الفصل الرابع

الدوال المتصلة والتكافؤ التوبولوجي
Continuous Functions and Topological Equivalence

مقدمة

درسنا في الفصل الثالث الفضاءات التوبولوجية و لاحظنا أن المجموعات المفتوحة تلعب دوراً رئيسياً في بناء هذه الفضاءات كما إنها تمثل عناصر التوبولوجي المعرف على مجموعة ما. و أيضا بعد دراستنا لمفهوم الدوال المتصلة بين الفضاءات المترية و الدور الذي تلعبه المجموعات المفتوحة في تحقيق مفهوم الاتصال لهذه الدوال سوف نحاول في هذا الفصل دراسة مفهوم اتصال الدوال في حالة غياب مفهوم الدالة المترية . في هذه الحالة سيتم تعريف الدوال المتصلة بين الفضاءات التوبولوجية، مع دراسة خواص الدوال المتصلة . أخيرا سنتعرض لمفهوم الدوال المفتوحة و الدوال المغلقة وكذلك التشاكل التوبولوجي.

(4.1) الدوال المتصلة Continuous functions

تعريف (4.1)

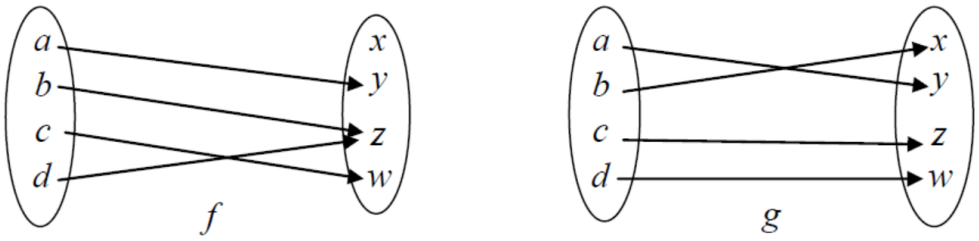
ليكن كل من (X,τ) و (Y,υ) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة

$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة إذا كان لأي مجموعة مفتوحة H في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة في X. أي أن

$$\forall\ H\in\upsilon\Rightarrow f^{-1}(H)\in\tau$$

مثال (4.1)

اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و التوبولـــوجي $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{y,z,w\}\}$ على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. فإذا كانت $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$ دالتين معرفتين بالمخطط التالي



شكل (4.1)

أولا : الدالة $f:X\to Y$ دالة متصلة لأن الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر التوبولوجي υ هي عنصر من عناصر التوبولوجي τ أي أنه :

$$\forall\ H\in\upsilon\Rightarrow f^{-1}(H)\in\tau\,.$$

ثانيا : الدالة $g:X\to Y$ ليست متصلة لأن المجموعة الجزئية $\{y,z,w\}$ تنتمي إلى υ في حين أن صورتها العكسية

$g^{-1}(\{y,z,w\})=\{a,c,d\}$ لا تنتمي إلى التوبولوجي τ .

ملاحظة:

بالرغم من كون الدالة f متصلة و لكنها لا تحافظ على صفة كون المجموعة

مفتوحة أو مغلقة، فمثلا $\{a,b\}\in\tau$ و لكن $f(\{a,b\})=\{y,z\}\notin\upsilon$ و ايضا المجموعة $\{d\}$ مغلقة في X ولكن $f(\{d\})=\{z\}$ ليست مغلقة في Y.

نظرية (4.1)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(F)$ تكون مغلقة في X.

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن $F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة إذاً F^C مجموعة مفتوحة. و علية فإن المجموعة $f^{-1}(F^C)$ مفتوحة في X . بما أن $f^{-1}(F^C)=(f^{-1}(F))^C\in\tau$. إذاً $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X.

من ناحية أخرى نفرض أنه لكل مجموعة مغلقة $F\subseteq Y$ يكون $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X ، و المطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة ،لذلك نفرض أن $G\subseteq Y$ مجموعة مفتوحة في Y، إذاً المجموعة G^C هي مجموعة مغلقة في Y، و عليه تكون $f^{-1}(G^C)$ مجموعة مغلقة في X، ولكن $f^{-1}(G^C)=(f^{-1}(G))^C$ ، إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة، ومن ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة .■

نظرية (4.2)

بفرض أن (X,τ)، (Y,υ)، (Z,δ) ثلاث فضاءات توبولوجية و أن كل من

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)\ \text{و}\ g:(Y,\upsilon)\to(Z,\delta)$$

دالة متصلة، فإن دالة التحصيل $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\delta)$ تكون متصلة.

البرهان

يترك للقارئ كتمرين. ■

نظرية (4.3)

الدالة $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ متصلة إذا و فقط إذا كان

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad , \quad \forall\ A \subseteq X$$

البرهان

نفرض أن الدالة $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ متصلة و أن $A \subseteq X$.

$$\because f(A) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

لكن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة، إذاً $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة لأن الدالة متصلة ، ولكن $\overline{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة A

$$\because A \subseteq \overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

من ناحية أخرى نفرض أن

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad , \quad \forall\ A \subseteq X$$

و المطلوب إثبات أن $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ دالة متصلة ، لذلك نفرض أن $F \subseteq Y$ مجموعة مغلقة و أن $A = f^{-1}(F)$ ، إذاً

$$f(\overline{A}) = f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

$$\therefore \overline{A} \subseteq f^{-1}(F) = A$$

∴ المجموعة A مغلقة، أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة هي أيضا مجموعة مغلقة ، ومن ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة .■

نظرية (4.4)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية لأي عنصر من عناصر الاساس (القاعدة) للتوبولوجي υ مجموعة مفتوحة في X.

البرهان

نفرض أولا أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن β_Y قاعدة للتوبولوجي υ. ليكن $B\in\beta_Y$. بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة ، فإن $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X.

ثانياً : نفرض أنه لأي عنصر $B\in\beta_Y$ يكون $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X ، و المطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة .

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y و حيث أن β_Y أساس ،فإن $B_i\in\beta_Y$ و $G=\underset{B_i\subseteq G}{\cup}(B_i)$ و عليه يكون

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\underset{B_i\subseteq G}{\cup}B_i)=\underset{B_i\subseteq G_Y}{\cup}f^{-1}(B_i)$$

و حيث أن $f^{-1}(B_i)$ مجموعة مفتوحة في X فإن $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة و من ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة .■

نظرية (4.5)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء

التوبولوجي (Y,υ) و لتكن S قاعدة جزئية للتوبولوجي υ. الدالة f تكون متصلة إذا وإذا فقط كانت الصورة العكسية لأي عنصر من عناصر Sمجموعة مفتوحة في X.

البرهان

يترك كتمرين للقارئ■.

نظرية (4.6)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا وإذا فقط كان :

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]$$

لكل $A\subseteq X$.

البرهان

أولاً نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة ، فإن $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$. بما أن $b(A)\subseteq\overline{(A)}$ و كذلك $\overline{f(A)}=f(A)\cup b(f(A))$ فيكون لدينا

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

ثانياً نفرض أن الدالة f تحقق الشرط:

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

و المطلوب إثبات أن الدالة f دالة متصلة .

لتكن $A\subseteq X$ فإن $\overline{A}=A\cup b(A)$ و منه ينتج أن:

$$f(\overline{A})=f(A)\cup f(b(A))$$

و لكن من الفرض نحصل على

$$f(\overline{A}) \subseteq f(A) \cup f(b(A))$$

و بما أن $\overline{f(A)} = f(A) \cup b(f(A))$ فإننا نحصل على أن

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \ , \ \forall \ A \subseteq X \ .$$

أي أن الدالة f متصلة .■

نظرية (4.7)

لتكن $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). إذا كانت $x_n \in X$ متتالية تقاربية بحيث أن $\lim x_n = x$ ، فإن $f(x_n) \in Y$ متتالية تقاربية ونهايتها $f(x)$.

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ متصلة و أن $x_n \to x$ و نريد إثبات أن $f(x_n) \to f(x)$. نفرض أن H هي جوار للنقطة $f(x)$ ، فإن $f^{-1}(H)$ هي جوار النقطة x و حيث أن $x_n \to x$ ، فإنه يوجد عدد n_0 بحيث أن $x_n \in f^{-1}(H)$ لكل $n \geq n_0$ وهذا يقتضي أن $f(x_n) \in H$ لكل $n \geq n_0$. أي أن $f(x_n) \to f(x)$.■

على القارئ ملاحظة أن عكس هذة النظرية ليس صحيحاً دائماً. و لكنة يكون صحيحاً في حالة كون الفضاء يحقق شرطاً ما يسمى مسلمة العد الأولى وهو ما يتحقق عندما يكون الفضاء قابل للتمتر كما في النظرية التالية:

نظرية (4.8)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي قابل للتمتر وأن (Y,υ) أي فضاء توبولوجي. الدالة $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لأي

متتالية تقاربية $x_n \to x$ في X ، فإن $f(x_n) \to f(x)$.

البرهان

إذا كانت الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن $x_n \to x$ فإن $f(x_n) \to f(x)$ كما رأينا من النظرية السابقة.

لاثبات العكس، نفترض أن شرط التقارب للمتتاليات متحقق (أي أن أنه إذا كان $x_n \to x$ فإن $f(x_n) \to f(x)$. نختار المجموعة $A \subseteq X$ و نحاول اثبات أن $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. إذا كانت $x \in \overline{A}$ فإنه ، (من نظرية (3.22)) ، توجد متتالية $(x_n)_n$ من نقاط A بحيث أن $x_n \to x$. بما أن $f(x_n) \in f(A)$ وبما أن $f(x_n) \to f(x)$ ، فإن $f(x) \in \overline{f(A)}$ ، من ثم يكون $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. ■

نظرية (4.9)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كان (A,τ_A) فضاءً جزئياً من (X,τ) فإن دالة التقيد $f|_A : A \to Y$ تكون متصلة على A .

البرهان

لتكن $f: X \to Y$ دالة متصلة. حيث أن $f|_A = f \cap (A\times Y)$ ، فإنه لأي دالة $g: A \to X$ بحيث أن $g(a) = a$ لكل $a \in A$ ، يمكن بسهولة ملاحظة أن الدالة $g: A \to X$ متصلة على A ومن ثم تكون دالة التحصيل $f|_A = f \circ g$ متصلة على A أيضا.■

في نهاية هذا الموضوع نستطيع القول ،بناءاً على الملاحظة على مثال (4.1) ، أن الدالة المتصلة ليس من الضروري أن تضمن نقل المجموعات

المفتوحة (المغلقة) من مجال الدالة إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في مجالها المقابل. الآن نقدم نوعاً من الدوال يضمن الحفاظ على صفة كون مجموعة مفتوحة أو مغلقة من المجال إلى المجال المقابل.

(4.2) الدوال المفتوحة و الدوال المغلقة Open and Closed Functions

تعريف (4.2)

ليكن كل من (X,τ) و (Y,υ) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

(1) دالة مفتوحة إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y.

(2) دالة مغلقة إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X ، هي مجموعة مغلقة في Y.

مثال (4.2)

بفرض أن $X=\{a,b\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ و $Y=\{x,y\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$. بفرض الدالتين التاليتين:

$$f:X\to Y \qquad\qquad g:X\to Y$$

$$f(a)=f(b)=x \qquad\qquad g(a)=y\ ,\ g(b)=x$$

واضح أن الدالة $f:X\to Y$ مفتوحة و ليست مغلقة ، لأن $\{b\}$مجموعة مغلقة بينما صورتها $f(\{b\})=\{x\}$ ليست مغلقة.

كما يتضح أيضا أن الدالة $g:X\to Y$ ليست مفتوحة ولا مغلقة (يمكن التأكد من ذلك).

مثال (4.3)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ و أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$ و أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(a)=f(b)=y \quad , \quad f(c)=x$$

واضح أن الدالة $f:X\to Y$ مغلقة و ليست مفتوحة.

يمكن للقارئ ملاحظة أن هناك دالة قد تكون مفتوحة و لكنها ليست مغلقة ، و العكس بالعكس .ولكن ما هو الشرط الضروري و الكافي لكي تحمل دالة ما الصفتين معا ، أي إنها تكون دالة مفتوحة و مغلقة في آن واحد.هذا الشرط يتحدد من خلال النظرية التالية:

نظرية (4.10)

دالة التقابل $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مفتوحة إذا و فقط إذا كانت مغلقة.

البرهان

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة مفتوحة ، وأن $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة،

$$F=(X-G):G\in\tau$$

و من ثم فإن

$$f(F)=f(X-G)=f(X)-f(G)=Y-f(G)$$

بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن $f(G)\in\upsilon$ و من ثم فإن $f(F)=Y-f(G)$ مجموعة مغلقة ، إذاً الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة.

و بالمثل يمكن إثبات الجزء الثاني من النظرية.■

نظرية (4.11)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء

التوبولوجي (Y,υ). الدالة f تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان

$$f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، و المطلوب إثبات أن

$f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ\ ,\ \forall\ A\subseteq X$ نفرض أن $A\subseteq X$ ، بما أن $A^\circ\subseteq A$ ،

فإن $f(A^\circ)\subseteq f(A)$ و علية فإن $f(A^\circ)$ مجموعة مفتوحة (لأن f دالة

مفتوحة) و من ثم فإن $f(A^\circ)=(f(A^\circ))^\circ\subseteq(f(A))^\circ$. أي أن

$$f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ$$

ثانيا: نفرض أن الشرط : $f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ\ ,\ \forall\ A\subseteq X$ متحقق ،

والمطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة. لإثبات ذلك نختار

$G\in\tau$ مجموعة مفتوحة في X . من الشرط نجد أن

$$f(G)=f(G^\circ)\subseteq(f(G))^\circ$$

و لكن من المعلوم أن $(f(G))^\circ\subseteq f(G)$ ، إذاً $f(G)=(f(G))^\circ$ ، أي أن

$f(G)$ مجموعة مفتوحة و من ثم ، فإن الدالة f مفتوحة.■

نظرية (4.12)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان

$$\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A}),\quad \forall\ A\subseteq X\ .$$

البرهان

أولاً: نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة و أن $A\subseteq X$. بما أن

$A\subseteq\overline{A}$ ، فإن $f(A)\subseteq f(\overline{A})$.

بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة، فإن $f(\overline{A})$ مجموعة مغلقة تحتوي $f(A)$ و من ثم نجد أن $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$.

ثانياً: نفرض أن الشرط $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A}),\quad \forall\ A\subseteq X$ متحقق ، و بفرض أن $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة .بوضع $A=F$ في الشرط نجد أن:

$$f(F)\subseteq\overline{f(F)}\subseteq f(\overline{F})=f(F)$$
$$\therefore\ \overline{f(F)}=f(F)$$

أي أن $f(F)$ مجموعة مغلقة، وعلية فإن الدالة

$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة.■

(4.3) التشاكل (التكافؤ) التوبولوجي Homeomorphisms

بعد أن تعرفنا على مفهوم كل من الدوال المتصلة و الدوال المفتوحة والدوال المغلقة و لاحظنا أن الدوال المتصلة ليس من الضروري أن تنقل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من المجال إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في المجال المقابل. لذا نقول أن الدوال المتصلة فقط لا تحافظ على هذه الخاصية .

ورب قائل أنه لو أضفنا إلى الدالة المتصلة صفة كونها مفتوحة، فهذه الدالة تستطيع الحفاظ فقط على خواص المجموعات المفتوحة دون المغلقة. وللحصول على نوع من هذه الدوال و التي تحافظ على صفة المجموعة سواء كانت مفتوحة أو مغلقة عندما تنقلها من المجال إلى المجال المقابل يجب أن تكون هذه الدوال تقابل بالإضافة إلى كونها متصلة و مفتوحة.

أهمية هذا النوع من الدوال لا تقتصر على الحفاظ فقط على صفات المجموعات من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة بل تتعدى ذلك للعديد من الخواص الأخرى التي تحفظ تحت تأثير مثل هذه الدوال وهذه تسمى الخواص

التوبولوجية. ومن أجل ذلك سوف نطلق على هذا النوع من الدوال أسم الدوال التوبولوجية أو التشاكل التوبولوجي.

تعريف (4.3)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) تسمى دالة توبولوجية (تشاكل توبولوجي) إذا و فقط إذا كانت تقابل و متصلة و مفتوحة. كما يقال للفضائيين (X,τ) و (Y,υ) أنهما متكافئين توبولوجياً أو متشاكلين إذا و فقط إذا وجد بينهما تشاكل و يعبر عن ذلك بالرمز $(X,\tau)\cong(Y,\upsilon)$ وأحيانا يكتب $X\cong Y$.

مثال (4.4)

بفرض أن $f:X\to Y$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x)=(b-a)x+a\ ,\ x\in X\ a,b\in R$$

حيث أن $X=[0,1]$، $Y=[a,b]$ مع اعتبار التوبولوجي المعتاد على $[0,1],[a,b]$. هذه الدالة متباينة (وضح ذلك؟)

نفرض أن $y\in[a,b]$ و أن $f(x)=(b-a)x+a=y$ و منها نحصل على أن $x=\frac{y-a}{b-a}=f^{-1}(y)\in[0,1]$ و هذا يؤكد أن الدالة f شاملة وبالتالي فإن الدالة العكسية تكون موجودة. كما يمكن ملاحظة أن الدالة $f:X\to Y$ مفتوحة لأنه بفرض المجموعة المفتوحة $B=(x,y)\subseteq X$ حيث أن $0\le x<y\le 1$.فإن صورة هذه المجموعة تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned}f(B)&=f(x,y)=((b-a)x+a,(b-a)y+a)\\&=(c,d)\subseteq[a,b]\end{aligned}$$

لأن

$$c=(b-a)x+a,\ 0\le x\le 1$$
$$\le (b-a)+a=b$$

كما أن $c\ge a$ لأنه إذا كانت $c<a$ فإن هذا يعني أن

$$(b-a)x+a=c<a,\Rightarrow (b-a)x<0$$
$$\therefore (b-a)<0$$

وهذا تناقض. و عليه فإن $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y. لاحظ أن

$f(X)=Y$ و $f(\phi)=\phi$.

أيضاً هذه الدالة متصلة لأنه بفرض أن $H=(\alpha,\beta)\subseteq[a,b]$ مجموعة جزئية مفتوحة في Y حيث أن $a\le\alpha<\beta\le b$. فإن

$$f^{-1}(H)=\left(\frac{\alpha-a}{b-a},\frac{\beta-a}{b-a}\right)\subseteq[0,1]=X$$

فهذا يعني أن المجموعة $f^{-1}(H)$ مفتوحة في X وأن $f^{-1}(Y)=X$ وكذلك $f^{-1}(\phi)=\phi$. إذاً هذه الدالة هي تقابل متصل و مفتوح و من ثم فهي دالة توبولوجية .إذاً $[a,b]\cong[0,1]$.

مثال (4.5)
في المثال السابق يتضح أن خاصية الطول ليست توبولوجية . فمثلاً بإختيار $a=0, b=7$.يتضح المطلوب.

مثال (4.6)
خاصية كون الفضاء المتقطع (Discrete) هي خاصية توبولوجية.؟

الحل
بفرض أن الدالة $f:(X,D)\to(Y,D)$ تقابل. حيث أن كل مجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ في الفضاء المنفصل مفتوحة فإن كل مجموعة $\{f(x)\}=\{y\}$ هي

أيضا مفتوحة. إذاً f هوميومورفيزم و من ثم يكون $(X,D) \cong (Y,D)$.

نظرية (4.13)

بفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تقابل .العبارات التالية متكافئة:

(i) الدالة f توبولوجية .

(ii) الدالتان f وf^{-1} متصلتان.

(iii) الدالة f متصلة و مغلقة.

(iv) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان

$(i) \Leftarrow (ii)$ نفرض أن f دالة توبولوجية، فإنها تكون متصلة و مفتوحة لإثبات أن الدالة $g = f^{-1}:(Y,\upsilon)\to(X,\tau)$ متصلة نفرض أن $A \subseteq X$ مجموعة مفتوحة. بما أن الدالة f مفتوحة فإن $g^{-1}(A) = f(A) \in \upsilon$ و هذا يعني أن الدالة f^{-1} متصلة.

$(iii) \Leftarrow (ii)$

نفرض أن كل من الدالة f و الدالة f^{-1} متصلة. و نفرض أن $F \subseteq X$.مجموعة مغلقة . بما أن الدالة f^{-1} متصلة فإن $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة و عليه تكون الدالة f مغلقة . إذاً الدالة f متصلة و مغلقة.

$(iv) \Leftarrow (iii)$

نفرض أن الدالة f متصلة و مغلقة. بما أن الدالة f متصلة فإنه من نظرية (4.3) نحصل على:

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \text{.....(1)}$$

بما أن الدالة f مغلقة فإنه من نظرية (4.12) نحصل على:

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) \quad \text{.....(2)}$$

من (1) و (2) نحصل على

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \text{ لكل } A \subseteq X .$$

$$(i) \Leftarrow (iv)$$

نفرض أن $B \subseteq Y$ مجموعة مغلقة ، إذاً $f^{-1}(B) \subseteq X$ و باستخدام البند (iv) نجد أن

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} = B$$

و عليه يكون $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$.أي أن $f^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة وهذا يعني أن الدالة f متصلة. لأثبات أن الدالة f مفتوحة نفرض $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة فإنه من (iv) نجد أن $f(F) = f(\overline{F}) = \overline{f(F)}$ وهذا يعني أن $f(F)$ مجموعة مغلقة. إذاً الدالة f مغلقة و بما أنها تقابل فإن الدالة f مفتوحة و من ثم تكون دالة توبولوجية .■

تمـــارين (4.1)

(1) برهن أن الدالة الثابتة من أي فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر هي دالة متصلة .

(2) بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي و أن (A, τ_A) فضاء جزئي من (X, τ) . برهن أن دالة الاحتواء $i : A \to X$ تكون متصلة .

(3) إذا كانت $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X, τ)

إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) فبرهن أن :

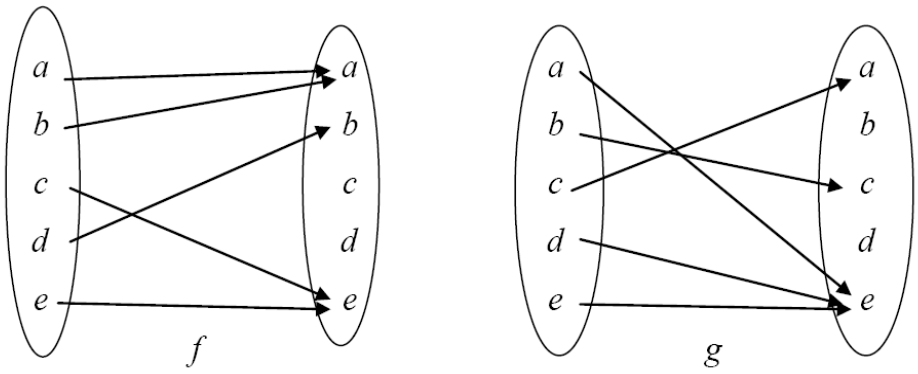
(i) f تكون متصلة إذا وفقط إذا كان

$$f^{-1}(A^o)\subseteq(f^{-1}(A))^o \quad \forall A\subseteq Y$$

(ii) f تكون متصلة إذا و فقط إذا كان

$$f(B^{\backslash})\subseteq f(B)\cup(f(B))^{\backslash}$$ لكل $B\subseteq X$.

(4) إذا كان $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $f,g:(X,\tau)\to(X,\tau)$ دالتن معرفتين كما يلي:



- أي من f,g دالة متصلة
- أي من f,g دالة مفتوحة
- أي من f,g دالة مغلقة
- أي من f,g دالة توبولوجية

(5) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة متصلة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة متصلة .

(6) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مفتوحة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مفتوحة.

(7) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مغلقة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مغلقة.

(8) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة توبولوجية ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة توبولوجية.

(9) إذا علم أن $\tau=\{X,\phi,\{b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$ توبولوجي على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. عرف دالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ بحيث تكون:

- متصلة
- مفتوحة و غير مغلقة
- مغلقة وغير مفتوحة

(10) برهن أن $(-1,1)\cong(0,1)$. استخدم الدالة

$$f(x)=2x-1,\ \forall x\in(0,1)$$

(11) مستخدما الدالة

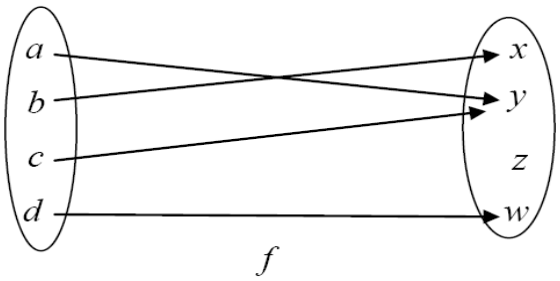
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & ,-1<x<0\\[2ex] \dfrac{x}{1-x} & ,0\le x<1\end{cases}$$

لإثبات أن $(-1,1)\cong R$

(12) إثبت أن $R\cong(0,1)$.

(13) هل يوجد هميومورفيزم بين R و $[0,1]$؟.

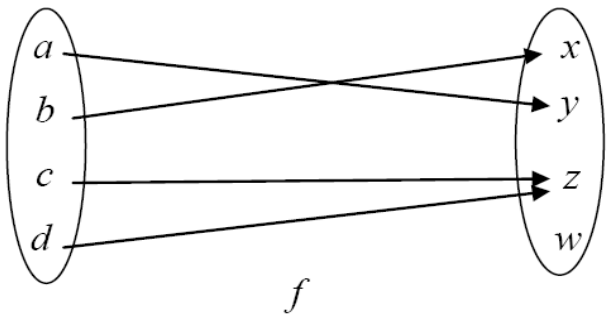
(14) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ $Y=\{x,y,z,w\}$ و أن $f:X\to Y$ معرفة بالمخطط الآتي:



وبفرض أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{y,z\},\{x,y,z\},\{y,z,w\}\}$ توبولوجي على Y.

- عرف توبولوجي على X يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة و مغلقة..
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f دالة توبولوجية.

(15) إذا كانت $\tau=\{X,\phi,\{a,b\},\{c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ ، بفرض أن $Y=\{x,y,z,w\}$ و أن $f:X\to Y$ دالة معرفة بالمخطط الآتي:



- عرف توبولوجي على Y(إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة ولا مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.

(16) ليكن (X,d) فضاءً متريا . بين أن $(X,\frac{d}{1+d}) \cong (X,d)$.

(17) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين $[0,1]$ و $[a,b]$؟.

(18) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين $(0,1)$ و $[a,b)$؟.

(19) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين R و $\{(x,y) \in R^2 : xy = 0\}$؟.