الباب الأول:
"المتتاليات العددية"

تعريف 1: "القيمة المطلقة"

لكل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$، القيمة المطلقة للعدد x نرمز إليها بالرمز $|x|$ و نعرفها بما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x ; & x \geq 0 \\ -x ; & x < 0 \end{cases}$$

النظرية التالية تجمع بعض الخصائص للقيمة المطلقة

نظرية 1:

① لكل عدد حقيقي x لدينا:

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x^2| = |x|^2$

② لكل عددين حقيقيين x و y لدينا:

- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

البرهان: نكتفي بإثبات الخاصية الأخيرة و نترك إثبات باقي الخصائص كتمرين:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

و بالتالي:

$$\sqrt{(x+y)^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2}$$

إذاً:

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

تعريف 2: المتتالية (أو المتتابعة) الحقيقية هي دالة $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. نرمز إليها عادة بالرمز التالي $(x_n)_n$ حيث $x_n = f(n)$ لكل n.

إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ محوية من $\mathbb{R}$. نقول أن (x_n) متتابعة في A إذا:

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad x_n \in A$$

أمثلة:

i) $x_n = n^2 + \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) $v_k = k + k^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$

iv) $$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{3}{y_n}\right) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

تعريف 3: لتكن (x_n) متتابعة حقيقية. نقول أن (x_n) متقاربة إن وُجد عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq N \; , \; |x_n - x| \leq \varepsilon$$

نسمي العدد x نهاية المتتابعة (x_n) ونرمز إلى ذلك بما يلي:

$$x_n \longrightarrow x$$

أو

$$\lim x_n = x$$

مثال: باستخدام التعريف السابق، أثبت أنّ

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1} \longrightarrow 2$$

الجواب: لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$|x_n - 2| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

ليكن $\varepsilon > 0$. لدينا إذاً

$$|x_n - 2| \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

لنجعل N عدداً طبيعياً أكبر من $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

بالتالي

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - 2| \leq \varepsilon$$

وهذا هو المطلوب.

مثال: أثبت أنّ المتتابعة $u_n = (-1)^n$ غير متقاربة

الجواب: لنفرض العكس، إذا يوجد عدد حقيقي x بحيث

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N, \ |u_n - x| \leq \varepsilon$$

محققة وبالتالي فإن:

$$2 = |u_{N+1} - u_N| \leq |u_{N+1} - x| + |x - u_N| \leq 2\varepsilon$$

أي لكل $\varepsilon > 0$ لدينا:

$$\varepsilon \geq 1$$

وهذا مستحيل $\Rightarrow$ المتتابعة (u_n) غير متقاربة.

ملاحظة: لتكن (x_n) متتابعة حقيقية و x عدداً حقيقياً. باستعمال التعريف السابق، نستنتج أن (x_n) لا تتقارب من x (ونرمز إلى ذلك بالرمز $x_n \not\to x$) إذا وفقط إذا

وُجد عدد $\varepsilon > 0$ بحيث

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : \ |x_n - x| > \varepsilon$$

تعريف 4: لتكن (x_n) متتابعة حقيقية

(1) نقول أنّ $\lim x_n = +\infty$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall A > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N , \ x_n \geq A$$

(2) نقول أن $\lim x_n = -\infty$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall A > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N , \ x_n \leq -A$$

ملاحظة: إذا كانت $\lim x_n = -\infty$ أو $\lim x_n = +\infty$ فإن المتتابعة (x_n) لا تُعتبر متقاربة.

مثال: أثبت أنّ:

$$\lim u_n = +\infty$$

حيث $u_n = \sqrt{n+4} - 1$

الجواب: ليكن $A > 0$.

$$u_n \geq A \iff \sqrt{n+3} \geq A+1$$

$$\iff n \geq (A+1)^2 - 1$$

ليكن N عددا طبيعيا أكبر من $(A+1)^2 - 1$ فإن

$$\forall n \geq N , \ u_n \geq A$$

وبالتالي: $\lim u_n = +\infty$

تعريف 5: لتكن (x_n) متتابعة

(1) نقول أن (x_n) محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي b بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} , \ x_n \leq b$$

(2) نقول أن (x_n) محدودة من الأسفل إذا وُجد عدد حقيقي a بحيث:

$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad a \leq x_n$

③ نقول أن (x_n) محدودة إذا كانت محدودة من الاعلى ومن الاسفل و هذا يكافئ وجود عدد حقيقي $K>0$ بحيث

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq K$

مثال: المتتابعتان

$x_n = (-1)^n$

و

$u_n = \frac{2n+1}{n+1}$

محدودتان وذلك لأن:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}; \quad |u_n| \leq 2$

نظرية 2: إذا كانت متتابعة (x_n) متقاربة فإن نهايتها تكون وحيدة.

البرهان: لنفرض أن $x_n \to x$ و $x_n \to y$

ولنثبت أن $x=y$.

لتكن $\varepsilon>0$. إذا يوجد عددان طبيعيان N_1 و N_2 بحيث

$\forall n \geq N_1; \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

$\forall n \geq N_2, \quad |x_n - y| \leq \varepsilon$

لنجعل $p = N_1 + N_2$.

$|x-y| \leq |x-x_p| + |x_p - y|$

$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

هذا صحيح لكل $\varepsilon>0 \Longleftarrow$ $\boxed{x=y}$

نظرية 3: لنفرض أن $x_n \longrightarrow x$ و (x_n) و أن $x > a$ حيث a و x عددان حقيقيان. إذا يوجد b عدد حقيقي أكبر من a و N عدد طبيعي بحيث: $\forall n \geq N;\ x_n \geq b$

البرهان: بما أن $a < x$ فإنه يوجد عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ بحيث $a + \varepsilon < x$.

بما أن $x_n \longrightarrow x$ و $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall n \geq N,\quad |x_n - x| \leq \varepsilon$$

أي $-\varepsilon \leq x_n - x \leq \varepsilon$

وبالتالي فإن: لكل n أكبر من N لدينا:

$$x_n \geq x - \varepsilon > a$$

إذا يكفي أن نجعل $b = x - \varepsilon$.

مثال: إذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $x > 0$ فإنه يوجد عدد حقيقي $b > 0$ و N عدد طبيعي بحيث $\forall n \geq N;\ x_n \geq b$.

هذه النتيجة مهمة جدا.

نظرية 4: لنفرض أن:

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N,\quad x_n \leq y_n \end{cases}$$

إذا: $\boxed{x \leq y}$

سؤال: أثبت هذه النظرية باستعمال التعريف 3.

نظرية 5: كل متتابعة متقاربة تكون محدودة.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة متقاربة، ولتكن x نهايتها. لنجعل مثلا $\varepsilon = 1$. إذا يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث:

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - x| \leq 1$$

وبالتالي لكل $n \geq N$ لدينا:

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| \leq |x| + 1$$

ليكن K عددا طبيعيا أكبر من $|x|+1$، ومن القيم المطلقة $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|$ إذا:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq K$$

ملاحظة: العكس ليس دائما صحيح. مثال: $x_n = (-1)^n$ محدودة ولكنها غير متقاربة

نظرية 6: لنفرض أن $x_n \to x$ و $y_n \to y$. إذا:

① $x_n + y_n \longrightarrow x + y$

② $\forall a, b \in \mathbb{R}; \quad a x_n + b y_n \longrightarrow ax + by$

③ $x_n y_n \longrightarrow xy$

④ If $y \neq 0$, then $\frac{1}{y_n} \longrightarrow \frac{1}{y}$

and $\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{x}{y}$

⑤ $|x_n| \longrightarrow |x|$

البرهان: سوف نثبت الخاصية ③ ونترك إثبات الخاصيات الأخرى كتمارين.

النظرية السابقة تخبرنا أنه يوجد عددان $K_1 > 0$ و $K_2 > 0$ بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad |x_n| \leq K_1$$
$$|y_n| \leq K_2$$

لكل عدد طبيعي n لدينا:

$$|x_n y_n - xy| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)|$$
$$\leq |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)|$$
$$= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x|$$
$$\leq K_1 |y_n - y| + |y|\,|x_n - x|$$

ليكن $\varepsilon > 0$ وليكن $\varepsilon' > 0$ بحيث

$$K_1 \varepsilon' + |y| \varepsilon' \leq \varepsilon$$

بما أن $\varepsilon' > 0$ فإنه يوجد عددان طبيعيان N_1 و N_2 بحيث:

$$\forall n \geq N_1 ; \quad |x_n - x| \leq \varepsilon'$$
$$\forall n \geq N_2 ; \quad |y_n - y| \leq \varepsilon'$$

لنجعل $N_3 = N_1 + N_2$. إذا:

$$\forall n \geq N_3 ;$$
$$|x_n y_n - xy| \leq K_1 \varepsilon' + |y| \varepsilon' \leq \varepsilon$$

وبالتالي فإن $x_n y_n \longrightarrow xy$

ملاحظات مهمة: ① $x_n \longrightarrow x$ يكافئ أن

$$|x_n - x| \longrightarrow 0$$

② لإثبات أن $x_n \longrightarrow x$ يكفي أن نثبت أنه توجد متتالية u_n تتقارب من 0 بحيث:

$$\forall n \geq N , \quad |x_n - x| \leq u_n$$

N عدد طبيعي.

③ لنفرض أن $y_n \leq x_n \leq z_n$ وأن $y_n \longrightarrow l$ و $z_n \longrightarrow l$ إذا $x_n \longrightarrow l$. هذه الخاصية تسمى نظرية السندويتش

تمارين الباب الأول.

تمرين رقم 1: باستعمال التعريف 3، أثبت أن

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

و

$$y_n = \frac{1-n^2}{2n^2+n} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

تمرين رقم 2: أثبت نظرية السندويتش

تمرين رقم 3: لتكن المتتابعة (x_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^2 + 1 \end{cases}$$

① أوجد الأربع العناصر الأولى للمتتابعة x_n

② أثبت أن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq n$$

③ استنتج أن

$$\lim x_n = +\infty$$

تمرين رقم 4: أثبت النظرية رقم 4.

تمرين رقم 5: أثبت أن لكل x و y في $\mathbb{R}$ لدينا

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$$