جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات

التَحلِيل الحقيقي ١

د. حسين المير 035699511 $hassine\_elmir@yahoo.fr$

المحتوَى

الإتّصَال و الإتّصَال المنتظم لِلدّوَال الحقيقيّة تّفَاضل الدّوَال الحقيقيّة. نظريّة القيمة المتوسّطة. نظريّة لوبيدتل تكَاملَات ريمَان. اَلنظريّة الأسَاسيّة لِلتّفَاضل و التّكَامل. نظريّة تيلور $Taylor$. متتَابعَات و متسلسلَات الدّوَال. اَلتّقَارب المنتظم

المرَاجع

1- D. Edwards " Introduction to Analysis" Editionpublishing company 1998

2- K.Ross " Elementary analysis The theory of Calculus" Springer-Verlag 2001

3- G.Bartle " Introduction to Real Analysis " John Wiley & Sons 1999

4- مبَادِئ التّحليل الحقيقي الجزء الثَّالث صَالح عبد اللّه السّنوسي و كمَال عبد الرّحمَان و محمّد عبد الرّحمَان القويز

التّقيِّيم

الدّرجة الفصليّة ٦٠

اَلدّرجة النّهَائيّة ٤٠

اَلدّوَال المتّصلة

تعريف

لتكن $A \subset \mathbb{R}$ و $a \in A$ و $f : A \to \mathbb{R}$ نقول أَنّ الدَّالة f متّصلة عند a إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق الشرط التَّالي : مهمَا كَانت المتَتَابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من نقَاط A التي تَتقَارب من a فإِن $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ تَتقَارب من $f(a)$ و هذَا يتكَافَأُ مع الشرط التَّالي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

نقول أَنّ الدَّالة f متّصلة علَى A إِن كَانت متّصلة عند جميع نقَاط A

أمثلة

$$f(x) \;\; = \{^{1 \;\; , \;\; x>0}_{0 \;\; , \;\; x\leq 0}$$

هي دَالة متّصلة علَى $\mathbb{R}^*$ و لكنّهَا ليست متّصلة عند الصفر ذلك أنّ $(x_n = \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من الصفر فِي حين أنّ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ لَا تَتقَارب من $f(0)$ ·

أمَّا الدَّلة

$$f(x) \;=\{\begin{smallmatrix}1 \;,\; x\in\mathbb{Q}\\ 0 \;,\; x\notin\mathbb{Q}\end{smallmatrix}$$

فهي دَالة ليست متّصلة عند جميع نقَاط $\mathbb{R}$ ذلك أنّ $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$ أي $\forall a\in\mathbb{R}$ توجد متَتَابعة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من نقَاط $\mathbb{Q}$ تَتقَرب من a فإِذَا كَان $a\notin\mathbb{Q}$ فإِنّ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من 1 في حين أنّ $f(a)=0$. أمَّا إِذَا كَان $a\in\mathbb{Q}$ فإِنَّا نستعمل بنفس الطّريقة كثَافة $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

نظرية

لتكن $A\subset\mathbb{R}$ و $a\in A$ و $f:A\to\mathbb{R}$ و $g:A\to\mathbb{R}$ دَالتين متّصلتين عند a فإِنّ $f+g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ إِن كَان $g(a)\neq 0$ تكون دوَال متّصلةعند a و كذلك تحصيل الدّوَال المتّصلة يكون متّصل.

تمَارين

١) برهن النظرية السَّابقة و إِستنتج أنّ كلّ كثيرة حدود $P\in\mathbb{R}[X]$ هي دَالة متّصلة.

٢) لتكن $E(x)$ دَالة الصّحيح أي $E(x)$ أكبر عدَد صحيح أصغر من x ، أوجد نقَاط إِتّصَال $E(x)$ و $xE(x)$

٣) أوجد دَالة معرّفة علَى $\mathbb{R}$ متّصلة فقط عند الصّفر

٤) هل صحيح أنّ f تكون متّصلة إِذَا و فقط إِذَا كَانت $|f|$ متّصلة

٥) أوجد جميع الدّوَال المحقّقة لِلشرطين التَّالين

$1)\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$ و $2)\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=f(x)f(y)$

و أوجد جميع الدّوَال المتّصلة عند 0 المحقّقة لِلشرط الأوّل

تعريف

لتكن $A\subset\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$ نقول أَنّ الدَّالة f تصل إِلَى قِيمتهَا العظمَى إِن وجد $x_0\in A$ بحيث

$$\forall x \in A, f(x_0) \geq f(x),$$

و نقول أَنّ f تصل إِلَى قِيمتهَا الصغرَى إِن وجد $y_0 \in A$ بحيث

$$\forall y \in A, f(y_0) \leq f(y)$$

مثَال

الدَالة $f(x) = x$ لَا تصل إِلَى قِيمتهَا العظمَى و لَا الصغرَى علَى الفترة $]0,1[$ في حِين أَنّهَا تصل إِلَى كلتيهمَا علَى $[0,1]$

نظرية

كلّ دَالة $f: \ [a,b] \to \mathbb{R}$ مُتّصلة تصل إِلَى قِيمتهَا العظمَى و الصغرَى في $[a,b]$

برهَان

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتَابعة من $[a,b]$ بحيث $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ بمَا أنّ $[a,b]$ فترة محدودة و مُغلقة فإِنّه توجد متتَابعة جزئِية (x_{n_k}) متقَاربة من $x \in [a,b]$ و بهذَا نتحصّل علَى $f(x) = \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

و بنفس الطّريقة نبيّن أنّ f تصل إِلَى قِيمتهَا الصغرَى في $[a,b]$.

ملَاحظَات

لقد إِستعملنَا في هذَا البرهَان نتيجتين بَالغتي الأَهمية.

١) كلّ متتَابعة من فترة محدودة و مغلقة $[a,b]$ لهَا متتَابعة جزئِية متقَاربة من عنصر x من $[a,b]$.

٢) لكلّ $A \subset \mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$ توجد متتَابعة x_n من عنَاصر A بحيث

$$\sup_{x\in A} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

كمَا نلَاحظ أنّ كلّ دَالة $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ مُتّصلة تكون حتمَا محدودة. ذلك أنّه يوجد عنصرين $x_0\in[a,b]$ و $y_0\in[a,b]$ بحيث

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_0) \quad \text{و} \quad m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=f(y_0)$$

نظرية القيمة الوسطيّة

إِذَا كَانت $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و $f(a)<k<f(b)$ فإِنّه يوجد $s\in[a,b]$ بحيث $f(s)=k$

برهَان

ليكن $s=sup\{t\in[a,b], f(t)\leq k\}$ عندنَا $s\in]a,b[$ بمَا أنّ f دَالة مُتّصلة فإِنّ $f(s)\leq k$ لنفترض أنّ $f(s)<k$ و ليكن $\varepsilon=k-f(s)>0$ فالَاتّصَال يحتّم وجود $\delta>0$ بحيث

$$|x-s|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(s)|<\varepsilon$$

إِذًا $f(s+\delta)\leq k$ و هذَا يتعَارض مع تعريف s .

ملَاحظَات

١) ليدقّق القَارِئ لمَاذَا $s\in]a,b[$ و لمَاذَا يمكن أن نختَار δ بحيث $(s+\delta)\in]a,b[$

٢) إِذَا كَانت $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و $f(a)\geq k\geq f(b)$ فبإِعتمَاد $(-f)$ بين أنّه يوجد $s\in[a,b]$ بحيث $f(s)=k$

٣) إِذَا كَانت $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ و $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ فإِنّ $f([a,b])=[m,M]$,

تمَارين

١) هل صحيح أنّه فِي هذه الحَال $f([a,b])=[f(a),f(b)]$

٢) أثبت أنّ نظرية القيمة الوسطيّة تبيّن أنّ صورة كلّ فترة بدَالة متّصلة تكون فترة

(حتَّى و لو كَانت الفترة غير مغلقة.)

٣) بيّن أنّ لكلّ دَالة متّصلة $f:[0,1]\to[0,1]$ يوجد $x\in[0,1]$ بحيث $f(x)=x$

٤) بين أنّ كلّ كثيرة حدود ذَاتي درجة فرديّة تكون دَالة شَاملة علَى $\mathbb{R}$ و أنّ كلّ كثيرة حدود ذَاتي درجة زوجيّة تكون دَالة غير شَاملة علَى $\mathbb{R}$.

٥) إِذَا كَانت $f:[0,1]\to]0,+\infty[$ دَالة متّصلة بيّن أنّه يوجد $a>0$ بحيث

$$\forall x\in[0,1], f(x)\geq a$$

هل تبقَى نفس النتيجة صحيحة إِذَا عوّضنَا فِي هذَا السُّؤَال $[0,1]$ بالمجموعة $]0,1[$

٦) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة بحيث $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$ بين أنّ f تصل إِلَى قِيمتهَا العظمَى أو الصغرَى. هل تصل حتمًا إِلَى كلتيهمَا. بين أنّ f ليست تبَاين.

٧) لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة بحيث $\forall x\in[0,1],\ \ \exists y\in[0,1],\ \ f(y)\geq 2f(x)$ بيّن أنّ f دَالة سَالبة

تعريف

لتكن $A\subset\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$ نقول أَنّ الدَّالة f منتظمة الاَتّصَال إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق الشرط التَّالي

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall a\in A,\forall x\in A,|x-a|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$$

ملَاحظة

نعرف أَنّ الدَّالة f متّصلة علَى A إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق الشرط التَّالي

$$\forall a\in A,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in A,|x-a|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$$

نفس العبَارَات فقط مكَان $\forall a\in A,$ تغيّر و المعنيَان مختلفَان تمَامًا فِي الاَتّصَال المنتظم δ تعتمد علَى ε فقط فِي حين أنّ في الاَتّصَال عند جميع نقَاط A فإِنّ δ تعتمد علَى a و ε في الكتَابة الريَاضية كل متغيرة تعتمد عَادة علَى مَاسبقهَا و لَا تعتمد علَى مَا بعدهَا من المتغيّرَات.

أمثلة

١) الدَالة $f(x) = 2x$ تكون منتظمة الاتّصَال علَى $\mathbb{R}$ ذلك أنّه لكلّ $\varepsilon > 0$ فإنّ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ تحقّق الشرط المطلوب في التعريف.

٢) أمَا $f(x) = x^2$ فإنّهَا غير منتظمة الاتّصَال علَى $\mathbb{R}$ ذلك أنّه إذَا كَانت $\varepsilon = 1$ فمهمَا كَانت $\delta > 0$ فإنّ $x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ و $y = \frac{1}{\delta}$ تحقّقَان $|x - y| < \delta$ في حين أنّ $|x^2 - y^2| > 1$ المهم هو مَا لم نذكره و هو كيف وجدنَا x و y.

نظرية

كلّ دَالة $f : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ مُتّصلة علَى فترة محدودة و مغلقة تكون منتظمة الاتّصَال

برهَان

إذَا كَانت f غير منتظمة الاتّصَال فإنّه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث مهمَا كَانت $n \in \mathbb{N}$ يوجد x_n و y_n في $[a, b]$ بحيث $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ في حين أنّ $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ بمَا أنّ $[a, b]$ فترة محدودة و مُغلقة فإنّه توجد متتَابعة جزئيّة (x_{n_k}) متقَاربة من $x \in [a, b]$ و هذَا يحتّم أنّ (y_{n_k}) تتقَارب من x. إذًا $\lim f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) = f(x) - f(x) = 0$ و هذَا يتعَارض مع $\forall n_k, |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon$

تمَارين

١) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة بحيث $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ بين أنّ f منتظمة الاتّصَال علَى $\mathbb{R}$

٢) بين إن كَانت f دَالة منتظمة الاتّصَال فإنّ صورة كلّ متتَابعة كوشية تكون كوشية و إستِنتج أنّ لكلّ دَالة f منتظمة الاتّصَال علَى $\mathbb{Q}$ توجد دَالة وحيدة g منتظمة الاتّصَال علَى $\mathbb{R}$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$$

٣) هل الدَالة $f(x) = \frac{1}{x}$ منتظمة الاتّصَال علَى $]0, 1[$ هل هي منتظمة الاتّصَال علَى

$]1,+\infty[$ نفس السؤَال بَالنسبة $g(x)=x^3$

٤) لتكن f دَالة منتظمة الاَتّصَال علَى $[a,b]$ بين أنّه $\forall \varepsilon>0$ توجد دَالة سلّميّة (ثَابتة علَى فترَات) g_ε بحيث

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

نصيحة علَى الطَالب أن يكتشف مَا لم يتمّ إِثبَاته ثمّ يثبته فمثلًا في أوّل تعريف علَى الطَالب أن يبرهن تكَافُؤَ الشرطين

التّفَاضل

تعريف

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ و $x_0\in]a,b[$ نقول أنّ العدَد الحقيقي l هو مشتقّة f عند x_0 إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$$

عندهَا نكتب $l=f'(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

أمثلة

١) اَلدَّالة $f(x)=x^2$ تحقِّق

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$$

٢) أمَّا الدَّالة $g(x)=|x|$ تحقِّق $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\{\begin{smallmatrix}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{smallmatrix}$ إِذًا $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ غير موجود و بهذَا تكون g غير قَابلة لِلإِشتقَاق عند الصفر

نظرية

إِذَا كَانت $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ قَابلة لِلإِشتقَاق عند $x_0\in]a,b[$ فإِنّهَا تكون متّصلة عند x_0

برهَان

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}x-x_0=l.0=0$$

ملَاحظَات

١) إِذَا وضعنَا $h=x-x_0$ و $\varepsilon(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$ فإِنَّنَا نتحصّل علَى

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$$

إذًا f قَابلة لِلإشتقَاق عند x_0 و مشتقّهَا l إذًا و فقط إذًا وجدت دَالة $\varepsilon(h)$ تحقّق $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(h)=0$ بحيث $f(x_0+h)-f(x_0)=hl+h\varepsilon(h)$

٢) لقد إشترطنَا فِي التّعريف x_0 فِي المفتوح $]a,b[$ حتَى تكون $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ معرّفة علَى يمين و شمَال x_0

نظرية (صيغ اَلمشتقَات)

إذَا كَانت $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ و $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ قَابلتين لِلإِشتقَاق عند $x_0\in]a,b[$ فإِنّ $f+g$ و fg تكونَان قَابلتين لِلإِشتقَاق و تحقّقَان

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$$

و إذَا أضفنَا أنّ $g(x_0)\neq 0$ فإِنّ $\frac{f}{g}$ تكون قَابلةلِلإِشتقَاق و تحقّق

$$(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

برهَان

علَى سبيل المثَال

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

إذًا

$$(fg)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$$

أمثلة

١) إذَا كَانت $P(x)=a_0+..+a_nx^n$ كثيرة حدود فإِنّ $P'(x)=a_1+..+na_nx^{n-1}$

٢) و كذَالك

$$sin'(x) = cos(x), \qquad cos'(x) = -sin(x)$$

إذًا

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \ tan'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

٣) أمَّا الدَّالة اللّوغَارتميّة و الأسّية فتحقّقَان

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, (Ln(|x|))' = \frac{1}{x}$$

نظرية (مشتقة اَلتّحصيل)

إِذَا كَانت $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ لهَا مشتقّتهَا عند $x_0 \in]a, b[$ و $g :]c, d[\to \mathbb{R}$ لهَا مشتقّتهَا عند $f(x_0) \in]c, d[$ فإِنّ $g \circ f$ لهَا مشتقّتهَا عند x_0 و لنَا

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

برهَان

بمَا أنّ f قَابلة لِلتّفَاضل عند a فإِنّ

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$$

حيث $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

و بمَا أنّ g قَابلة لِلتّفَاضل عند $f(a)$ فإِنّ

$$g(f(a) + k) - g(f(a)) = kg'(f(a)) + k\varepsilon_1(k)$$

حيث $\lim_{k\to 0} \varepsilon_1(k) = 0$

بوضع $k = hf'(a) + h\varepsilon(h) = f(a + h) - f(a)$ ينتج

$$g(f(a+h))-g(f(a)) = hg'(f(a))f'(a)+g'(f(a))(h\varepsilon(h))+[hf'(a)+h\varepsilon(h)]\varepsilon_1(hf'(a)+h\varepsilon(h))$$

إذًا

$$g(f(a+h))-g(f(a))=[g'(f(a)).f'(a)](h)+h\varepsilon_2(h)$$

حيث $\varepsilon_2(h)=[g'(f(a))](\varepsilon(h))+[f'(a)+\varepsilon(h)]\varepsilon_1(hf'(a)+h\varepsilon(h))$ بما أنّ $\lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0$

إذًا $g\circ f$ تكون قابلة لِلتّفاضل عند a و لنَا

$$(g\circ f)'(a)=[g'(f(a))].f'(a)$$

تطبيق

إذَا كَانت $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ قَابلة لِلإشتقَاق عند $x_0\in]a,b[$ فإنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,(f^n)'(x_0)=nf^{n-1}(x_0)f'(x_0)$$

برهَان

ذلك أنّه إن كَانت $g(x)=x^n$ فإنّ $g'(x)=nx^{n-1}$ و $f^n=g\circ f$ ، إذًا

$$(f^n)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)=nf^{n-1}(x_0)f'(x_0)$$

تعريف

إذَا كَانت $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ قَابلة لِلإشتقَاق و f' قَابلة لِلإشتقَاق عند x_0 نعرّف $f^{(2)}(x_0)=(f')'(x_0)$ و بالإستقرَاء نعرّف $\forall n\in\mathbb{N}^*,f^{(n)}(x_0)=(f^{(n-1)})'(x_0)$
نقول أنّ $f\in\mathcal{C}^n(]a,b[)$ إن كَانت $f^{(n)}$ متّصلة.

إن كَانت $\forall n\in\mathbb{N}^* f\in\mathcal{C}^n(]a,b[)$ فنقول أنّ $f\in\mathcal{C}^\infty(]a,b[)$ و نقول أنّ $f\in\mathcal{C}^0(]a,b[)$ إن كَانت متّصلة.

أمثلة

١) كلّ كثيرة حدود $P(x)=a_0+a_1x+..+a_kx^k$ تنتمَى إلَى $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ و تحقّق

$$\forall n>k,P^{(n)}=0$$

٢) اَلدَّالة $f(x)=\{^{0,}_{x^3sin(\frac{1}{x}),}\ ^{x=0}_{x\neq0}$ تنتمَى إِلَى $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ و لَا تنتمَى إِلَى $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

نظرية

إِذَا كَانت $f\in\mathcal{C}^n(]a,b[)$ و $g\in\mathcal{C}^n(]a,b[)$ فإِنّ $fg\in\mathcal{C}^n(]a,b[)$ و لنَا

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

برهَان

بالإِستقرَاء الريَاضي إِذَا كَان $n=1$ نعرف أنّ $(fg)'=g'f+f'g$ لنفترض أنّ الصّيغة متحقِّقة إِلَى الرتبة n فإِنّ

$$(fg)^{(n+1)}=[(fg)^{(n)}]'=[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}g^{(n-k)}]'$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}g^{(n-k+1)}$$

و بوضع $s=k+1$ فِي الجّمع القبل الأخير و $s=k$ فِي الجّمع الأخير فإِنّ

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k+1)}g^{(n-k)}=\sum_{s=1}^{n+1}\frac{n!}{(s-1)!(n-s+1)!}f^{(s)}g^{(n-s+1)}$$

و بمَا أنّ

$$=\sum_{s=1}^{n+1}\frac{n!}{(s-1)!(n-s+1)!}f^{(s)}g^{(n-s+1)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{n!}{(s-1)!(n-s+1)!}f^{(s)}g^{(n-s+1)}+f^{(n+1)}g$$

إِذًا

$$[(fg)^{(n+1)}]=f^{(n+1)}g+fg^{(n+1)}+\sum_{s=1}^{n}(\frac{n!}{(s-1)!(n-s+1)!}+\frac{n!}{s!(n-s)!})f^{(s)}g^{(n-s+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n!}{k!(n+1-k)!} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

نظرية

إِذَا كَانت $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ قَابلة لِلإِشتقَاق عند $x_0 \in]a,b[$ و تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى أو الصغرَى عند x_0 فإِنّ $f'(x_0) = 0$

برهَان

لنفترض أنّ f تصل إِلَى قيمتهَا الصغرَى عند x_0 اذًا $\forall x \in]a,b[, f(x) \geq f(x_0)$ و بهذَا يكون $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ و $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ إِذَا

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

نستطيع أن نثبت بنفس الطّريقة أو بإِعتمَاد $(-f)$ أنّه إِن كَانت f تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى عند x_0 فإِنّ $f'(x_0) = 0$

كتطبيق للنّظريّة السَّابقة يمكن ان نجد أكبر مسَاحة لمستطيل طول محيطه 4 متر

نظرية (رول $Rolle$)

لتكن $a < b$ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و قَابِلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ و تحقّق $f(a) = f(b)$ فإِنّه يوجد $c \in]a,b[$ بحيث

$$f'(c) = 0$$

برهَان

بمَا أنّ f متّصلة فإِنّهَا تصل إِلَى قيمتهَا الصغرَى m عند $c_1 \in [a,b]$ و تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى M عند $c_2 \in [a,b]$. إِذَا كَانت $m = M$ فإِنّ f تكون ثَابتة و أيّ $c \in]a,b[$ تفِي بَالغرض. أمَّا إِذَا كَان $m < M$ فإِمَّا $c_1 \in]a,b[$ عندهَا $f'(c_1) = 0$ و إِمَّا $c_2 \in]a,b[$ عندهَا $f'(c_2) = 0$

أمثلة

مَا هي القيمة العظمَى لِلدَّالة $f(x)=e^{-x^2+x+1}$ اذَا كَان $1 \geq |x|$ فإِنّ $-x^2+x \leq 0$ إِذًا $f(x) \leq e$ علَى $[-1,1]$ الدَّالة المتّصلة f تصل إِلَى قيمتهَا العظمَى عند $c \in [-1,1]$ لأنّ الفترة محدودة و مغلقة لو كَانت $c \in]-1,1[$ لكَان $f'(c)=0$ و بمَا أنّ $f'(x)=(-2x+1)e^{-x^2+x+1}$ فإِنّ $c=\frac{1}{2}$ و بذَالك تكون القيمة العظمَى هي فعلًا $f(\frac{1}{2})=e^{\frac{5}{4}}$ لأنّ $f(\frac{1}{2})>f(1)>f(-1)$ · نلَاحض أنّ f لَا تصل إِلٰى قيمتهَا الصّغرَى لأنّه لَا توجد نقطة ثَانية $x \in \mathbb{R}$ تحقّق $f'(x)=0$ ·

نظرية القيمة المتوسّطة $(mean\ value\ theorm)$

لتكن $a<b$ و $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و قَابِلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ فإنّه يوجد $c \in]a,b[$ بحيث

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

برهَان

لنعرف $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

الدَّالة g متّصلة علَى $[a,b]$ و قَابِلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ بإِعتمَاد نظرية رول يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $g'(c)=0$ إِذًا

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

نظرية

لنأخذ فترة $I \in \mathbb{R}$ و $f:\ I \to \mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و قَابِلة لِلإِشتقَاق علَى I بحيث $\forall c \in I, f'(c)=0$ فإِنّ f تكون ثَابتة

برهَان

ليكن $a<b$ عنصرين من I فإِنّ $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و قَابِلة لِلإِشتقَاق علَى

$]a,b[$ فإنّه يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ إِذًا $f(b)=f(a)$

نظرية

لنأخذ فترة $I \in \mathbb{R}$ و $f:\ I \to \mathbb{R}$ و $g:\ I \to \mathbb{R}$ دَالتين مُتّصلتين و قَابِلتين لِلإِشتقَاق علَى I بحيث $\forall x \in I, f'(x)=g'(x)$ فإِنّه يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$$f=g+c$$

برهَان

نعتمد علَى النظرية السَّابقة فإِنّ $\forall x \in I, (f-g)'(x)=0$ إِذًا يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $f=g+c$

نظرية

لنأخذ فترة $I \in \mathbb{R}$ و $f:\ I \to \mathbb{R}$ دَالة مُتّصلة و قَابِلة لِلإِشتقَاق علَى I فإِنّ f تكون متصَاعدة إِن و فقط إِن $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ و كذَالك تكون f متنَاقصة إِذَا و فقط إِذَا $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$

برهَان

إِذَا كَانت f متصَاعدة فإِنّ

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

ذلك أنّ كلّ من البسط و المقَام كلّ موجب

أمَّا إِذَا كَانت $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ و $[a,b] \subset I$ فإِنّه يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ إِذًا $f(b) \geq f(a)$ و بهذَا تكون f متصَاعدة

ملَاحظَات

هذَا البرهَان يبين أنّه إِن كَانت $\forall x \in I, f'(x) > 0$ فإِنّ f تكون متصَاعدة قطعًا كذلك إِن كَانت $\forall x \in I, f'(x) < 0$ فإِنّ f تكون متنَاقصة قطعًا $(x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y))$

أمّا الدَّالة $f(x)=x^3$ فإِنّهَا متصَاعدة قطعًا رغم أنّ $f'(0)=0$

نظرية

إِذَا كَانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دَالتين متّصلتين علَى $[a,b]$ و قَابلتين لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ فإِنّه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

برهَان

إِذَا كَان $g(b)=g(a)$ فإِنّه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $g'(c)=0$ إِذًا ،

$$0=(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

أمَّا إِذَا كَان $g(b)\neq g(a)$ فنعتمد الدَّالة

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))-(f(x)-f(a))$$

نرَى أنّ $h(a)=h(b)=0$ إِذًا يوجد $c\in]a,b[$ بحيث

$$h'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)-f'(c)=0$$

و بهذَا يكون

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

قَاعدة لوبتل $(l'Hospital's\ rules)$

إِذَا كَانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دَالةين متّصلتين علَى $[a,b]$ و قَابلتين لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ بحيث $f(a)=f(b)=0$ و $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ تكون موجودة فِي $[-\infty,+\infty]$ فإِنّه

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

برهَان

النظريّة السَّابقة تبيّن أنّه

$$\forall x \in]a,b[, \exists c_x \in]a,x[, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x-f(a))}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

عندنَا $\lim_{x\to a^+} c_x = a$ إِذًا

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نظرية

لتكن f دَالة متّصلة و متصَاعدة قطعًا (أو فعلًا) علَى فترة I فإِنّ $f(I)=J$ يكون فترة و f تكون تنَاظر من I إِلَى J و معكوسهَا g تكون متّصلة و متصَاعدة قطعًا و كذلك لتكن f دَالة متّصلة و متنَاقصة قطعًا (أو فعلًا) علَى فترة I فإِنّ $f(I)=J$ يكون فترة و f تكون تنَاظر من I إِلَى J و معكوسهَا g تكون متّصلة و متنَاقصة قطعًا

برهَان

لنفترض أنّ f دَالة متّصلة و متصَاعدة قطعًا بمَا أنّ f متّصلة فبإِعتمَاد نظريّة القيمة الوسطيّة نعرف أنّ $f(I)=J$ هي فترة و بمَا أنّ $(x<y)\Leftrightarrow(f(x)<f(y))$ فإِنّ f تكون تبَاين و من ثمّ $f:I\to J=f(I)$ هي تنَاظر ليكن g معكوسهَا لنأخذ عدَدين $r<t$ من J فإِنّه يوجد عدَدين x و y فِي I بحيث $r=f(x)$ و $t=f(y)$ إِذًا

$$(r=f(x)<t=f(y))\Leftrightarrow(g(r)=x<g(t)=y)$$

و بهذَا تكون g متصَاعدة قطعًا إِذَا كَانت g غير متّصلة عند نقطة دَاخليّة $f(x_0)=X_0\in J$ فإِنّ

$$l_1=\lim_{X\to X_0^-} g(X) < l_2=\lim_{X\to X_0^+} g(X)$$

كلتَا النّهَايتَان موجودتَان لأنّ f متصَاعدة قطعًا و $f(l_1) < f(l_2)$ إلَا أنّ

$$f(l_1) = f(\lim_{X\to X_0^-} g(X)) = \lim_{X\to X_0^-} f(g(X)) = X_0$$

لأنّ f متّصلة و كذلك

$$f(l_2) = f(\lim_{X\to X_0^+} g(X)) = \lim_{X\to X_0^+} f(g(X)) = \lim_{X\to X_0^-} X = X_0$$

نغيّر $f(\lim ..) = \lim f()$ لأنّ f متّصلة ليعد القَارِئُ البرهَان عندمَا تكون f دَالة متّصلة و متنَاقصة قطعًا و X_0 نقطة من J غير دَاخليّة.

نظرية

لتكن f دَالة متّصلة و متصَاعدة قطعًا (أو فعلًا) علَى فترة I و قَابلة للّإشتقَاق عند $x_0 \in I$ و $f'(x_0) \neq 0$ فإن معكوسهَا g يكون قَابل للّإشتقَاق عند $f(x_0)$ و لنَا

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

برهَان

عندنَا $(X = f(x)) \Leftrightarrow (g(X) = x)$ و $(X_0 = f(x_0)) \Leftrightarrow (g(X_0) = x_0)$. بمَا أنّ g متّصلة من النظريّة السَّابقة فإنّ $(x \to x_0) \Leftrightarrow (X \to X_0)$ إذًا

$$\lim_{X\to X_0} \frac{g(X) - g(X_0)}{X - X_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

تطبيق

١) اَلدَّالة الحيب $(sinx)$ متصَاعدة قَطعًا علَى $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ إذًا معكوسهَا قوس الحيب $(arcsinx)$ متزَايِد قطعًا علَى $[-1,1]$ و لنَا

$$arcsin'(sinx) = \frac{1}{cosx} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(x)}}$$

إذًا

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

٢) اَلدَّالة جيب التّمَام $(cosx)$ متنَاقصة قَطعًا علَى $[0,\pi]$ إِذًا معكوسهَا قوس جيب التّمَام $(arccosx)$ متنَاقصة قطعًا علَى $[-1,1]$ و لنَا

$$arccos'(cosx) = \frac{-1}{sinx} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2(x)}}$$

إِذًا

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إِذًا الدَّالة $arcsinx + arccosx$ تكون ثَابتة علَى $[-1,1]$ ومن ثمّ فإِنّ

$$\forall x \in [-1,1],\ \ arcsinx + arccosx = arcsin0 + arccos0 = \frac{\pi}{2}$$

٣) اَلدَّالة التّمَاس $(tanx)$ متصَاعدة قَطعًا علَى $[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ إِذًا معكوسهَا قوس التّمَاس $(arctanx)$ متزَايِد قطعًا علَى $\mathbb{R}$ و لنَا

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ arctan'x = \frac{1}{1+x^2}$$

٤) بنفس الطّريقة الجيب الزَّائِدِى (sh) متصَاعدة قطعًا علَى $\mathbb{R}$ إِذًا معكوسهَا إِتّسَاع الجيب الزَّائِدِى $argsh(x)$ يكون متزَايِد قطعًا علَى $\mathbb{R}$ و لنَا

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ argsh'(sh(x)) = \frac{1}{ch(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(x)}}$$

لأنّ $ch^2 = 1 + sh^2(x)$ و بوضع $t = sh(x)$ نتحصّل علَى

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ argsh'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

٥) بنفس الطّريقة جيب التّمَام الزَّائِدِى (ch) متصَاعدة قَطعًا علَى $[0,\infty[$ إِذًا معكوسهَا إِتّسَاع جيب التّمَام الزَّائِدِى $argch(x)$ يكون متزَايِد قطعًا علَى $[1,\infty[$ و لنَا

$$\forall x \in]1, \infty[, \ \ argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

٦) و أخيرًا الظلّ الزَائِدِى

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

يحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ th'(x) = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)}$$

إذًا فالدَّالة th متزَايِدة قطعًا و معكوسهَا نسمّيه إتّسَاع الظلّ الزَائِدِى $argth$ يكون معرّف علَى $]-1, +1[$ و يحقّق

$$argth'(th(x)) = \frac{1}{th'(x)} = \frac{1}{1 - th^2(x)}$$

و إذَا وضعنَا $t = th(x)$ فنتحصّل علَى

$$\forall t \in]-1, +1[, \ \ argth'(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

و بمَا أنّ $(\frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x}))' = \frac{1}{1-x^2}$ فإنّه يوجد ثَابت $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\forall x \in]-1, +1[, \ \ argth(x) = \frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x}) + c$$

و بحسَاب الطّرفين عند $x = 0$ نتحصّل علَى

$$\forall x \in]-1, +1[, \ \ argth(x) = \frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x})$$

في مَا يلَى نموذج لنصوص إختبَارَات فصليّة أعتمدت سَابقًا

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢ ربيع الأوّل ١٤٢٤

تحليل حقيقي ١ ألَاختبَار النهَائي (غير مكتمل) في سَاعتين

التمرين الَاول

١) لنَاخذ دَالتين f و g متّصلتين علَى $[a,b]$ و قَابلتين لِلَاشتقَاق علَى $]a,b[$ بين أنّه يوجد $c \in]a,b[$ بحيث

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

٢) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قَابلة لِلَاشتقَاق بحيث $f(0)=f(1)=f'(0)=0$ بين أنّه توجد $c \in]0,1[$ بحيث $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$

٣) أوجد النهَايَات التَّالية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(n+k)-logn}{n+k}$ و $\lim_{x\to 0}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^x$

التمرين الثَاني

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، معرفة حسب $f(x)=x^3+2x$

١) أوجد $f(\mathbb{R})$ و بين أنّ لِلدَالة f مقلوب (أو معكوس g) يحقِّق $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{2}$

٢) بين أنّ g قَابل لِلَاشتقَاق مرّتين و أوجد $g'(3)$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$ ، هل الدَّالة g منتظمة الَاتّصَال

٤) بين أنّه يوجد $A>0$ ، بحيث لكل $|x|>A$ فَانّ $\frac{1}{2}<\frac{g(x)}{x}$ و أستنتج أنّ $\frac{g(x)}{x}$ تصل الَى قيمتهَا العظمَى

التمرين الثَالث

١) أوجد المشتقَات المتكرّة لِلدَالة $(x^2+1)cosx$

٢) أوجد لكل $x\in\mathbb{R}^*$ قيمة $arctanx+arctan\frac{1}{x}$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{1+x}-sin\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-arctanx}$

الحلّ

حلّ التمرين الأول

١) أنظر النظريّة التي سبقت نظريّةلوپتل

٢) لكن $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ بما أنّ f قَابلة لِلإشتقَاق علَى $\mathbb{R}$ فإِنّ g قَابلة لِلإشتقَاق علَى $\mathbb{R}^*$. حتَى تكون g متّصلة عند الصّفر يجب أن نعرّف $g(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$ بما أنّ $g(0) = g(1) = 0$ من رول توجد $c \in]0,1[$ بحيث $g'(c) = \frac{cf'(c)-f(c)}{c^2} = 0$ أي أنّ $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$

٣) بتطبيق تكَاملَات ريمَان لنَا

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{Log(n+k) - logn}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{Log(1+\frac{k}{n})}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{Log(1+x)}{1+x} dx = (log2)^2$$

و سبق أنَّا أثبتنَا أنّ $\lim_{x\to 0}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^{2x} = e^2$ إِذًا $\lim_{x\to 0}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^{x} = e$

حلّ التمرين الثَّاني

١) عرفنَا أنّ كلّ كثيرة حدود ذَاتي درجة فرديّة تكون شَاملة إِذًا $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. نلَاحظ أنّ $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ إِذًا f متزَايِدة فعلًا و من نظريّة المعكوس يكون لِلدَّالة f معكوس g و بما أنّ $f(0) = 0$ فإِنّ $g(0) = 0$ إِذًا

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

٢) من نظريّة المعكوس المشتقّة تحقّق $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)}$ بما أنّ f' و g قَابلتَان لِلإشتقَاق فإِنّ $f' \circ g$ تكون قَابلة لِلإشتقَاق و ليس لهَا أصفَار إِذًا $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ تكون قَابلة لِلإشتقَاق أي أن g قَابل لِلَاشتقَاق مرّتين و لنَا $g'(3) = g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$

٣) نعرف أنّ g شَاملة و متصَاعدة إِذًا $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ إِذًا

$$\lim_{x\to\infty} g'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f'(g(x))}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3g^2(x)+2}=0$$

ولقد سبق أن بيّنَا أنّ

$$\lim_{x\to\infty} g'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=0$$

و بمَا أنّ g' متّصلة و تحقّق $\lim_{x\to\infty} g'(x)=0$ فإِنّ g' محدودة إِذًا من نظريّة القيمة المتوسّطة تكون g منتظمة الاتّصَال.

٤) بمَا أنّ $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=0$ فمن تعريف النهَايت يوجد $A>0$ ، بحيث لكل $|x|>A$ فإِنّ $\frac{g(x)}{x}<\frac{1}{2}$ علٰى الفترة $[-A,+A]$ تصل $\frac{g(x)}{x}$ تصل الَى قيمتهَا العظمَى التي تسَاوي $\frac{1}{2}\geq\frac{g(x_0)}{x_0}=M$

نستنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R}, \frac{g(x)}{x}\leq M$ إِذًا $\frac{g(x)}{x}$ تصل الَى قيمتهَا العظمَى علَى $\mathbb{R}$ عند x_0

حلّ التمرين الثَّالث

١) لإِيجَاد المشتقَات المتكرّة لِلدَالة $(x^2+1)cosx$ نضع $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=cosx$ و نطبّق القَاعدة

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

لنَا $f'(x)=2x$ و $f^{(2)}(x)=2$ و $\forall k>2, f^{(k)}=0$ إِذًا

$$[(x^2+1)cosx]^{(n)}=(x^2+1)[cosx]^{(n)}+2x[cosx]^{(n-1)}+2[cosx]^{(n-2)}$$

مع العلم أنّ صيغة $[cosx]^{(k)}$ يعتمد علَى بَاقي القسمة k علَى 4 ذلك أنّ $[cosx]^{(4p)}=cosx$ و $[cosx]^{(4p+1)}=-sinx$ و $[cosx]^{(4p+2)}=-cosx$ و $[cosx]^{(4p+3)}=sinx$

٢) نشتقّ $arctanx+arctan\frac{1}{x}$ فنجد $[arctanx+arctan\frac{1}{x}]'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}=0$

إِذًا الدَّالة $arctanx + arctan\frac{1}{x}$ تكون ثَابتة **علَى كلّ فترة من** $\mathbb{R}^*$ فإِذَا كَانت $0 < x$
فإِنّ $\frac{\pi}{2} = arctan(1) + arctan(1) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$
و إِذَا كَانت $x < 0$ فإِنّ $\frac{-\pi}{2} = arctan(-1) + arctan(-1) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$

٣) نلَاحظ أنّ $\forall x > 0, \frac{\pi}{2} - arctanx = arctan\frac{1}{x}$ · نضع $t = \frac{1}{x}$ إِذًا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sin\frac{1}{1+x} - sin\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - arctanx} = \lim_{t\to 0} \frac{sin\frac{t}{1+t} - sint}{arctant}$$

نستعمل لوپتل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sin\frac{1}{1+x} - sin\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - arctanx} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{(1+t)^2}cos\frac{t}{1+t} - cost}{\frac{1}{1+t^2}} = 0$$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٠ شوَّال ١٤٢٥

تحليل حقيقي ١ اَلَاختبار الفصلَى في سَاعتين

التمرين الأول

لكلّ دَالة متّصلة $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تحقّق $f(0) = f(1)$ بيّن أنّه توجد $c \in [0, \frac{1}{2}]$ بحيث $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ إِستنتج أنّه علَى خطّ الإِستوَاء من الكرة الأَرضيّة و عند كلّ لحظة توجد نقطتَان متنَاظرتَان قطريًّا (علَى نفس القطر) لهمَا نفس الضغط الجوّي

التمرين الثَّاني

١) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دَالة قَابلة للّإِشتقَاق و تحقّق $\lim_{|x|\to\infty} f'(x) = 0$

أ) بين أنّ f منتظمة الَاتّصَال علَى $\mathbb{R}$

ب) بين أنّ $\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

٢) بين أن $\forall x > -1, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

وإستنتج أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

التمرين الثَّالث

أوجد النّهَايَات التَّالية

$$\lim_{|x|\to\infty} (\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^{2x} \qquad \lim_{|x|\to\infty} x^3(tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x}), \qquad \lim_{x\to 1^+} (\frac{sin(x-1)}{x-1})^{\frac{1}{x-1}} \ ,$$

الحلّ

حلّ التمرين الأول

لتكن $g(x) = f(x) - f(x+\frac{1}{2})$ الدَّالة g متّصلة علَى $[0, \frac{1}{2}]$ و تحقّق $g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2})$ و $g(0) - = g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = -g(0)$ إذًا g لهَا قيم موجبة و أخرَى سَالبة من نظريّة القيمة الوسطيّة توجد $c \in [0, \frac{1}{2}]$ بحيث $g(c) = 0$ أي $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$

أمَّا الإستنتَاج فلنعتبر أنّ خطّ الإستوَاء هو دَائِرة الوحدة كلّ نقطة من خطّ الإستوَاء مُمثّلة بنقطة $(cos2\pi t, sin2\pi t)$ حيث $t \in [0,1]$ لتكن $f(t)$ هي درجة الضغط الجوّي عند النقطة $(cos2\pi t, sin2\pi t)$ لنَا $f(0) = f(1)$ لأنّهمَا درجة الضغط الجوّي عند نفس النّقطة إذًا مِمّا سبق توجد $c \in [0, \frac{1}{2}]$ بحيث $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$ أي أنّ الضغط الجوّي عند $(cos2\pi c, sin2\pi c)$ يسَاوي الضغط الجوّي عند $(cos2\pi(c+\frac{1}{2}), sin2\pi(c+\frac{1}{2}))$ و همَا يمثّلان نقطتين متنَاظرتين قطريًّا

حلّ التمرين الثَّاني

أ) بمـا أنّ $\lim_{|x|\to\infty} f'(x)=0$ فإنّه توجد $A>0$ بحيث $|x|>A \Rightarrow |f'(x)|<1$
لتكن $\epsilon>0$
نأخذ $|f(x)-f(y)|=|f'(c)(x-y)|\le|x-y|$ فإنّ $x>y>A$ إذًا إذَا كَانت $\delta'=\epsilon$ إذَا كَانت $x>y>A$ و $|x-y|\le\delta'$ فإنّ $|f(x)-f(y)|\le\epsilon$ و كذلك إذَا كَانت $x<y<-A$ و $|x-y|\le\delta'$ فإنّ $|f(x)-f(y)|\le\epsilon$ أمَا علَى الفترة $[-A-1,+A+1]$ فإنّ f متّصلة إذًا هي منتظمة الإتّصَال لأنّ الفترة محدودة و مغلقة إذًا توجد $\delta''>0$ بحيث كلمَا كَان
$-A-1\le x\le y\le +A+1$ و $|x-y|\le\delta''$ فإنّ $|f(x)-f(y)|\le\epsilon$

لتكن $\delta=inf\{\frac{1}{2},\delta',\delta''\}$ فإذَا كَان $|x-y|<\delta$ فإمّا أن يكون كلّ من x و y دَاخل $[-A-1,+A+1]$ و عندهَا $|f(x)-f(y)|\le\epsilon$ أو أن يكون كلّ من x و y خَارج $[-A,+A]$ و عندهَا $|f(x)-f(y)|\le\epsilon$ إذًا f منتظمة الاَتّصَال علَى $\mathbb{R}$

ب) لتكن $\epsilon>0,$ توجد $A>0$ بحيث $x>A\Rightarrow|f'(x)|<\frac{\epsilon}{2}$ إذًا إذَا كَانت $x>>x_0>A$ فإنّ $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{x-x_0}=f'(c)<\frac{\epsilon}{2}$ بمـا أنّ $\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x_0)}{x-x_0}=0$ فإنّه توجد $B>x_0$ بحيث إذَا كَانت $x>B$ فإنّ $\frac{f(x_0)}{x-x_0}<\frac{\epsilon}{2}$ إذًا إذَا كَانت $x>B$ فإنّ $|\frac{f(x)}{x}|\le|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|+|\frac{f(x_0)}{x-x_0}|<\epsilon$ إذًا

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

٢) نريد أن نبين أن $\forall x>-1, \frac{x}{1+x}\le L_n(1+x)\le x$ و أنّ $\forall n\in\mathbb{N},(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

من نظريّة القيمة المتوسّطة حيث $f(x)=L_n(1+x)$ لنَا $f'(c)=\frac{1}{1+c}$ إذًا توجد c بين 0 و x تحقِّق
$L_n(1+x)-L_n(1)=\frac{x}{1+c}$
إذَا كَان $x>0$ فإنّ $x>c>0$ و من ثمّ فإنّ

$x > \frac{x}{1+c} > \frac{x}{1+x}$

أمّا إذا كَان $-1 < x \leq 0$ فإنّ $x < c < 0$ أي $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$ إذًا $x \geq \frac{x}{1+c} \geq \frac{x}{1+x}$

من الحَالتين ينتج $\forall x > -1, \frac{x}{1+x} \leq L_n(1+x) = \frac{x}{1+c} \leq x$

الإستنتَاج

نأخذ في الطّرف الأيمن $x = \frac{1}{n}$ نتحصّل علَى

$L_n(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow nL_n(1+\frac{1}{n}) \leq 1 \Leftrightarrow (1+\frac{1}{n})^n \leq e$

نأخذ في الطّرف الأسر $x = \frac{1}{n}$ نتحصّل علَى

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leq L_n(1+\frac{1}{n}) \Leftrightarrow \frac{1}{1+n} \leq L_n(1+\frac{1}{n}) \Leftrightarrow 1 \leq (n+1)L_n(1+\frac{1}{n}) \Leftrightarrow e \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

حلّ التمرين الثّالث

$\lim_{|x|\to\infty}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^{2x}$ عندمَا تكون المتغيّرة في الأسّ نأخذ عَادة اللّوغرتم لتكن $u = \frac{x}{1+x^2}$ نلَاحظ أنّ $(x \to \infty) \Rightarrow (u \to 0)$ من لوپيتل نعرف أنّ $\lim_{u\to 0}\frac{L_n(1+u)}{u} = 1$ إذًا

$$\lim_{|x|\to\infty} 2xL_n(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}) = \lim_{|x|\to\infty} 2xu\frac{L_n(1+u)}{u} = \lim_{|x|\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}\lim_{u\to 0}\frac{L_n(1+u)}{u} = 2$$

إذًا

$$\lim_{|x|\to\infty}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^{2x} = e^2$$

لإيجَاد $\lim_{x\to\infty} x^3(tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x})$ نضع $t = \frac{1}{x}$ و نطبّق لوپيتل

$$\lim_{x\to\infty} x^3(tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{tant - t}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{tan^2 t}{3t^2} = \frac{1}{3}$$

لأنّه من لوپيتل نعرف أنّ

$$\lim_{t\to 0}\frac{tant}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+tan^2t}{1}=1$$

لدرَاسة $\lim_{x\to 1^+}(\frac{sin(x-1)}{x-1})^{\frac{1}{x-1}}$ نضع $t=x-1$

$$\lim_{x\to 1^+}(\frac{sin(x-1)}{x-1})^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to 0^+}(\frac{sin(t)}{t})^{\frac{1}{t}}$$

من لوپيتل نعرف أنّ

$$\lim_{t\to 0}\frac{L_n\frac{(sint}{t)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tcost-sint}{tsint}=\lim_{t\to 0}\frac{cost-tsint-cost}{sint+tcost}=0$$

لأنّه من لوپيتل نعرف أنّ $\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$ إِذًا

$$\lim_{x\to 1^+}(\frac{sin(x-1)}{x-1})^{\frac{1}{x-1}}=1$$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٧ شوَّال ١٤٢٤

تحليل حقيقي ١ اَلاَختبَار الفصلَى في سَاعتين

التمرين الَاول

١) أورد برهَان نظريّة لوپيتل

٢) مَا هو تعريف إِتّسَاع الظل الزَائِدَى $Argth(x)$ و مفكوك هذه الدَّالة إِلَى الرتبة السَّادسة عند الصّفر

٣) أوجد النّهَايَات التَّالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(cosx)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 1^+}(\frac{sin(x-1)}{x-1})^{\frac{1}{x-1}}=0, \qquad \lim_{|x|\to\infty}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^x$$

التمرين الثَاني

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، معرفة حسب $f(x)=x^3+x$

١) هل هي منتظمة الاَتّصَال

٢) بين أنّ لِلدَالة f مقلوب g قَابل لِلَاشتقَاق مرّتين و أوجد $g'(2)$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$ ، هل الدَّالة g منتظمة الاَتّصَال

التمرين الثَالث

١) بين أنّه $\forall x\in\mathbb{R}, 1-\frac{x^2}{2}\leq cosx\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

٢) إِستنتج الأَربعة خَانَات العشريّة الأولَى لِلعدَد $sin(\frac{5\pi-1}{10})$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٤ صفر ١٤٢٤

تحليل حقيقي ١ اَلاختبَار الاَول في سَاعتين

التمرين الَاول

١) لنَاخذ دَالتين f و g متّصلتين علَى $[a,b]$ و قَابلتين لِلَاشتقَاق علَى $]a,b[$ بين أنّه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث

$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$

٢) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قابلة لِلَاشتقَاق بحيث $f(0)=f(1)=f'(1)=0$ بين أنّه توجد $c\in]0,1[$ بحيث $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$

التمرين الثّاني

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، معرفة حسب $f(x)=x^3+x$

١) هل هي منتظمة الاَتّصَال

٢) بين أنّ لِلدَالة f مقلوب g قَابل لِلَاشتقَاق مرّتين و أوجد $g'(2)$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$ ، هل الدَّالة g منتظمة الاَتّصَال

التمرين الثَّالث

١) أوجد المشتقَات المتكرِّرة لِلدَالة x^2sinx

٢) أوجد قيمة $arctanx+arctan\frac{1}{x}$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{1+x}}-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{\pi}{2}-arctanx}$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٧ ربيع الاَوّل ١٤٢٤

تحليل حقيقي ١ اَلَاختبَار الثَّاني في سَاعتين

التمرين الاَول

١) عرّف الدَّالة $arcsinx$ و بيّن كيف وجدنَا اشتقَاقهَا و رسمنَا صورتهَا كمَا جَاء في الدّرس

٢) أوجد قيمة $arcsin(sin(\frac{5}{3}\pi))$

٣) أوجد النهايات التّالية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(n+k)-logn}{n+k}$ و $\lim_{x\to 0}(\frac{x^2+x+1}{x^2+1})^x$

٤) أوجد $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} arcsin\sqrt{\frac{1+sinx}{2}}$

التمرين الثّاني

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، **معرفة حسب** $f(x)=x^3+x$

١) أوجد $f(\mathbb{R})$ و بين أنّ لِلدَالة f مقلوب (أو معكوس g) **يحقّق** $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$

٢) بين أنّ g قَابل لِلَاشتقَاق مرّتين و أوجد $g'(2)$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$ ، هل الدَّالة g **منتظمة الاَتّصَال**

٤) بين أنّه يوجد $A>0$ ، **بحيث لكل** $|x|>A$ فَانّ $\frac{1}{2}<\frac{g(x)}{x}$ و أستنتج أنّ $\frac{g(x)}{x}$ تصل الَى قيمتهَا العظمَى

التمرين الثّالث

١) أوجد قيمة $\int e^x sin^2 x$

٢) أوجد قيمة $\lim_{n\to\infty} n\int_0^n \frac{dx}{1+n^2x^2}$

٣) أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{1+x}-sin\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-arctanx}$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٤ شعبَان ١٤٢٤

الاَختبَار الاَسبوعي الأوّل

الاَسم و الرقم

١) لتكن $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ بين أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leq 1$

٢) لتكن $f(x)=Ln(1+x^2)$ بين أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\leq 1$ و إِستِنتج أنّ f منتظمة الإِتّصَال علَى $\mathbb{R}$

٢) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالإِعتمَاد علَى الرّموز الريَاضية $(\forall,\ \exists)$ أكتب تعريف f غير منتظمة الإِتّصَال و تعريف f غير متّصلة و قَارن بينهمَا

٤) أوجد النّهَايَات التَّالية

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^x \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٧ شعبَان ١٤٢٤

الاَختبَار الاَسبوعي الأوّل

الاَسم و الرقم

١) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالإِعتمَاد علَى الرّموز الريَاضية $(\forall\exists)$ أكتب تعريف f غير منتظمة الإِتّصَال و تعريف f غير متّصلة و قَارن بينهمَا

٢) أوجد دَالة معرّفة علَى $\mathbb{R}$ متّصلة فقط عند الصّفر

٣) هل صحيح أنّ f تكون متّصلة إِن و فقط أن كَانت $|f|$ متّصلة

٤) بيّن أنّ لكلّ دَالة متّصلة $f:[0,1]\to[0,1]$ يوجد $x\in[0,1]$ بحيث $f(x)=sin(\frac{\pi}{2}x)$

٥) بين أنّ كلّ كثيرة حدود ذَاتي درجة فرديّة تكون دَالة شَاملة علَى $\mathbb{R}$ ·

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢ رمَضَان ١٤٢٤

الَاختبَار الَاسبوعي الثَّاني

الَاسم و الرقم

١) لتكن $2 < x < y$ ، أشطب الجمل الخَاطِئة

$(3^x)^y = 3^{x+y}$ ، $\frac{1+x}{x-1} \leq \frac{1+y}{y-1}$ ، $Ln(x^4 + x^y) = (4+y)Lnx$

٢) بيّن أنّه

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ cosx \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$$

٣) أوجد لكل $x \in \mathbb{R}$ قيمة $arctanx + arctan\frac{1}{x}$

٤) أوجد $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{sin\frac{1}{1+x} - sin\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2} - arctanx}$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٠ رمَضَان ١٤٢٤

الَاختبَار الَاسبوعي الثَّالث

الَاسم و الرقم

١) لتكن $2 < x < y$ ، أشطب الجمل الخَاطِئة

$$(3^x)^y = 3^{x+y}, \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y}, \qquad e^{(x^4+x^y)} = e^{x^4} + e^{x^y}$$

٢) هل كلّ دَالة لهَا مفكوك تيلور للّرتبة 1 عند الصّفر تكون حتمًا قَابلة للّإِشتقَاق عند الصّفر

٣) أوجد مشتقّة $argsh(x)$ و مفكوكهَا إِلَى الرتبة 4 عند الصّفر

٤) أوجد مفكوك تيلور للّرتبة 10 للّدَالة $x^8 sin(x^3)$ عند الصّفر

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيّات ١٠ رمَضَان ١٤٢٤

الَاختبَار الَاسبوعي الرَّابع

الَاسم و الرقم

١) لتكن $2 < x < y$ ، أشطب الجمل الخَاطِئة

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{x+y}, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+...+n \leq \frac{(n+1)^2}{2}$$

٢) هل كلّ دَالة لهَا مفكوك تيلور للّرتبة 2 عند الصّفر تكون حتمًا قَابلة للّإِشتقَاق مرّتين عند الصّفر

٣) أوجد مشتقّة $cos(x)$ و مفكوكهَا إِلَى الرتبة 4 عند الصّفر

٤) أوجد مفكوك تيلور للّرتبة 5 للّدَالة $arcsin(x^3)$ عند الصّفر

جَامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الريَاضيَات ١٦ شوَّال ١٤٢٤

الاَختبَار الاَسبوعي الخَامس

الاَسم و الرقم

١) أشطب الجمل الخَاطِئة

$0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{1+Ln^2(x)} > \frac{1}{1+Ln^2(y)}$ ، $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \geq ||x|-|y||,$

٢) مَا هو تعريف دَالة قَابلة لِتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$

٣) مَا هي مشتقّة $f(x) = \{^{x^2 sin\frac{1}{x},\ x\neq 0}_{0,\ x=0}$ هل هي قَابلة لِتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$ هل f' قَابلة لِتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$

٤) أوجد

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n+2} \frac{k}{n^2} e^{\frac{k}{n}}$$

جَامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الريَاضيَات ١ ذو القعدة ١٤٢٤

الاَختبَار الاَسبوعي السَادس

الاَسم و الرقم

١) أشطب الجمل الخَاطِئة دون إستعمَال الألة الحَاسبة

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{3}{2}x^2y^2\leq x^4+y^4,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, e^x.e^y\leq e^x+e^y,$

$0<x<y\Rightarrow\frac{1}{1+Ln^2(x^2)}>\frac{1}{100+Ln^2(y^2)}$

٢) مَا هي مشتقّة $f(x)=\{^{x^2cos\frac{1}{x},\ x\neq0}_{0,\ x=0}$ هل هي قَابلة لِتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$ هل f' قَابلة لِتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$

٣) لتكن f دَالة قَابلة لِتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$ هل توجد حتمًا دَالة g سلّميّة بحيث $\forall x\in[0,1],|f(x)-g(x)|\leq\frac{1}{2}$

٤) مَا هو نصّ نظريّة تقَارب التّكَامل بطريقة شبه المنحرفَات

٥) أوجد $\int\frac{dx}{4cos^2x+9sin^2x}$

نظريّة تيلور $Taylor$

نظرية $(Taylor)$

لتكن I فترة مفتوحة من $\mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $f \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$ بحيث $f^{(n)}$ قَابلة لِلإِشتقَاق علَى I لتكن $a \in I$ و $b \in I$ فإِنّه يوجد $c \in I$ بين a و b بحيث

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

برهَان

لنعرّف

$$F(t) = f(b) - (f(t) + (b-t)f'(t) + .. + \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n)}(t))$$

عندنَا

$$F'(t) = \frac{-(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$$

فإِذَا عرّفنَا

$$G(t) = F(t) - \frac{(b-t)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}F(a)$$

فإِنّ $G(a) = G(b) = 0$ و G قَابلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ فبإِعتمَاد رول يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $G'(c) = 0$ أي

$$F'(c) = -(n+1)\frac{(b-c)^n}{(b-a)^{n+1}}F(a)$$

و بمَا أنّ

$$F'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$$

أي

$$F(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

إذًا

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

تعريف

لتكن $n \in \mathbb{N}$ و $f \in \mathcal{C}^{(n)}([a,b])$ بحيث $f^{(n)}$ قَابلة لِلإشتقَاق علَى $]a,b[$ فإنّه

$$f(a) + (x-a)f'(a) + .. + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

تسمّى كثيرة حدود من الرتبة n من صيغة تيلور للدّالة f عند a فِي حين أنّ $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ تسمّى بقيّة لقرَانج $(Lagrange)$

تطبيق

١) كيف نحسب الخَانَات العشريّة الأولَى للّعدَد $e^{\frac{1}{10}}$

نأخذ $f(x) = e^x, \ a = 0, \ b = x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + .. + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!}$$

إذًا

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} \leq e^{\frac{1}{10}} \leq 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} e^c$$

و بهذَا نستنتج أنّ الخَانَات العشريّة الأولَى للّعدَد $e^{\frac{1}{10}}$ هي $e^{\frac{1}{10}} = 1, 1.5..$

٢) يمكن كذلك أن نستنتج بعض المتبَاينَات بالإِعتمَاد علَى نظريّة تيلور فمثلًا لنبيّن أنّه

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ cosx \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$$

نرَى أنّ المتبَاينة تخصّ دَوَال زوجيّة إِذًا يكفِى أن نبرهنهَا عندمَا $x \geq 0$ و بمَا أنّ المتبَاينة بديهيّة إِذَا كَانت $x \geq \pi$ فيكفِى أن نبرهنهَا عندمَا $0 \leq x \leq \pi$ بالإِعتمَاد علَى نظريّة تيلور نرَى أنّ

$$cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}sinc$$

حيث $0 \leq c \leq x \leq \pi$ إِذًا $0 \leq \frac{x^3}{6}sinc$ إِذًا

$$cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}sinc$$

نظرية

لتكن $n \in \mathbb{N}$ و $f \in \mathcal{C}^{(n)}([a,b])$ بحيث $f^{(n)}$ قَابلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ و

$$f(a) + (x-a)f'(a) + .. + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + ..\lambda_n(x-a)^n$$

هي كثيرة حدود من الرتبة n من صيغة تيلور للدّالة f عند a فإِنّ كثيرة حدود من الرتبة $n-1$ من صيغة تيلور للدّالة f' عند a هي

$$\lambda_1 + 2\lambda_2(x-a) + ..n\lambda_n(x-a)^{n-1}$$

برهَان

لتكن $g = f'$ فإِنّه $g^{(n-1)}$ قَابلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ و يوجد $c \in]a,b[$ بحيث

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + .. + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{(n)!}g^{(n)}(c)$$

و لنَا

$$\lambda_k = \frac{f^{(k)}}{k!}(a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{k!}$$

إذًا

$$\frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = k\lambda_k$$

تطبيق

الدَّالة $g(x) = \frac{1}{x+1}$ تحقِّق $g^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{1}{(x+1)^{k+1}}$ و من ثمّ فإِنّ كثيرة حدود من الرتبة n من صيغة تيلور للدّالة $Ln(1+x)$ عند 0 هي

$$x - \frac{1}{2}x^2 + .. + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

أمّا البَاقِي من صيغة تيلور للدّالة $G = Ln(1+x)$ فهو

$$G^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n c^{n+1}}{(n+1)} x^{n+1}$$

و بهذَا نتحصّل علَى

$$\forall x > 0, x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 .. - \frac{x^{2k}}{2k} < Ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 .. + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

تكَامل ريمَان

تعريف

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ نقول أنّ الدَّالة f سلّميّة إِن وجدت تقسيمة متهية $a=x_0<x_1..<x_n=b$ بحيث علَى كلّ فترة جزئِيّة $]x_k,x_{k+1}[$ تكون f ثَابتة أي يوجد $c_k\in\mathbb{R}$ بحيث $x_k<x<x_{k+1}\Rightarrow f=c_k$ عندهَا نعرّف تكَامل f علَى $[a,b]$ بأنّه

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x_{k+1}-x_k)$$

أمثلة

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x<1\\ 4 & x=1\\ 3 & 1<x\le 2\end{cases}$$

هي دَالة سلّمية تحقِّق $\int_a^b f(x)dx=2$

فِى حين أنّ

$$g(x)=\begin{cases}-1 \quad , & x=0\\ n \quad , & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ليست سلّميّة علَى $[0,1]$ لأنّ التّقسيمة غير متهيّة

ملَاحضَات (لِلإِثبَات)

١) كلّ دَالة سلّميت علَى $[a,b]$ تكون محدودة و مدَاهَا متهي

٢) كلّ دَالة سلّميت و متّصلة علَى $[a,b]$ تكون ثَابتة

٣) تكَامل الدَالة السلّميت علَى $[a,b]$ لَا يتغيّر بتغيّر التّقسيمة

٤) جمع و طرح و ضرب الدّوَال السلّميّة يكون دَوَال سلّميّة

٥) ليكن $E([a,b])$ مجموعة الدّوَال السلّميّة علَى $[a,b]$ فإِنّ

أ) $\forall f \in E([a,b]), \forall g \in E([a,b])$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$$

ب) $\forall f \in E([a,b]), \forall g \in E([a,b])$

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

ج) تكَامل الدَالة السلّمية علَى $[a,b]$ لَا يتغيّر بتغيّر الدَّالة فَى عدَد متهي من النّقَاط

تعريف

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ و $E([a,b])$ مجموعة الدّوَال السلّميّة علَى $[a,b]$ نعرّف

$E^+(f) = \{\psi \in E([a,b]), \psi \geq f\}$ و $E^-(f) = \{\phi \in E([a,b]), \phi \leq f\}$

نقول أنّ الدَّالة f قَابلة لتكَامل ريمَان إِن تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi \in E^+(f), \exists \phi \in E^-(f); \int_a^b (\psi - \phi)(x)dx \leq \varepsilon$$

نظريّة

كلّ دَالة مطّردة علَى $[a,b]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان

برهَان

لنفترض أنّ f متصَاعدة و $a < b$ لتكن $n \in \mathbb{N}^*$ لكلّ $0 \leq k \leq n$ لتكن $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ نلَاحظ أنّ $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$ نعرّف دَالتين سلّميّتين ψ_n و ϕ_n علَى هذه التّقسيمة كَالتَّالي

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, x_k \leq x < x_{k+1} \Rightarrow \psi_n(x) = f(x_{k+1})$$

و كذلك

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, x_k \leq x < x_{k+1} \Rightarrow \phi_n(x) = f(x_k)$$

من هذَا التّعريف نرَى أنّ $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ و

$$\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = \frac{b-a}{n}[(f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))+..+(f(x_n)-f(x_{n-1}))]$$

$$= (f(b)-f(a))\frac{b-a}{n}$$

إذًا لكلّ $\varepsilon > 0$ لتكن n كبيرة **بحيث** $(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n} \leq \varepsilon$ فإنّ **وجود** ψ_n و ϕ_n يبيّن أنّ f قَابلة لتكَامل ريمَان

نظريّة

كلّ دَالة متّصلة علَى $[a,b]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان و لنَا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

برهَان

لتكن f متّصلة علَى $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد دَالتين سلّميّتين تحقّقَان $\phi \leq f \leq \psi$ و $\int_a^b(\psi-\phi)(x)dx \leq \varepsilon$ لتكن $M = \sup\{|f(x)|, x\in[a,b]\}$ بمَا أنّ f منتظمة الإتّصَال فإنّه

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], \forall y \in [a,b], |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)+1}$$

لتكن $n \in \mathbb{N}^*$ كبيرة **بحيث** $\frac{b-a}{n} \leq \delta$ نعرّف $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ و دَالتين سلّميّتين ψ_n و ϕ_n كَالتَالَى

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, x_k \leq x < x_{k+1} \Rightarrow \psi_n(x) = \sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$$

وكذلك

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, x_k \leq x < x_{k+1} \Rightarrow \phi_n(x) = \inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$$

لنَا $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ و

$$\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = \frac{b-a}{n}[(\psi_n(x_0)-\phi_n(x_0))+(\psi_n(x_1)-\phi_n(x_1))+..+(\psi_n(x_{n-1})-\phi_n(x_{n-1}))]$$

$$\leq \frac{b-a}{n}\frac{\varepsilon}{(b-a)+1}n \leq \varepsilon$$

و لنَا

$$\int_a^b \phi_n(x)dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \leq \int_a^b \psi_n(x)dx$$

إذًا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

ملَاحظة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=3}^{n-5} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

أي النّهَاية لَا تَتغيّر بتغيّر عدَد محدود من الحدود ذلك أنّ

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = 0$$

نظريّة (الأَساسيّة)

لتكن f قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ و متّصلة عند $x_0 \in]a,b[$ فإِنّ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ تكون قَابلة لِلإِستقَاق عند x_0 و لنَا $F'(x_0) = f(x_0)$

برهَان

من علَاقة شَال فإِنّ

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt=hf(x_0)+h\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt}{h}$$

و بمَا أنّ $\varepsilon(h)=\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt}{h}$ تحقّق $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ نظرًا لأنّ f متّصلة عند x_0 فإنّ F قَابلة لِلإِستقَاق عند x_0 و لنَا $F'(x_0)=f(x_0)$

تمَارين

١) أثبت أو أنفَى بمثَال مضَاد

أ) كلّ دَالة قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ تكون محدودة

ب) كلّ دَالة محدودة علَى $[a,b]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان

ج) لكلّ دَلة سلّميّة f علَى $[a,b]$ توجد دَالة متّصلة F علَى $[a,b]$ تحقّق $\forall x\in[a,b], F'(x)=f(x)$

٢) لتكن f و g دَالتين قَابلتين لِلإِشتقَاق علَى $\mathbb{R}$ و h دَالة متّصلة أوجد إِشتقَاق

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)}h(t)dt$$

٣) لتكن f و g دَالتين قَابلتين لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ أثبت أنّ

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq(\int_a^b f^2(x)dx)(\int_a^b g^2(x)dx)$$

متتابعات الدّوال

تعريف

لتكن $A \subset \mathbb{R}$ و $f_n : A \to \mathbb{R}$ و $f : A \to \mathbb{R}$

١) نقول أنّ f_n تتقارب على A من f إن تحقّق

$$\forall x \in A, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

٢) نقول أنّ f_n تتقارب على A بإنتظام من f إن تحقّق

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

مثال

$f_n(x) = \frac{n}{1+nx^2}$ لا تتقارب على $\mathbb{R}$ لأنّ $f_n(0) = n$ متباعدة

$f_n(x) = \frac{n}{1+nx^2}$ تتقارب على $\mathbb{R}^*$ من $\frac{1}{x^2}$ هذا التّقارب غير منتظم لأنّ

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |f_n(x) - f(x)| = \infty$$

نظريّة

لتكن $A \subset \mathbb{R}$ و $f_n : A \to \mathbb{R}$ متتابعة من الدّوال تتقارب بإنتظام من f على A فإن كانت f_n متّصلة عند $x_0 \in A$ فإنّ f تكون متّصلة عند x_0

برهان

لتكن $\epsilon > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

بما أنّ f_N متّصلة فتوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

إِذًا إِذَا كَانت $x \in A$ و $|x - x_0| < \delta$ فإِنّ

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

مثَال

لتكن $A =]-1,1]$ و $f_n(x) = x^n$ فإِنّ f_n تَتقَارب من

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in]-1,1[\\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

بمَا أنّ f غير متّصلة عند 1 و f_n متّصلة عند 1 فلَا يمكن أن يكون التّقَارب منتظمًا.

نظريّة

لتكن $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ متتَابعة من الدّوَال القَابلة لتكَامل ريمَان تَتقَارب بإِنتظَام من f علَى $[a,b]$ فإِنّ f تكون قَابلة لتكَامل ريمَان و لنَا

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

بعجَالة إِن كَانت الفترة $[a,b]$ محدودة و التّقَارب منتظمًا فيمكن تبديل $\lim_{n\to\infty}$ و $\int_a^b$

برهَان

١) لنبيّن أنّ f قَابلة لتكَامل ريمَان لتكن $\epsilon > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3(b-a+1)}$$

بمَا أنّ f_N قَابلة لتكَامل ريمَان ، توجد دَالتَان سلّميّتَان $\varphi \leq f_N \leq \psi$ بحيث

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \leq \frac{\epsilon}{3}$$

لتكن $\Phi = \varphi - \frac{\epsilon}{3(b-a+1)}$ و $\Psi = \psi + \frac{\epsilon}{3(b-a+1)}$ فإِنّ $\Phi \leq f \leq \Psi$ و $\int_a^b (\Psi - \Phi)(x)dx \leq \epsilon$ إِذًا f قَابلة لتكَامل ريمَان.

٢) نلَاحظ أنّ

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

و بمَا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

لأنّ التّقَارب منتظم إِذًا

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

نظريّة

لتكن $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ متتَابعة من الدّوَال من صنف $\mathcal{C}^1$ بحيث مشتقّاتهَا تَتقَارب بإِنتظَام من دَالة g علَى الفترة المحدودة $]a,b[$ و لنفترض أنّه يوجد $x_0 \in]a,b[$ بحيث $(f_n(x_0))_n$ تتقَارب فإِنّ f_n تتقَارب بإِنتظَام من علَى $]a,b[$ من دَالة f قَابلة لِلإِشتقَاق و تحقّق $f' = g$

برهَان

لتكن $f(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt + \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ من النظريّة الأَسَاسيّة نعرف أنّ مشتقّة f هي g و لنَا

$$f(x) - f_n(x) = \int_{x_0}^x (g(t) - f'(t))dt + (f(x_0) - f_n(x_0))$$

إِذًا

$$\forall x \in]a,b[, |f_n(x) - f(x)| \leq (b-a) \sup_{x\in]a,b[} |f_n'(x) - g(x)| + |f(x_0) - f_n(x_0)|$$

بمَا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_0) - f_n(x_0)| = 0 = \lim_{n\to\infty} (b-a) \sup_{x\in]a,b[} |f_n'(x) - g(x)| = 0$$

فإنّ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in]a,b[} |f_n(x) - f(x)| = 0$ إذًا f_n تتقَارب بإنتظَام من علَى $]a,b[$ من f

نظريّة (الدَّالة اَلمسيطرة)

لتكن $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ متتَابعة من الدّوَال القَابلة لتكَامل ريمَان تتقَارب من دَالة f قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ فإن وجد $M > 0$ يحقّق $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], |f_n(x)| \leq M$ فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

بعجَالة إن كَانت الفترة $[a,b]$ محدودة و f_n محدودة بنفس الثَّابت فيمكن تبديل $\lim_{n\to\infty}$ و $\int_a^b$ حتّى ولو كَان التّقَارب غير منتظمًا

نظرية ($Taylor$ مع بَاقي تكَامل)

لتكن $n \in \mathbb{N}$ و $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a,b])$ فإنّ

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt$$

برهَان

نعتمد الإستقرَاء الرّيَاضي عند $n = 0$ لنَا

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

لنفترض أنّنَا أثبتنَا

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + .. + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

نلَاحظ أنّ التّكَامل بَالتجزئة $(v(t) = \frac{(b-t)^n}{(n)!},\ du = f^{(n+1)}(t)dt)$ يبيّن أنّ

$$\int \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt = -\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int \frac{(b-t)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

إذًا

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt$$

ملاحظة

الباقي $\int \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt$ يسمّى باقي على شكل تكامل من صيغة تيلور إلى الرتبة n

تمارين

التمرين الأول

١) لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ دالة متّصلة تحقّق

$$|f(x)|^2 = 2\int_a^x f(t)dt$$

بيّن أنّ $\forall x \in [a,b], f(x) = x - a$

٢) لتكن $g : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ دالة متّصلة تحقّق $g(b) = \frac{(b-a)^2}{2}$ بيّن أنّه يوجد $c \in [a,b],$ بحيث

$$g(x) = f(x)$$

٣) بيّن أنّه توجد $c \in [a,b]$ ، يحقّق

$$|f(c)| = \lim_{n\to\infty} [\int_a^b |f|^n(x)dx]^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

التمرين الثّاني

لتكن $f_n : [a,b[\to \mathbb{R}$ متتابعة من الدّوال تتقارب بإنتظام من f

بيّن أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} f_n(x_p) = \lim_{p\to\infty} f(x_p)$$

إن وجدت هذه النّهايات حتى ولو كانت $b = +\infty$

التمرين الثَالث

١) لتكن $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$ بيّن أنّ $\forall a > 0$ ، f_n تَتَقَارب بإِنتظَام علَى $[a, +\infty[$ و لكن لَا تَتَقَارب بإِنتظَام علَى $[0, +\infty[$.

٢) لتكن $g_n(x) = \frac{sinnx^2}{1+nx^2}$ بيّن أنّ $\forall a > 0$ ، g_n تَتَقَارب بإِنتظَام علَى $[a, +\infty[$ و لكن g_n لَا تَتَقَارب بإِنتظَام علَى $[0, +\infty[$.

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٧ ربيع الثَّاني ١٤٢٥

تحليل حقيقي ١ أَلَاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الَاول

١) مَا هو نصّ و برهَان مفكوك تيلور مع بَاقي تكَامل إِلَى الرتبة n عند الصّفر لدَالة f من صنف C^∞

٢) أوجد مفكوك تيلور مع بَاقي تكَامل إِلَى الرتبة 6 عند الصّفر لدَالة $f(x) = x^7 + sin2x$

٣) لتكن φ و ψ و h ثَالثة دوَال من صنف C^1 علَى $\mathbb{R}$ ، كمَا جَاء فَى المحَاضرة أوجد نصّ و برهَان إِشتقَاق الدَّالة التَّالية $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} h(t)dt$

٤) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_x^{sin(2x)} e^{-t^2}dt$

التمرين الثَّاني

أوجد النهَايَات التَّالية

١) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{Log(2n+k) - logn}{n+k}$

٢) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k + n.arctan(\frac{k}{n})}{(n^2+k^2)}$

٣) مَا هي أكبر مسَاحة مُمكنة لمثلّثٍ قَائِمة الزَّاوية طول وتره 2 م

التمرين الثَّالث

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، معرفة حسب $f(x) = x^5 + x + sinx$

١) أوجد $f(\mathbb{R})$ و بين أنّ لِلدَالة f معكوس g من صنف C^2 يحقِّق $\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$

٢) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$ و إستنتج $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ ،

٣) هل الدَّالة g منتظمة الَاتّصَال

٤) بين أنّ $\frac{g(x)}{x}$ تصل الَى قيمتهَا العظمَى

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١١ ذو القعدة ١٤٢٤

تحليل حقيقي ١ ألَاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الَاول

١) مَا هو نصّ و برهَان تقَارب التّكَامل بطريقة شبه المنحرفَات

٢) أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{Log((n+k)^n) - log(n^n)}{(n+k)^2}$

٣) هل $(\frac{nx}{1+nx^2})_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب بإِنتظَام علَى $\mathbb{R}$

التمرين الثّاني

أوجد النّهَايَات التَّالية

١) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n+2}\frac{2}{n}e^{\frac{k}{n}}cos^2(\frac{k}{n})$

٢) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2n+nsin(\frac{k}{n})}$

اَلتمرين الثَّالث

لكلّ $a>0$ و $x\in]-1,+\infty[$ أوجد قيمة $\int_0^x\frac{dt}{(t+1)(t^2+a^2)}$.

٢) بَاإِستعمَال التّكَامل الجزئِي ، لكلّ $x\in]-1,+\infty[$ أوجد قيمة $\int_0^x\frac{\arctan(t)}{(t+1)^2}dt$.

٣) لتكن $g(x)=\int_0^x\frac{2\arctan(t)}{(t+1)^2}dt$ بيّن أنّ $g\in\mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[)$.

٤) أوجد مفكوك تيلور لِلدَّالة g عند 0 إِلَى الرّتبة 2 .

٥) إستنتج أنّ $f(x)=\frac{x+1}{x}g(x)$ يمكن تمديدهَا كدَالة $\tilde{f}$ قَابلة لِلأَشتقَاق عند 0 ، أوجد $\tilde{f}(0)$ و $\tilde{f}'(0)$.

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٧ ذو القعدة ١٤٢٥

اَلتمرين الاَول

١) لتكن $a<b$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دَالة متّصلة تحقّق $\forall x\in]a,b], f(x)\neq 0$

و $|f(x)|^2=2\int_a^x f(t)dt$ بينّ أنّ f قَابلة لِلإِشتقَاق علَى $]a,b[$ و إستنتج أنّ

$$\forall x \in [a,b], f(x) = x - a$$

٢) لتكن $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دَالة متصَاعدة . أثبت كمَا في الدّرس أنّ g قَابلة لتكَامل ريمَان

٣) لتكن $h(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ x^2 cos\frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \end{cases}$ هل الدَالة h قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$ هل مشتقّتهَا h' قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$ هل الدَّالة $\varphi(x) = xh'(x)$ قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[0,1]$ دعّم أجوبَاتك بإِثبَات

التمرين الثَّاني

١) مَا هو نصّ و برهَان مفكوك تيلور مع بَاقي تكَامل إِلَى الرتبة n عند الصّفر لدَالة f من صنف C^∞ . كيف نستنتج من هذَا المفكوك مفكوك تيلور مع بَاقي لقرَانج

٢) أوجد مفكوك تيلور إِلَى الرتبة 6 عند الصّفر لِلدَالة $f(x) = arctan(x^2)$

٣) أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_x^{sin^2(2x)} e^{-t^2} dt$

التمرين الثَّالث

١) لتكن $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ بيّن أنّ $\forall a > 0$ ، (f_n) تَتَقَارب بإِنتظَام علَى $[a, +\infty[$ إِلَّا أنّ (f_n) لَا تَتَقَارب بإِنتظَام علَى $[0, +\infty[$.

أوجد النهَايَات التَّالية

٢) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+n.}{(n^2+k^2)}$

٣) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{1+\frac{k}{n}}$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٧ ربيع الثَّاني ١٤٢٤

تحليل حقيقي ١ اَلاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الَاول

١) عرّف الدَّالة $arccosx$ و بيّن كيف وجدنَا اشتقَاقهَا و رسمنَا صورتهَا كمَا جَاء في الدّرس

٢) أوجد قيمة $arccos(cos(\frac{7}{3}\pi))$

٣) مَا هو نصّ و برهَان نظريّة تيلور مع بَاقي لقرَانج

و إستنتج مفكوك تيلور $arctanx$ عند الصّفر إِلَى الدّرجة n

التمرين الثَاني

أوجد النهَايَات التَّالية

١) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{Log(n+k)-logn}{n+k}$

٢) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^3+k^3}{(n+k)(k^2+nk+n^2)}$

٣) أوجد $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} arcsin\sqrt{\dfrac{1+sinx}{2}}$

٤) أوجد قيمة $\int e^{2x}cos^4xdx$

التمرين الثَالث

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، معرفة حسب $f(x)=x^3+x$

١) أوجد $f(\mathbb{R})$ و بين أنّ لِلدَالة f مقلوب (أو معكوس g) يحقّق $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=1$

٢) بين أنّ g قَابل لِلَاشتقَاق مرّتين و أوجد $g'(2)$

٣) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ ، هل الدَّالة g منتظمة الَاتّصَال

٤) بين أنّه يوجد $A > 0$ ، بحيث لكل $A < |x|$ فَانّ $\frac{g(x)}{x} < \frac{1}{2}$ و أستنتج أنّ $\frac{g(x)}{x}$ تصل الَى قيمتهَا العظمَى