالة تحليليّة. إِن وجدت نقطتَان مختلفتَان لَا تنتميَان إِلَى $f(\mathbb{C})$ فإِنّ f تكون ثَابتة.

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٦ ربيع الثَّاني ١٤٢٧

تحليل مركّب درسَات عليَا الَاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الَاول

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و f دَالة تحليليّة علَى Ω غير ثَابتة

١) أورد نصّ نظريّة *Rouche* و إِستنتج منه أنّ f دَالة مفتوحة

٢) أورد نصّ نظريّة $Ascoli - Arzallah$ و إِستنتج منهَا نظريّة *Montel*

٣) مَا نصّ و برهَان نظريّة ويرَستَرَاس *Weierstrass* الّتي تخصّ كثَافة $\mathbb{R}[X]$. هل توجد متّتَابعة (P_n) من كثيرَات حدود $P_n \in \mathbb{C}[Z]$ تتقَارب بإِنتظَام علَى دَائِرة الوحدة من $z \to \frac{1}{z}$

التمرين الثَّاني

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ يحتوي علَى 0 و لتكن f دَالة تحليليّة علَى Ω لكلّ $r < d(0,\Omega^c)$ ليكن

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

١) أورد نصّ نظريّة $Jensen$ و إستنتج منهَا أنّ $log|f|$ دَالة تحت التّوَافقيّة. متَى تكون $log|f|$ دَالة توَافقيّة.

٢) بيّن أنّ $r \to M(r)$ تكون متصَاعدة و متّصلة علَى $[0, d(0, \Omega^c)[$.

٣) بيّن أنّه إن وجد $0 < r < d(0, \Omega^c)$ بحيث $\theta \longrightarrow |f(re^{i\theta})|$ تكون ثَابتة
و $f(z) \neq 0$ لكلّ $|z| < r$ فإنّ f تكون ثَابتة علَى Ω .

٤) لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من نطَاق Ω من $\mathbb{C}$ ليس لهَا نقطة ترَاكم في Ω و لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من $\mathbb{C}$

أ) بيّن أنّه توجد دَالة تحليليّة F علَى Ω تحقّق $F(a_n) = 0$ و المشتقّة $F'(a_n) \neq 0$.

ب) بينّ أنّه توجد دَالة g ميرومرفيّة علَى Ω أقطابهَا هي $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.

كلّهَا أقطَاب بسيطة و لكلّ $n \in \mathbb{N}$ فإن بَاقي g عند a_n هو $\frac{x_n}{F'(a_n)}$

ج) بينّ أنّ $g.F$ يمكن تمديدهَا كدَالة h تحليليّة علَى كَامل Ω . مَا قيمة $h(a_n)$

التمرين الثّلث

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و $U : \Omega \to]-\infty, +\infty[$ دَالة متّصلة و تحقّق
لكلّ $z \in \Omega$ يوجد $0 < r_z < d(z, \Omega^c)$ بحيث لكلّ $r < r_z$ لنَا

$$U(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z + re^{it}) dt$$

١) نريد أن نبرهن أنّ U دَالة تحت التّوَافقيّة علَى Ω

أ) بيّن بطريقة مشَابهة لمَا في الملزمة أنّه إن وصلت U إلَى قيمتهَا العظمَى في $z \in \Omega$ فإنّ U تكون ثَابتة

ب) ليكن $R < d(z, \Omega^c)$ بيّن أنّه توجد دَالة $\widetilde{U}$ توَافقيّة علَى $D(z, R)$ و متّصلة علَى $\overline{D(z, R)}$ و تسَاوي U علَى حدود $D(z, R)$

و بيّن أنّه إن وصلت $U - \widetilde{U}$ إلَى قيمتهَا العظمَى علَى $\overline{D(z, R)}$ في $z_0 \in D(z, R)$ فإنّ $U - \widetilde{U}$ تكون ثَابتة علَى $\overline{D(z, R)}$

ج) إستنتج أنّ $U \leq \widetilde{U}$ علَى $D(z, R)$ و أنّ $U(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z + Re^{it}) dt$
و من ثمّ فإنّ U تكون دَالة تحت التّوَافقيّة علَى Ω

د) بيّن أنّ الدَّالة

$$f(\xi) = \begin{cases} U(\xi) & \xi \notin D(z,R) \\ \widetilde{U}(\xi) & \xi \in D(z,R) \end{cases}$$

تكون دَالة تحت التّوَافقيّة علَى كَامل Ω

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٠ ربيع الأوّل ١٤٢٥

تحليل مركّب درسَات عليَا الاختبَار الفصلَى الثَّاني في سَاعتين

التمرين الَاول

١) بيّن أنّه توجد دَالة تحليليّة h علَى $\mathbb{C}^*$ بحيث لكلّ $k \in \mathbb{N}^*$ يكون $\frac{1}{k}$ صفر لِلدَّالة h من الرتبة k

٢) مَا نصّ النظريّة التَى إستعملتهَا و مَا برهَان الجزء الذِى إستعملته من هذه النظريّة

٣) بيّن أنّ 0 هو نقطة شَاذة أسَاسيّة بَالنسبة لِلدَالة h و يمكن أن نختَار h بحيث $h(\frac{1}{z})$ تكون دَالة صحيحة

التمرين الثَّاني

١) مَا تعريف عوَامل ويرَاسترَاس و أثبت كمَا فَى الملزمة المتبَاينة التَى تحقّقهَا هذه العوَامل

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و $\xi \in \Omega$ و $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ متتَابعة من دوَال تحليليّة علَى Ω تحقّق $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g_k(\xi) = 1 - \frac{1}{k^2}$ و $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \Omega,\ |g_k(z)| < 1$,

٢) بيّن أنّ $\prod_{n=k}^{p} g_n$ تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ مترَاصّ من Ω من دَالة تحليليّة h علَى Ω

٣) بيّن أنّ $\Sigma_{k=1}^{\infty} g'_k \prod_{n\neq k}^{\infty} g_n$ تتقَارب بإنتظَام علَى كلّ مترَاصّ من Ω من دَالة تحليليّة علَى Ω

التمرين الثَّالث

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة هرنَاك

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{C}$ و $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دَالة توَافقيّة و $g : \Omega' \longrightarrow \Omega$ دَالة تحليليّة علَى نطَاق Ω' من $\mathbb{C}$

٢) بيّن أنّه بجوَار كلّ نقطة من Ω الدَّالة u تسَاوِى الجزء الحقيقيّ لدَالة تحليليّة
إستنتج أنّ uog تكون توَافقيّة علَى Ω'
٣) ليكن $\overline{B}(z_0,r)$ قرص مغلق من Ω' بيّن أنّ

$$uog(\overline{B}(z_0,r)) = uog(\{z; |z-z_0| = r\})$$

إستنتج أنّه إن كَان $r > 0$ و Real$g$ ثَابتة علَى $\{z; |z-z_0| = r\}$ فإنّ g تكون ثَابتة علَى Ω'
٤) بيّن أنّه إن كَان Ω نطَاق بسيط الترَابط فإنّ $\{z \in \Omega; u(z) = u(z_0)\}$ ليس بمترَاصّ
٥) هل يمكن الإستغنَاء علَى بسيط الترّابط فى السُّؤَال السَّابق (أدرس $log|z|$)

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٧ ربيع الثَّاني ١٤٢٥

تحليل مركّب درسَات عليَا الَاختبَار النّهَائِى في سَاعتين

التمرين الَاول

لنأخذ قوسين أملسين مغلقين Γ و γ من نطَاق Ω من $\mathbb{C}$ معرّفين علَى الفترة $[0,1]$ و f دَالة تحليليّة علَى Ω ليس لهَا أصفَار

١) مَا تعريف Γ و γ متحَاولين فِى Ω و برهن كمَا فِى الدّرس أنّ $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ و أوجد قيمة $e^{\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz}$

٢) مَا نصّ نظريّة متَّاق لفلر $Mittag\ Leffler$

التمرين الثَّاني

١) لتكن (x_n) متتَابعة من $D(0,1)^*$ تحقّق $\lim_{n\to\infty}|x_n| = 1$ بيّن أنّه توجد متتَابعة جزئِيَّة (a_n) من (x_n) بحيث $\sum_1^\infty (1-|a_n|^2)$ تكون متقَاربة

٢) بيّن أنّ $f_k = \prod_{n=k}^{\infty}(\frac{z-a_n}{z-\frac{1}{\bar{a}_n}})$ تحقّق $|f_k(z)| < 1, \forall |z| < 1$ و $\lim_{k\to\infty}|f_k(0)| = 1$

٣) إستنتج أنّه لكلّ $k \in \mathbb{N}^*$ توجد $N_k \in \mathbb{N}$ و دَالة تحليليّة g_k علَى $D(0,1)$ تحقّق
$g_k(0) = 1 - \frac{1}{k^2}, \quad \forall n \geq N_k,\ g_k(a_n) = 0, \quad \forall |z| \in \Omega,\ |g_k(z)| < 1$

٤) ليكن $\Omega \neq \mathbb{C}$ نطَاق بسيط الترَابط و $\xi \in \Omega$ و (z_k) متتَابعة كثيفة فِي $\partial\Omega$ بيّن لكلّ $k \in \mathbb{N}^*$ توجد دَالة تحليليّة g_k علَى Ω تحقّق $g_k(\xi) = 1 - \frac{1}{k^2}$ و z_k هو نقطة ترَاكم لأصفَار g_k و $\forall |z| \in \Omega, |g_k(z)| < 1$,

٥) إستنتج أنّه علَى كلّ نطَاق بسيط الترَابط $\Omega \neq \mathbb{C}$ توجد دَالة تحليليّة محدودة لَا يمكن تمديدهَا كدَالة تحليليّة علَى نطَاق من $\mathbb{C}$ أكبر من Ω

٦) لتكن ψ دَالة تحليليّة علَى $D(0,1)$ محدودة و لَا يمكن تمديدهَا كدَالة تحليليّة علَى نطَاق من $\mathbb{C}$ أكبر من $D(0,1)$ مَا هو أكبر نطَاق ω تكون فيه $\psi(\frac{1}{z}) + \psi(2z)$ تحليليّة إستنتج أنّه يوجد نطَاق غير بسيط الترَابط $\omega \neq \mathbb{C}$ و توجد دَالة تحليليّة محدودة علَى ω لَا يمكن تمديدهَا كدَالة تحليليّة علَى نطَاق من $\mathbb{C}$ أكبر من ω

التمرين الثَّالث

١) أورد نصّ نظريّة ديركلي و تكَامل پوَاسّون علَى القرص $D(z,R)$

و أوجد قيمة $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Log|(4+2e^{it})|dt}{5-4cos(t)}$

لنأخذ نطَاق Ω من $\mathbb{C}$ و $u,v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دَالتين توَافقيّتين علَى Ω

٢) بيّن أنّه إن وصلت u إلَى قيمتهَا العظمَى في $z \in \Omega$ فإنّ u تكون ثَابتة

٣) إستنتج أنّ $\{z \in \ \Omega; u(z) \leq v(z)\}$ لَا يمكن أن يكون مترَاصّ غير فَارغ

٤) لتكن h دَالة متّصلة و محدودة علَى $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| \leq 1\}$ و توَافقيّة علَى $D^*(0,1)$ بيّن أنّه توجد دَالة H توَافقيّة علَى $D(0,1)$ متّصلة علَى $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ تحقّق $\forall x \in \mathbb{R}, h(e^{ix}) = H(e^{ix})$

٥) بيّن أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D^*(0,1),\ \ H(z) - \frac{1}{n}Log|z| \geq h(z)$ (يمكن إستعمَال السُّؤَال ٣)

٦) إستنتج أنّ $h = H$ علَى $D^*(0,1)$

تحليل مركّب٢ درسَات عليَا　　　الَاختبَار الفصلَى الأوّل　　　في سَاعتين

التمرين الَاول

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة ينسَان

٢) أوجد متتَابعة (a_n) من $D(0,1)^*$ بحيث $\sum_{1}^{\infty}(1-|a_n|^2)$ تكون متقَاربة

٣) بيّن أنّ $f_p=\prod_{n=1}^{p}(\frac{z-a_n}{z-\frac{1}{\bar{a}_n}})$ تحقّق $|f_p(z)|<1, \forall |z|<1$

٤) إستنتج أنّه توجد دَالة تحليليّة f علَى $D(0,1)$ تحقّق

$$f(0)\neq 0, \quad \forall n\in\mathbb{N}, f(a_n)=0, \quad \forall |z|<1, |f(z)|<1$$

٥) لتكن g دَالة تحليليّة و محدودة علَى $D(0,1)$ تحقّق $g(0)\neq 0$ و لتكن $\{y_k, k\in\mathbb{N}\}$ أصفَار g بيّن أنّ $\sum_{n\geq 0}Log(|y_n|)$ متقَاربة و من ثمّ فإنّ $\sum_{n\geq 0}(1-|y_n|^2)$ متقَاربة

التمرين الثَّاني

١) صوّر $P=\{x+iy\in\mathbb{C}, x+y>0\}$ و أوجد جميع التّحويلَات الحَافظة للزّوَايَا من P إلَى $D(1,2)$

٢) أوجد أصفَار الدَّالة $sin(e^{\frac{i\pi}{4}}z)$ و بين أنّه توجد بَالضبط ثلَاث دَوَال تحليليّة h علَى P تحقِّق $h^3(z)=sin(e^{\frac{i\pi}{4}}z)$

٣) بيّن أنّ كلّ دَالة توَافقيّة علَى P تسَاوِى الجزء الحقيقي لدَالة تحليليّة

٤) هل توجد تحويلَات حَافظة للزّوَايَا من $P\setminus\{i\}$ إلَى $\mathbb{C}^*$

التمرين الثَّالث

ليكن Ω نطَاق من $\mathbb{C}$ و f_n متَتَابعة من الدّوَال التّحليليّة علَى Ω تَتقَارب بإنتظَام علَى كلّ مترَاصّ من Ω إلَى دَالة f غير ثَابتة

١) بيّن كمَا جَاء في الدّرس أنّ f تحليليّة علَى Ω

٢) لنفترض أنّ $z_0\in\Omega$ هو صفر لِلدَالة f من الرتبة $m\in\mathbb{N}^*$

بيّن أنّه يوجد $r>0$ ، بحيث لكلّ $0<t<r$ ، يوجد $N_t\in\mathbb{N}$ يحقّق $\forall n>N_t$ فإنّ f_n لهَا بَالضبط m صفر (محسوبة برتبهَا) في القرص $D(z_0,t)$

٣) لنفترض أنّ f_n تبَاينَات علَى Ω

ا) بيّن أنّ f تبَاين علَى Ω و المشتقّة f' ليس لهَا أصفَار علَى Ω

ب) ليكن $a\in\Omega$ ، بيّن أنّه توجد متَتَابعة (a_n) من Ω تحقّق $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ و $\exists N\in\mathbb{N}, n>N \Rightarrow f_n(a_n)=f(a)$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الرياضيات ١٧ ربيع الثاني ١٤٢٧

تحليل مركب درسات عليا الاختبار الفصلي الثاني في ساعتين

التمرين الاول

١) ما نص نظرية متاق لفلر $Mittag\ Leffler$

٢) لكل $n \in \mathbb{N}$ و $k \in \mathbb{N}$ لتكن $a_{k,n} = \frac{2^n-1}{2^n} e^{i\frac{2\pi k}{n}}$

أ) بين أنه توجد دالة تحليلية f و محدودة على قرص الوحدة $D(0,1)$ بحيث تكون أصفارها هي $\{a_{k,n}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$.

ب) بين أنه لا توجد دالة $\widetilde{U}$ متصلة على $\overline{D(0,1)}$ و تساوي $\mathcal{R}e(f)$ على $D(0,1)$

٣) لكن (x_n) متتابعة من $\mathbb{C}$ بين أنه توجد دالة تحليلية g على قرص الوحدة $D(0,1)$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_{1,n}) = x_n$ يمكن الإعتماد على السؤالين السابقين.

التمرين الثاني

١) أورد نص نظرية ديركلي $Direchlet$ و تكامل پواسون $Poisson$ على القرص $D(z,R)$

و أوجد قيمة $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Log|(4+2e^{it})|dt}{5-4cos(t)}$

لنأخذ نطاق Ω من $\mathbb{C}$ و $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة توافقيةعلى Ω و $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة تحت التوافقية على Ω

٢) بين أنه إن وصلت v إلى قيمتها العظمى في $z \in \Omega$ فإن v تكون ثابتة

٣) إستنتج أنه إن كان $\overline{\{z \in \Omega, u(z) \neq v(z)\}}$ متراص من Ω فإنه $\forall z \in \Omega, u(z) \geq v(z)$

التمرين الثالث

١) ما مص نظرية پيكارد $Great\ Picard\ Theorem$ إستنتج منها نظرية پيكارد الصغرى.

٢) بين أنه لا يوجد تقابل تحليلي بين $\{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}$ و $\{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 2\}$

جامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الرياضيات ١٩ ربيع الأوّل ١٤٢٧

الاختبار الفصلي الأوّل تحليل مركّب ٢ دراسات عليا

التمرين الاول

لنأخذ قوسين أملسين مغلقين Γ و γ من نطاق Ω من $\mathbb{C}$ معرّفين على الفترة $[0,1]$ و f دالة تحليليّة على Ω ليس لها أصفار

١) ما تعريف Γ و γ متحاولين في Ω

برهن أنّ التحاول علاقة متعدّية ٠ و برهن كما في الدّرس أنّ $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ و أوجد قيمة $e^{\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz}$

٢) أورد نصّ مفوك لوران لدالّة تحليليّة على $\{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$ و بإستعمال ما سبق بيّن أنّ صيغة عوامل هذا المفكوك لا تعتمد على نصف القطر t حيث $r < t < R$

٣) لتكن $\psi(z) = (z-1)(z-2)e^{-z}$ لكلّ $r \geq 0$ أوجد قيمة $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|\psi(re^{it})|dt$

التمرين الثّاني

ليكن $P = \{x+iy \in \mathbb{C}, x > 0\}$ و لتكن $\lambda > 1$ و $g(z) = \lambda - z$ و $f(z) = \lambda - z - e^{-z}$

١) أوجد صيغة جميع التقابلات التّحليلية h من $D(0,1)$ إلى P التي تحقّق $h(0) = 1$

٢) أورد نصّ نظريّة روشي بيّن أنّه على حدود P لنا $|f-g| < |g|$

٣) إستنتج أنّ f لها صفر وحيد في P

٤) لتكن $f_n(z) = 1 + \frac{1}{n} - z - e^{-z}$ بيّن أنّ f_n تتقارب بإنتظام على P من دالة φ ٠ هل إنطلاقًا من رتبة معيّنة f_n و φ لهما نفس عدد الأصفار داخل P ٠ ما تعليقك

٥) هل يوجد تقابل تحليلي من $P \setminus \{i\}$ إلى $\mathbb{C}^*$

التمرين الثّالث

١) لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة تحليليّة تحقّق $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ بيّن أنّ f كثيرة حدود (يمكن الإعتماد على $f(\frac{1}{z})$)

لتكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ دالة تحليليّة وليست كثيرة حدود

٢) بيّن أنّ $h(z) = f(\frac{1}{z})$ ليست ميرومرفيّة في $\mathbb{C}$ و بيّن أنّ لكلّ $R > 0$ فإنّ $f(\{z \in \mathbb{C}, |z| > R\})$

يكون نطَاق كثيف فَي $\mathbb{C}$

٣) ليكن Δ نصف مستقيم من $\mathbb{C}$ (لَا يمرّ بضّرورة من الصّفر) ، أوجد دَالة تحليليّة و محدودة و غير ثَابتة علَى $\mathbb{C} \setminus \Delta$

٤) بيّن أنّ لكلّ $R > 0$ فإنّ $f(\{z \in \mathbb{C}, |z| > R\})$ يحتوَى علَى مَا لَا نهَاية من نقَاط Δ