جَامعة الملك فيصل   كلية العلوم

قسم الريَاضيَات

التَحليل الحقيقي ٢

اَلفصل الثَّاني ١٤٣٣ - ١٤٣٤

أ. د. حسين الير   *helmir@kfu.edu.sa*   تحويلة ٩٥١١

اَلمحتوَى

المقيَاس و المجموعَات القَابلة لِلقيَاس خوَاص المقيَاس. اَلدّوَال القَابلة لِلقيَاس . اَلتّكَامل و الدّوَال القَابلة لِلتّكَامل. نظريَّات النهَايَات لِلتّكَامل و تمهيديّة فَاتو. نظريّة التّقَارب المطرد و نظريّة الدَالة المسيطرة. متبَاينة هولدر و متبَاينة مينكوفسكي. تعريف المقيَاس علَى الجدَاء الديكَارتي نظريّة تويننّلي و نظريّة فوبيني

المرَاجع

1- W. Rudin " Real and Complex Analysis" Third Edition.McGrawhill 1987

2- G.Bartle "The Elements of Real Analysis " John Wiley & Sons 1976

3– روبرت ج بَارتل العنَاصر لِلتّحليل الحقيقي الطبعة الثَانية

التّقيِّيم

الدّرجة الفصليّة ٦٠   اَلدّرجة النّهَائِيّة ٤٠

اَلمطلُوب من الطَالب هومُحتوَى المُحَاضرَات المختصر في هذه المذكرة فيجب تحديد مَا لم يبرهن فهنَاك درجَات تحفيزيّة لِلإِستفسَارَات الجيّدة و لِلمحَاولَات الجيّدة لحلّ التّمَارين .

تكامل ريمان

تعريف

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ نقول أنّ الدَّالة f سلّميّة إِن وجدت تقسيمة **متهية** $a=x_0<x_1..<x_n=b$ **بحيث** علَى كلّ فترة جزئِيّة $]x_k,x_{k+1}[$ تكون f ثَابتة أي يوجد $c_k\in\mathbb{R}$ **بحيث** $x_k<x<x_{k+1}\Rightarrow f(x)=c_k$ عندهَا نعرّف تكَامل f علَى $[a,b]$ بأنّه

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x_{k+1}-x_k)$$

أمثلة

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x<1\\ 4 & x=1\\ 3 & 1<x\le 2\end{cases}$$

هي دَالة سلّمية تحقّق $\int_0^2 f(x)dx=2$

فَي حين أنّ

$$g(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x=0\\ n & , \quad \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ليست سلّميّة علَى $[0,1]$ لأنّ التّقسيمة غير متهيّة

ملَاحظَات (لِلإِثبَات)

١) كلّ دَالة سلّمية علَى $[a,b]$ تكون محدودة و مدَاهَا متهي

٢) كلّ دَالة سلّمية و متّصلة علَى $[a,b]$ تكون ثَابتة

٣) تكَامل الدَالة السلّمية علَى $[a,b]$ لَا يتغيّر بتغيّر التّقسيمة

٤) جمع و طرح و ضرب الدّوَال السلّميّة يكون دَوَال سلّميّة

٥) ليكن $E([a,b])$ **مجموعة الدّوَال السلّميّة** علَى $[a,b]$ فإنّ
أ) $\forall f \in E([a,b]), \forall g \in E([a,b])$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (f(x)+\lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$$

ب) $\forall f \in E([a,b]), \forall g \in E([a,b])$

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

ج) تكَامل الدَالة السلّمية علَى $[a,b]$ لَا يتغيّر بتغيّر الدَّالة فِى عدَد متهي من النّقَاط

تعريف

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ و $E([a,b])$ **مجموعة** الدّوَال السلّميّة علَى $[a,b]$ و $E^+(f)=\{\psi \in E([a,b]), \psi \geq f\}$ و $E^-(f)=\{\phi \in E([a,b]), \phi \leq f\}$ نقول أنّ الدَّالة f قَابلة لتكَامل ريمَان إِن تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi \in E^+(f), \exists \phi \in E^-(f); \int_a^b (\psi-\phi)(x)dx \leq \varepsilon$$

عندهَا نعرّف تكَامل f علَى $[a,b]$ بأنّه

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{\psi \in E^+(f)} \int_a^b \psi(x)dx = \sup_{\phi \in E^-(f)} \int_a^b \phi(x)dx$$

نظريّة

كلّ دَالة مطّردة علَى $[a,b]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان

برهَان

لنفترض أنّ f متصَاعدة و $a<b$ لتكن $n \in \mathbb{N}^*$ لكلّ $0 \leq k \leq n$ لتكن $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ نلَاحظ أنّ $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$ نعرّف دَالتين سلّميّتين ψ_n و ϕ_n علَى هذه التّقسيمة كَالتَّالي

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, x_k \leq x < x_{k+1} \Rightarrow \psi_n(x) = f(x_{k+1})$$

و كذلك

$$\forall 0 \le k \le n-1, x_k \le x < x_{k+1} \Rightarrow \phi_n(x) = f(x_k)$$

من هذَا التّعريف نرَى أنّ $\phi_n \le f \le \psi_n$ و

$$\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = \frac{b-a}{n}[(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1))$$
$$+ .. + (f(x_n) - f(x_{n-1}))] = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}$$

إذًا لكلّ $\varepsilon > 0$ لتكن n كبيرة بحيث $(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n} \le \varepsilon$ فإنّ وجود ψ_n و ϕ_n يبيّن أنّ f قَابلة لتكَامل ريمَان

نظريّة

كلّ دَالة متّصلة علَى $[a,b]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان و لنَا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

برهَان

لتكن f متّصلة علَى $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد دَالتين سلّميّتين تحقّقَان $\phi \le f \le \psi$ و $\int_a^b (\psi - \phi)(x)dx \le \varepsilon$. بمَا أنّ f منتظمة الإتّصَال فإنّه

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], \forall y \in [a,b], |x-y| \le \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{(b-a)+1}$$

لتكن $n \in \mathbb{N}$ كبيرة بحيث $\frac{b-a}{n} \le \delta$ نعرّف $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ و دَالتين سلّميّتين ψ_n و ϕ_n كَالتَالي لكلّ $0 \le k \le n-1$ و لكلّ $x_k \le x < x_{k+1}$ لتكن $\psi_n(x) = \sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t), \phi_n(x) = \inf_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$ لنَا $\phi_n \le f \le \psi_n$ و كذلك

$$\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = \frac{b-a}{n}[(\psi_n(x_0) - \phi_n(x_0)) +$$
$$(\psi_n(x_1) - \phi_n(x_1)) + .. + (\psi_n(x_{n-1}) - \phi_n(x_{n-1}))]$$

$$\leq \frac{b-a}{n}\frac{\varepsilon}{(b-a)+1}n \leq \varepsilon$$

و لنَا

$$\int_a^b \phi_n(x)dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \leq \int_a^b \psi_n(x)dx$$

إذًا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

ملَاحظة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=3}^{n-5} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

أي النّهَاية لَا تَتغيّر بتغيّر عدَد محدود من الحدود ذلك أنّ

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = 0$$

مثَال أوجد النهَايَات التَّالية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(n+k)-logn}{n+k}$

بتطبيق تكَاملَات ريمَان لنَا

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(n+k)-logn}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(1+\frac{k}{n})}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1\frac{Log(1+x)}{1+x}dx = \frac{1}{2}(log2)^2$$

أوجد النهَايَات التَّالية

١) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{Log(2n+k)-logn}{2n+k}$

٢) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+n.arctan(\frac{k}{n})}{(n^2+k^2)}$

نظريّة (الأسَاسيّة)

لتكن f قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ و متّصلة عند $x_0 \in]a,b[$ فإِنّ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ تكون قَابلة لِلإِشتقَاق عند x_0 و لنَا $F'(x_0)=f(x_0)$

برهَان

من علَاقة شَال فإِنّ

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = hf(x_0)$$
$$+h\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt}{h}$$

و بمَا أنّ $\varepsilon(h)=\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt}{h}$ تحقّق $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ نظرًا لأنّ f متّصلة عند x_0 فإِنّ F قَابلة لِلإِشتقَاق عند x_0 و لنَا $F'(x_0)=f(x_0)$

تمَارين

١) أثبت أو أنفَى بمثَال مضَاد

أ) كلّ دَالة قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ تكون محدودة

ب) كلّ دَالة محدودة علَى $[a,b]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان

ج) لكلّ دَالة سلّميّة f علَى $[a,b]$ توجد دَالة متّصلة F علَى $[a,b]$ تحقّق $\forall x\in[a,b], F'(x)=f(x)$

٢) لتكن f و g دَالتين قَابلتين لِلإِشتقَاق علَى $\mathbb{R}$ و h دَالة متّصلة أوجد إِشتقَاق

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

٣) لتكن f و g دَالتين قَابلتين لتكَامل ريمَان علَى $[a,b]$ أثبت أنّ

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le (\int_a^b f^2(x)dx)(\int_a^b g^2(x)dx)$$

تعريف

إذَا $A \subset X$ فإِنَّنَا نعرّف الدَّالة χ_A الخَاصّة بالمجموعة الجزئِيّة A $(caracteristic\ function\ of\ A)$ كمَا يلي

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ملَاحظة

بمَا أنّ $\mathbb{Q}\bigcap[0,1]$ قَابل لِلعد فيمكن أن نكتب $\mathbb{Q}\bigcap[0,1] = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$
و بهذَا تكون $(\chi_{\{a_k,k\leq n\}})n \in \mathbb{N}$ متتَابعة متزَايِدة من الدّوَال السلّميّة تَتقَارب من $\chi_{\mathbb{Q}\bigcap[0,1]}$ و هذه الدَّالة محدودة و لكنّهَا غير قَابلة لتكَامل ريمَان.
من هنَا شعر بعض الرّيَاضيون من بينهم لوبَاق $(Lebesgue)$ و بورَال $(Borel)$ بضرورة تعريف تكَامل ثَاني يجعل من نهَاية كلّ متتَابعة محدودة من دوَال قَابلة لِلتّكَامل دَالة قَابلة لِلتّكَامل.

اَلفضَاءَات القَابلة لِلقيَاس

تعريف

لتكن $\mathcal{A}$ مجموعة من المجموعَات الجزئِيّة من المجموعة X نقول أنّ $\mathcal{A}$ هي قَبيلة $\sigma - algbra$ علَى X إِذَا و فقط إِذَا تحقّقت الشّروط التَّالية

١) اَلمجموعة الفَارغة تنتمَى إِلَى $\mathcal{A}$ أي

$$\Phi \in \mathcal{A}$$

٢) إِتّحَاد قَابل لِلعد من عنَاصر $\mathcal{A}$ ينتمَى إِلَى $\mathcal{A}$ أي

$$\forall j \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

٣) متمّم كلّ عنصر من $\mathcal{A}$ ينتمَى إِلَى $\mathcal{A}$ أي

$$\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$$

عندهَا نسمَّى $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس فَى حين أنّ عنَاصر $\mathcal{A}$ تسمَّى المجموعَات القَابلة لِلقيَاس

ملَاحظَات

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس

١) اَلفرق بين مجموعتين قَابلتين لِلقيَاس يكون قَابل لِلقيَاس

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, (A \setminus B) \in \mathcal{A}$$

٢) تقَاطع عدَد متهَى أو قَابل لِلعد من مجموعَات قَابلة لِلقيَاس يكون قَابل لِلقيَاس

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c)^c \in \mathcal{A}$$

أمثلة

علَى كل مجموعة غير فَارغة X توجد علَى الأقلّ قبيلتَان أوّلهمَا $\mathcal{P}(X)$ المتكوّنة من جميع المجموعَات الجزئِيّة من المجموعة X و الثَّانية هي القبيلة التَّافهة $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$

تعريف

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة من المجموعَات الجزئِيّة من المجموعة Y تقَاطع جميع القبَائِل التي تحتوي علَى $\mathcal{E}$ هي قَبيلة تسمَى القبيلة الموَّلَدة من $\mathcal{E}$

إذَا كَانت $\mathcal{E}$ توبلوجيَا علَى Y فإِنّ القبيلة الموَّلَّدة من $\mathcal{E}$ تسمَّى قَبيلة بورَال و نرمز إليهَا كمَا يلي $\mathcal{B}$ أو $\mathcal{B}_Y$

ليدقّق الطَّالب أنّ تعريف القبيلة الموَّلَّدة من $\mathcal{E}$ له معنَى

إذَا كَانت $\mathcal{E}$ هي مجموعة المجموعَات المفتوحة علَى $\mathbb{R}$ فإِنّ القبيلة الموَّلَّدة من $\mathcal{E}$ تسمَّى قَبيلة بورَال $Borel$ و نرمز إليهَا كمَا يلي $\mathcal{B}$ أو $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

ليبيّن الطَّالب

١) أنّ كلّ F_σ أي إتّحَاد قَابل لِلعد من مجموعَات مغلقة ينتمي الَى $\mathcal{B}$

٢) أنّ كلّ G_δ أي تقَاطع قَابل لِلعد من مجموعَات مفتوحة ينتمي إِلَى $\mathcal{B}$

٣) لتكن $\mathcal{E}_1 = \{]-\infty, q[, q \in \mathbb{Q}\}$ و $\mathcal{E}_2 = \{]-\infty, q], q \in \mathbb{Q}\}$ و $\mathcal{E}_3 = \{[q, +\infty[, q \in \mathbb{Q}\}$ و $\mathcal{E}_4 = \{[p, q[, p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}, p \leq q\}$ بيّن لكلّ $1 \leq j \leq 4$ فإِنّ القبيلة الموَّلَّدة من $\mathcal{E}_j$ هي قَبيلة بورَال علَى $\mathbb{R}$

نظريّة

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس و $f : X \to Y$ دَالة عشوَائِيّة فإِنّ $\mathcal{A}' = \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$ هي قَبيلة علَى Y تسمَّى صورة $\mathcal{A}$ بالدَّالة f .

برهَان

١) لنَا $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ إذًا $\emptyset \in \mathcal{A}'$

٢) لكلّ $A \in \mathcal{A}', f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{A}$ إذًا $A^c \in \mathcal{A}'$

٣) إذَا كَانت (A_n) متتَابعة من عنَاصر $\mathcal{A}'$ فكلّ $n \in \mathbb{N}$ لنَا $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}$ إذًا $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$ فينتج أنّ $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}'$ ثمّ من ١ و ٢ و ٣ نرَى أنّ $\mathcal{A}'$ تحقّق جميع مسلّمَات القبيلة

الدّوَال القَابلة لِلقيَاس

تعريف

إذَا $A \subset X$ فإنّنَا نعرّف الدَّالة χ_A الخَاصّة بالمجموعة الجزئيّة A (*caracteristic function of A*) كمَا يلي

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ملَاحظة

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس و $A \subset X$ نلَاحظ أنّ

$$\{x \in X, \chi_A(x) < \alpha\} = \begin{cases} X & , \quad \alpha > 1 \\ A^c & , \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \emptyset & , \quad \alpha \leq 0 \end{cases}$$

إذًا

$$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in X, \chi_A(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$$

تعريف

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس نقول أنّ $f : X \to [-\infty, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس إذَا و فقط إذَا تحقَّق الشرط التَّالي

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, \alpha[) \in \mathcal{A}$$

أمثلة

١) ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس من الملَاحظة السَّابقة تكون $A \subset X$ قَابل لِلقيَاس إذَا و فقط إذَا كَانت χ_A قَابلة لِلقيَاس

٢) ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس و $\alpha_1, .., \alpha_n$ أعدَاد حقيقيّة و $A_1, ..A_n$ مجموعَات قَابلة لِلقيَاس فإِنّ $f = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ تكون دَالة قَابلة لِلقيَاس

تمارين

١) بيّن أنّه إِن كَانت $f : X \to [-\infty, +\infty]$ قَابلة لِلقيَاس تكون الصّورة العكسيّة لكلّ عنصر من قَبيلة بورَال تنتمَى إِلَى $\mathcal{A}$

$$\forall E \in \mathcal{B}, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$$

بيّن أنّ f تكون قَابلة لِلقيَاس إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق الشرط التَّالي

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^{-1}(]\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$$

٢) لتكن $u_1, .., u_n$ دوَال حقيقيّة قَابلة لِلقيَاس و $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دَالة متّصلة أثبت أنّ $x \to \phi(u_1(x), ..., u_n(x))$ تكون قَابلة لِلقيَاس

نظريّة

لتكن $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس فإِنّ $g = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ و $h = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ تكونَان قَابلتين لِلقيَاس

برهَان

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, g^{-1}(]\alpha, \infty]) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha, \infty])$ إِذًا g قَابلة لِلقيَاس و كذلك $\forall \alpha \in \mathbb{R}, h^{-1}([-\infty, \alpha[) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, \alpha[)$ إِذًا h قَابلة لِلقيَاس

ملَاحظَات

لتكن $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس فإِنّ $g = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ و $h = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ تكونَان قَابلتين لِلقيَاس ذلك أنّ $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} f_k$ و كذلك

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k$$

و بمَا أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقَارب نقطة بنقطة من f إِذَا و فقط إِذَا كَان

$$f = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

فإنّه إن كَانت $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس تَتقَارب نقطة بنقطة من f فحتمًا تكون f قَابلة لِلقيَاس

تعريف

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس نقول أنّ $f : X \to \mathbb{R}$ دَالة بسيطة إِذَا و فقط إِذَا كَانت قَابلة لِلقيَاس و صورتهَا متهية إِذًا تكون f دَالة بسيطة إِذَا و فقط إِذَا وجدت أعدَاد مختلفة $\alpha_1, .., \alpha_n$ و مجموعَات قَابلة لِلقيَاس $A_1, ..A_n$ بحيث

$$f = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

ذلك أنّه إِذَا كَانت f بسيطة و $\alpha_1, .., \alpha_n$ هي القيم المختلفة لِلدَالة f فبوضع $A_k = \{x \in X, f(x) = \alpha_k\}$ يكون A_k قَابل لِلقيَاس و لنَا

$$f = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

نظريّة

لتكن $f : X \to [0, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس فإِنّه توجد متتَابعة من دوَال بسيطة s_n علَى X تحقّق

أ) $0 \le s_1 \le s_2 \le .. \le f$

ب) $\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$

برهَان

لكلّ $n \in \mathbb{N}$ و كلّ $t \in \mathbb{R}$ يوجد عدَد صحيح وحيد $k_n(t)$ يحقّق $k_n(t)2^{-n} \le t < (k_n(t)+1)2^{-n}$ لنعرّف

$$\phi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)2^{-n} & , \quad 0 \le t < n \\ n & , \quad n \le t \le \infty \end{cases}$$

عندنَا

أ) ϕ_n بورليّة علَى $[0,+\infty]$ و لكلّ $t \in [0,n]$ لنَا $t-2^{-n} < \phi_n(t) \le t$ إذًا
$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = t$

ب) $0 \le \phi_1(t) \le \phi_2(t) \le .. \le t$ ذلك أنّه

$$\phi_{n+1}(t) = \begin{cases} k_{n+1}(t)2^{-(n+1)} & , \quad 0 \le t < n+1 \\ n+1 & , \quad n+1 \le t \le \infty \end{cases}$$

كي نثبت أنّ $\phi_{n+1} \ge \phi_n$ نلَاحظ أنّه

أ) إذَا كَانت $t \ge n+1$ فإنّ $\phi_{n+1}(t) = n+1$ في حين أنّ $\phi_n(t) = n$ إذًا
$\phi_{n+1}(t) \ge \phi_n(t)$

ب) إذَا كَانت $n \le t < n+1$ فإنّ
$\phi_{n+1}(t) = 2^{-(n+1)}E(t2^{(n+1)}) \ge 2^{-(n+1)}E(n2^{(n+1)}) = n$

في حين أنّ $\phi_n(t) = n$ إذًا $\phi_{n+1}(t) \ge \phi_n(t)$

ج) إذَا كَانت $0 \le t < n$ فإنّ $k_n(t)2^{-n} \le t < (1+k_{n+1}(t))2^{-(n+1)}$ بضرب طرفي المترَاجحة في $2^{(n+1)}$ نتحصّل علَى $2k_n(t) < 1 + k_{n+1}(t)$ و بما أنّ $k_n(t) \in \mathbb{Z}$ فإنّ $2k_n(t) \le k_{n+1}(t)$ إذًا

$$\phi_{n+1}(t) = k_{n+1}(t)2^{-(n+1)} \ge k_n(t)2^{-n} = \phi_n(t)$$

من أ و ب و ج نستنّتج أنّ $\phi_{n+1} \ge \phi_n$ و من ثمّ فإنّ المتّتابعة

$$s_n = \phi_n \circ f$$

تفِي بالغرض

تمارين

١) بين أنّ كلّ دَالة مطّردة $f : \mathbb{R} \to [-\infty,+\infty]$ تكون قَابلة لِلقيَاس في $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

٢) بيّن أنّ كلّ دَالة متّصلة قطعًا $f : \mathbb{R} \to]-\infty,+\infty[$ تكون قَابلة لِلقيَاس في $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

٣) بينّ أنّه إِذَا كَانت $f : X \to \mathbb{C}$ دَالة قَابلة لِلقيَاس أي الصورة العكسيّة لكّل بورلي من $\mathbb{C}$ يكون قَابل لِلقيَاس فإِنّ القيمة الحقيقيّة $\mathcal{R}eal(f)$ و القيمة التّخيّليّة $\mathcal{I}m(f)$ و القيمة المطلقة $|f|$ تكون قَابلة لِلقيَاس. و أوجد مثَال تكون فيه القيمة المطلقة $|f|$ دَالة قَابلة لِلقيَاس دون أن تكون f قَابلة لِلقيَاس

التّكامل

تعريف

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضَاء قَابل لِلقيَاس ، نقول أنّ $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ هي قيَاس إِذَا و فقط إِذَا تحقّق الشرطَان التّاليَان

١) توجد مجموعة A قَابلة لِلقيَاس و قيَاسهَا متنهي

$$\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$$

٢) لكلّ متتَابعة (A_n) من المجموعَات القَابلة لِلقيَاس و المنفصلة

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}, \forall m \neq n, A_n \bigcap A_m = \Phi$$

فإِنّ

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

عندهَا نسمي $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس

ملَاحظَات

إِذَا كَان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس فإِنّ

١) مقَاس المجموعة الفَارغة هو صفر $\mu(\Phi) = 0$

٢) لكلّ مجموعة متنهية A_n من المجموعَات القَابلة لِلقيَاس المنفصلة $\forall m \neq n, A_n \bigcap A_m = \Phi$ لنَا

$$\mu(\bigcup_{1\leq n\leq k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

٣) اَلقيَاس متزَائِد $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

٤) إِذَا كَانت $A_n \subset A_{n+1}$ متتَابعة متزَايِدة من المجموعَات القَابلة لِلقيَاس فإِنّ

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

٥) إِذَا كَانت $A_{n+1} \subset A_n$ متتَابعة متنَاقصة من المجموعَات القَابلة لِلقيَاس و A_1 له قيَاس متنهي فإِنّ

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

أمثلة

١) لِكلّ مجموعة جزئِيّة A من X (نكتب $A \in \mathcal{P}(X)$) ليكن $\mu(A)$ عدَد عنَاصر A فإِنّ $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ هو فضَاء مقَاس و هذَا القيَاس يسمَّى قيَاس العد *counting measure*

فمثلًا $X = \mathbb{N}, A_n = \{k > n\}$ و μ قيَاس العدّ يبيّن أنّه فَى النقطة الخَامسة السَّابقة أنّه ضروريّ أنّ A_1 له قيَاس متنهي

٢) ليكن $x_0 \in X$ لِكلّ $A \in \mathcal{P}(X)$ ليكن

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & , \quad x_0 \in A \\ 0 & , \quad x_0 \notin A \end{cases}$$

فإِنّ μ هو قيَاس علَى $\mathcal{P}(X)$ يسمَّى قيَاس ديرَاك *Dirac* عند العنصر x_0 و نرمز إِليه $\mu = \delta_{x_0}$

تعريف

إِذَا كَانت $f : X \to [0, +\infty]$ دَالة بسيطة قَابلة لِلقيَاس $f = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ و $E \in \mathcal{A}$ فإِنّ تكَامل f علَى E هو

$$\int_E f d\mu = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \bigcap E)$$

حيث $0.\infty = 0$ فقد يحصل أنّ $\mu(A_k \bigcap E) = \infty$ و $\alpha_k = 0$ إِذَا كَانت $f : X \to [0, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس و $E \in \mathcal{A}$ فإِنّ تكَامل f علَى E هو

$$\int_E f d\mu = \sup_{s\in E_f} \int_E s d\mu$$

حيث E_f هو مجموعة الدَّوَال s البسيطة و القَابلة لِلقيَاس و التى تحقِّق $s \leq f$

ملَاحظَات

إذَا كَانت $f, g : X \to [0, +\infty]$ دَالتين قَابلتين لِلقيَاس و $A \in \mathcal{A}$ و $E \in \mathcal{A}$

١) إن كَانت $f \leq g$ فإنّ $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

٢) و كذلك $\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$

٣) إذَا كَان $\mu(E) = 0$ فإنّ $\int_E f d\mu = 0$

نظريّة

إذَا كَانت $s, t : X \to [0, +\infty]$ دَالتين قَابلتين لِلقيَاس و بسيطتين فإنّ

$$\nu(A) = \int_A s d\mu$$

تعرّف قيَاس ν علَى $\mathcal{A}$ و كذلك

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

برهَان

إذَا كَانت $s = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ و E_n متتَابعة من $\mathcal{A}$ تحقِّق $\forall m \neq n, E_n \bigcap E_m = \Phi$ و $E = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)$ فإنّ

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \bigcap E) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_k \bigcap E_j)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \bigcap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

نظريّة التّقَارب المطّرد لِلوبَاق *Lebesgue's monotone convergence theorem*

لتكن $f_n : X \to [0,+\infty]$ متتَابعة من الدَّوَال القَابلة لِلقيَاس بحيث $0 \leq f_1 \leq f_2 ...$ و لتكن

$$\forall x \in X, f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

فإِنّ

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

برهَان

بمَا أنّ نهَاية كلّ متتَابعة من دوَال قَابلة لِلقيَاس تكون قَابلة لِلقيَاس فإِنّ f تكون قَابلة لِلقيَاس و بمَا أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$ فإِنّ $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ إِذًا

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

لِتكن s دَالة بسيطة قَابلة لِلقيَاس تحقّق $0 \leq s \leq f$ و $c \in]0,1[$ لِنعرّف

$$E_n = \{x \in X, f_n(x) \geq cs(x)\}$$

عندنَا E_n متزَايِدة و $\bigcup_{n \geq 1} E_n = X$ و بمَا أنّ

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu$$

إِذًا

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n \to \infty} c \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s d\mu$$

و من ثمّ فإِنّ

$$\int_X f d\mu = \sup_{s \in E_f, c<1} c \int_X s d\mu \leq \alpha = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$$

نظريّة

لتكن $f_n : X \to [0,+\infty]$ متتَابعة من الدَّوَال القَابلة لِلقيَاس و $\forall x \in X, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ فإِنّ

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

برهَان

بمَا أنّه توجد متّتَابعتَان s_n و t_n متزَايِدتَان و تحقّقَان $\lim_{n\to\infty} s_n = f_1$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = f_2$ فإِنّ

$$\int_X (f_1+f_2) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n+t_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} (\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu) = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

لتكن $S_n = f_0 + .. + f_n$ المتّتَابعة (S_n) متزَايِدة و تتقَارب من $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ نطبق نظريّة لوبَاق لِلتّقَارب المطّرد

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X S_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

تمهيديّة فَتو *Fatou's lemma*

لتكن $f_n : X \to [0, +\infty]$ متّتَابعة من الدّوَال القَابلة لِلقيَاس فإِنّ

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

برهَان

لتكن $g_n = \inf_{j\geq n} f_j$ المتّتَابعة g_n متزَايِدة و تحقّق $g_n \leq f_n$ ، إِذًا من نظريّة لوبَاق لِلتّقَارب المطّرد

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

تعريف

إِذَا كَانت $f : X \to [-\infty, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس و $f^+ = \sup(f, 0)$ و $f^- = -\inf(f, 0)$ و إِذَا كَان $E \in \mathcal{A}$ فإِنّ تكَامل f علَى E هو

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

إن كَان أحد التّكاملين الأخيرين متهي

إِذَا كَانت $f : X \to \mathbb{C}$ دَالة قَابلة لِلقيَاس و $\int_X |f| d\mu \in \mathbb{R}$ فنقول أنّ f قَابلة لِلتّكامل و نكتب $f \in L^1(X)$. إِذَا كَانت $f \in L^1(X)$ فإِنّ

$$\int_X f d\mu = \int_X Realf d\mu + i \int_X Imf d\mu$$

حيث $Realf$ و Imf همَا القيمة الحقيقيّة و القيمة التّخيّليّة لِلدَالة f

نظريّة لوبَاق *Lebesgue's dominated convergence theorem* أو الدَّالة المسيطرة

لتكن $f_n : X \to \mathbb{C}$ متّتَابعة من الدَّوَال القَابلة لِلقيَاس بحيث $\forall x \in X, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ موجودة و توجد $g \in L^1(X)$ بحيث $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$

فإِنّ $f \in L^1(X)$ و لنَا $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

برهَان

بمَا أنّ f قَابلة لِلقيَاس و $|f| \leq g$ فإِنّ $f \in L^1(X)$ و لنَا $2g - |f_n - f| \geq 0$ بتطبيق تمهيديّة فتو نرَى

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu$$

و من ثمّ فإِنّ

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

تمَارين

١) إِذَا كَانت $f : X \to [0, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس بيّن

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

تعرّف قيَاس علَى $\mathcal{A}$ و لكلّ دَالة قَابلة لِلقيَاس g فإنّ

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu$$

٢) علَى $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ بين أنّ كلّ دَالة تكون قَابلة لِلقيَاس. ليكن $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A و $f_n = \chi_{\{n\}}$ أوجد $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ و قَارن بيّن $\int_{\mathbb{N}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$ و $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ مَا العبرة

٤) هل يوجد فضَاء قَابل لِلقيَاس $(X, \mathcal{A})$ بحيث $\mathcal{A}$ تكون غير متهية و قَابلة لِلعد

لِفترض أنّه توجد قبيلة $\mathcal{A}$ غير متهية و قَابلة لِلعد

لكلّ $x \in X$ ليكن A_x تقَاطع جميع المجموعَات القَابلة لِلقيَاس التي تحتوى علَى x بمَا أنّ $\mathcal{A}$ قَابلة لِلعد فإنّ A_x هو أصغر مجموعة قَابلة لِلقيَاس تحتوَى علَى x . لنبيّن أنّ

$$A_x \bigcap A_y \neq \Phi \Rightarrow A_x = A_y$$

لنفترض أنّ $z \in A_x \bigcap A_y$ عندهَا $A_z \subset A_x$. حتمًا $x \in A_z$ و إلَا $A_x \setminus A_z$ تكون مجموعة قَابلة لِلقيَاس تحتوَى علَى x و أصغر قطعًا من A_x و هذَا تنَاقض. بمَا أنّ $x \in A_z$ فإنّ $A_x \subset A_z$ و من ثمّ $A_z = A_x$ و بنفس الطّريقة $A_z = A_x$ خلَاصة القول أنّ $\{A_x, x \in X\}$ هي تقسيمة لِلمجموعة X . كلّ مجموعة A قَابلة لِلقيَاس غير فَارغة تكتب $A = \bigcup_{x\in A} A_x$ لو كَان $\{A_x, x \in X\}$ متهي لكَانت $\mathcal{A}$ نفسهَا متهية. لتكن $\{A_{x_n}, n \in \mathbb{N}\}$ مجموعَات مختلفة لكل $P \in \mathbb{N}$ لتكن $B(P) = \bigcup_{n\in P} A_{x_n}$ المجموعَات $B(P)$ مختلفة و قَابلة لِلقيَاس و غير قَابلة لِلعد.

٥) لتكن $f \in L^1(X)$ بيّن أنّه

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \mu(E) \leq \delta \Rightarrow \int_E |f| d\mu \leq \epsilon$$

٦) لتكن $f_n : X \to \mathbb{C}$ متتَابعة من الدَّوَال القَابلة لِلقيَاس

بيّن أنّ مجموعة النّقَاط الّتي تكون فيهَا f_n متقَاربة هي مجموعة قَابلة لِلقيَاس

لنفترض أنّ $\mu(X) < \infty$ و أنّ f_n تَتقَارب بإِنتظَام من f بيّن أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

و بيّن أنّ هذه النّتيجة قد لَا تكون صحيحة إِن كَان $\mu(X) = \infty$

٧) لتكن $f \in L^1(X)$ بيّن أنّه

$$|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$$

بيّن أنّه إِن كَانت $f^2 \in L^1(X)$ و $g^2 \in L^1(X)$ فإِنّ $fg \in L^1(X)$ و لنَا

$$|\int_X fg d\mu|^2 \leq (\int_X |f|^2 d\mu)(\int_X |g|^2 d\mu)$$

٨) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بيّن أنّ النّقَاط C_f الّتى تكون فيهَا f متّصلة هي G_δ أي تقَاطع قَابل لِلعد لمجموعَات مفتوحة هل توجد دَالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث النّقَاط C_f الّتَى تكون فيهَا f متّصلة هي $\mathbb{Q}$

٩) بيّن أنّ لكلّ $x \in [0,1]$ توجد متَتَابعة (a_n) من $\{0,1,2\}$ بحيث $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ هذه هي كتَابة x في الأسَاس 3 متَى تكون لِلعدَد $x \in [0,1]$ كتَابتين مختلفتين في الأسَاس 3 . إِستنتج أنّ $[0,1]$ غير قَابل لِلعدّ .

بين أنّ $C = \{x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}, a_n \in \{0,2\}\}$ متَرَاص غير قَابل لِلعدّ و متمِّمه في $[0,1]$ هو مفتوح مجموع طول فترَاته وَاحد. نسمَّى C مجموعة كَانتور $Cantor$ فَى الأسَاس 3.

لكلّ كتَابة x في الأسَاس 3 ، $x = \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{3^n}$ لتكن $N(x) = \infty$ إِن لم يوجد $a_n = 1$ و $N(x)$ هو أصغر دَليل n بحيث $a_n(x) = 1$ فيمَا عدَى ذلك لتكن $b_n(x) = \frac{a_n(x)}{2}$ إِذَا كَانت $n < N(x)$ و $b_{N(x)} = 1$ بيّن أنّ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{b_n(x)}{2^n}$$

هي دَالة متّصلة و متزَايِدة علَى $[0,1]$ و ثَابتة علَى كلّ فترة من متمّم C هذه الدَّالة تسمَّى دَالة كنتور

١٠) نعرف أنّه علَى $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ يوجد قيَاس μ يسمَّى قيَاس لوبَاق يحقّق لكلّ فترة I فإنّ $\mu(I)$ هو طول الفترة I ·

أ) أثبت أنّ كلّ مجموعة جزئِيّة قَابلة لِلعد A من $\mathbb{R}$ تكون قَابلة لِلقيَاس و تحقّق $\mu(A)=0$ · إستنتج أنّ $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ غير قَابلة لِلعد

ب) لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متّصلة مقطعيًا بيّن أنّ تكَامل ريمَان $\int_0^1 f(t)dt$ يسَاوي $\int_{\mathbb{R}} f\chi_{[0,1]}d\mu$

القيَاس التَام

نلَاحظ أنّه إذَا كَانت $f:X\to[0,+\infty[$ دَالة قَابلة لِلقيَاس فإنّ

$$\int_A fd\mu=0\Leftrightarrow\mu(\{x\in X, f(x)>0\})=0$$

و من ثمّ فإنّ المجموعَات التى قيَاسهَا صفر يمكن أن نهملهَا عند التّكَامل

تعريف

نقول أنّ الخَاصيّة P تَتحقَّق تقريبًا فى جميع النّقَاط $(almost\ every\ where=a.e.)$ إن كَان قيَاس المجموعة التى لَا تتحقَّق فيهَا P هو صفر

فمثلًا إذَا كَانت $f:X\to[-\infty,+\infty[$ دَالة قَابلة لِلقيَاس فإنّ $\int_E|f|d\mu=0$ إذَا و فقط إذَا كَانت f تسَاوي الصفر تقريبًا فى جميع النّقَاط

قد يحصل أنّ دَالت $g:X\to[0,+\infty[$ غير قَابلة لِلقيَاس تحقّق $f=g\quad a.e.$ و f دَالة قَابلة لِلتكَامل فهل يمكن عندهَا أن نحكي علَى تكَامل g? من المفروض لَا هنَا تبرز أهميّة التعريف و النظريّة التَّاليَين

تعريف

نقول أنّ $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس تَام إذَا كَانت كلّ مجموعة جزئِيّة من مجموعة قيَاسهَا

صفر قَابلة لِلقيَاس

فيفضَاء مقَاس تَام إِذَا كَانت $f : X \to [0, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس $g : X \to [0, +\infty]$ دَالة تحقِّق $a.e.$ $f = g$ فحتمًا تكون g دَالة قَابلة لِلقيَاس

نظريّة

إِذَا كَان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس لنقل أنّ $E \in \mathcal{A}^*$ إِذَا و فقط إِذَا وجد $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{A}$ بحيث $A \subset E \subset B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$ عندهَا نعرّف $\mu * (E) = \mu(B)$.

فإِنّ $(X, \mathcal{A}^*, \mu*)$ يكون فضَاء مقَاس تَام

برهَان النظريّة

١) نلَاحظ أنّ μ حسنة التّعريف علَى $\mathcal{A}^*$ ذلك أنّه إِن كَانت $\{A, B, A_1, B_1\} \subset \mathcal{A}$ تحقِّق $A \subset E \subset B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$ و $A_1 \subset E \subset B_1$ و $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$ فإِنّ

$$\mu(A) \leq \mu(B_1) = \mu(A_1) \leq \mu(B) = \mu(A)$$

إِذًا $\mu(B) = \mu(B_1) = \mu^*(E)$

٢) عندنَا $\forall E \in \mathcal{A}, E \subset E$ و $\mu(E \setminus E) = 0$ إِذًا $E \in \mathcal{A}^*$ أي $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^*$ فينتج أنّ $X \in \mathcal{A}^*$

٣) ليكن $E \in \mathcal{A}^*$ ، إِذًا يوجد $\{A, B\} \in \mathcal{A}$ بحيث $A \subset E \subset B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$ إِذًا $B^c \subset E^c \subset A^c$ و لنَا $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ ، إِذًا $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$ إِذًا $E^c \in \mathcal{A}^*$

٤) لتكن $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \in \mathcal{A}^*$ إِذًا لِكلّ $n \in \mathbb{N}$ يوجد $\{A_n, B_n\} \in \mathcal{A}$ بحيث $A_n \subset E_n \subset B_n$ و $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$ إِذًا

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

و لنَا $\mu((\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) \leq \sum \mu(B_n \setminus A_n) = 0$

و إِن كَانت المتتَابعة E_n منفصلة $(m \neq n \Rightarrow E_n \bigcap E_m = \Phi)$ فإِنّ A_n تكون منفصلة

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

٥) اَلتّمَام : إِذَا كَان $E \in \mathcal{A}^*$ و $\mu*(E) = 0$ و $E' \subset E$ فإِنّه يوجد $B \in \mathcal{A}$ يحقّق $E \subset B$ و $\mu(B) = 0$ إِذًا $\emptyset \subset E' \subset B$ و $\mu(B \setminus \emptyset) = 0$ إِذًا $E' \in \mathcal{A}^*$

تمارين

١) لنفترض أنّ $f \in L^1(X)$ حيث $\mu(X) < \infty$ و S مجموعة مغلقة من $\mathbb{C}$ بحيث لكل مجموعة قَابلة لِلقيَاس E تحقّق $\mu(E) > 0$ يكون

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

بيّن أنّ

$$f(x) \in S, \;\; a.e.$$

بين أنّه إِن كَان

$$|\int_X f d\mu| = \int_X |f| d\mu$$

فإِنّه توجد $\alpha \in \mathbb{C}$ بحيث

$$\alpha f = |f|, \;\; a.e.$$

٢) لتكن A_n متتَابعة من المجموعَات القَابلة لِلقيَاس تحقّق

$$\sum \mu(A_n) < \infty$$

فإنّه تقريبًا كلّ $x \in X$ ينتمَى إِلَى عدَد متهى من A_n

٣) ليكن $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ فضَاء مقَاس تَام و $f : X \to [-\infty, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس و g دَالة تسَاوَى f تقريبًا فَى جميع النّقَاط فإِنّ g تكون دَالة قَابلة لِلقيَاس

٤) بعض المَلَاحظَات

أ) بيّن بمثَال أنّ

$$\liminf x_n \neq inf\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$$

ب) بيّن أنّ $\liminf x_n$ هو أصغر حد لمتَتابعة جزئيّة من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أوجد تعريف مشَابه لِلعدَد $\limsup$

ج) هل صحيح أنّ $\int fgd\mu = (\int fd\mu)(\int gd\mu)$.

د) إِذَا كَانت $f : X \to [0, +\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس بحيث $\int_E fd\mu < \infty$ هل صحيح أنّه توجد دَالة بسيطة ψ تحقّق $\psi \geq f$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم تَحليل حقيقي ٢

قسم الريَاضيَات الفصل الأوّل ١٨ رمضَان ١٤٢٥

فرض منزلي

١) بيّن أنّ لكلّ $x\in[0,1]$ توجد متَتَابعة (a_n) من $\{0,1,2\}$ بحيث $x=\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ هذه هي كتَابة x في الأسَاس 3 متَى تكون لِلعدَد $x\in[0,1]$ كتَابتين مختلفتين في الأسَاس 3 . إِستنتج أنّ $[0,1]$ غير قَابل لِلعدّ .

٢) بين أنّ $C=\{x=\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}, a_n\in\{0,2\}\}$ متَرَاص غير قَابل لِلعدّ و متمّمه في $[0,1]$ هو مفتوح مجموع طول فترَاته وَاحد. نسمَّى C مجموعة كَنتور $Cantor$.

٣) لكلّ كتَابة x في الأسَاس 3 ، $x=\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{3^n}$ لتكن $N(x)=\infty$ إِن لم يوجد $a_n=1$ و $N(x)$ هو أصغر دَليل n بحيث $a_n(x)=1$ فيمَا عدَى ذلك لتكن $b_n(x)=\frac{a_n(x)}{2}$ إِذَا كَانت $n<N(x)$ و $b_{N(x)}=1$ بيّن أنّ

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{N(x)}\frac{b_n(x)}{2^n}$$

هي دَالة متّصلة و متزَائِدة علَى $[0,1]$ و ثَابتة علَى كلّ فترة من متمّ C هذه الدَّالة

تسمَّى دَالة كنتور.

٤) بيّن أنّ $f(x) = x + f_1(x)$ هومومورفزم (تنَاظر متّصل هو و معكوسه) من $[0,1]$ إلَى $[0,2]$.

٥) ليكن μ القيَاس الوحيد المعرّف علَى المجموعَات البورليّة بحيث $\mu(]a,b[) = b - a$ بيّن أنّ $\mu(f(C)) = 1$

٦) لتكن g معكوس f بيّن أنّه توجد مجموعة جزئيّة $A \subset C$ بحيث $f(A)$ غير قَابل لِلقيَاس إستنتج أنّ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ غير تَام

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم تَحليل حقيقي ٢

قسم الريَاضيَات الفصل الأوّل ١٨ رمضَان ١٤٢٥

نموذج إختبَار

١) سُؤَال من الملزمة

مَا نصّ و برهَان تمهيدية فتو و نظريّة لوبَاق (اَلدَّالة المسيطرة)

٢) تمرين من الملزمة

لنفترض أنّ $f \in L^1(X)$ حيث $\mu(X) < \infty$ و S مجموعة مغلقة من $\mathbb{C}$ بحيث لكل مجموعة قَابلة لِلقيَاس E تحقّق $\mu(E) > 0$ يكون

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

فإنّ

$$f(x) \in S, \ \ a.e.$$

بين أنّه إن كَان $\int_X |f| d\mu = |\int_X f d\mu|$ فإنّه توجد $\alpha \in \mathbb{C}$ بحيث

$$\alpha f = |f|, \ \ a.e.$$

٣) تمرين خَارجَى

لتكن $p \geq 1$ و l^p مجموعة المتسلسلَات $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ لتكن معيَار X هو

$$||X||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty)^{\frac{1}{p}}$$

بيّن أنّ $(l^p, ||X||_p)$ فضَاء بنَاخ (معيَاري و كَامل) و أوجد مرَافقه.

قيَاس لوبَاق

القيَاس الخَارجَي

لِكلّ $A \subset \mathbb{R}$ لنعتمد أغطية A بفترَات مفتوحة قَابلة لِلعدّ $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ و ليكن $l(I_n)$ طول الفترة I_n القيَاس الخَارجَي لِلمجموعة A هو

$$m^*(A) = \inf_{A\subset\bigcup I_n} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$$

ملَاحظَات

١) اَلقيَاس الخَارجَي لِلمجموعة الفَارغة هو صفر $m^*(\Phi) = 0$

٢) إِذَا $A \subset B$ فإِنّ $m^*(A) \leq m^*(B)$

٣) إِذَا كَانت A متهية أو قَابلة لِلعدّ $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ فإِنّ $m^*(A) = 0$ ذلك أنّه لكلّ $\epsilon > 0$ فإِنّ $a_n \in]a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[$ إِذًا

$$0 \leq m^*(A) \leq 2\Sigma\frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$$

٤) لكلّ فترة I لنَا $m^*(I)$ هو طولهَا و مِمّا سبق تكون الفترة غير قَابلة لِلعدّ إِذَا و فقط إِذَا كَان طولهَا ليس بصفر

نظريّة :

إِذَا كَانت A_n متتَابعة من المجموعَات الجزئِيّة من $\mathbb{R}$ فإِنّ

$$m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

برهَان : إن وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $m^*(A_n) = \infty$ فإنّ النّظريّة تكون متَحقّقة بديهيًّا.
أمَّا إذَا كَان $\forall n \in \mathbb{N}, m^*(A_n) < \infty$ فإنّه لكلّ $\epsilon > 0$ يوجد غطَاء $I_{n,i}, i \in \mathbb{N}$ لِلمجموعة A_n بفترَات مفتوحة بحيث

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) \leq m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

بمَا أنّ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}} I_{n,i}$ فإنّ

$$m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n,i} l(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i l(I_{n,i}) \leq \sum_n m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} = (\sum_n m^*(A_n)) + \epsilon$$

تعريف : نقول أنّ $A \subset \mathbb{R}$ قَابل لِقيَاس عند لوبَاق إن تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall B \subset \mathbb{R},\ m^*(B) = m^*(B \bigcap A) + m^*(B \bigcap A^c)$$

ملَاحظَات : ١) بالإعتمَاد علَى النّظريّة السَّابقة نرَى أنّه دَائمًا

$$m^*(B) \leq m^*(B \bigcap A) + m^*(B \bigcap A^c)$$

إذًا $A \subset \mathbb{R}$ قَابل لِقيَاس عند لوبَاق إن تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall B \subset \mathbb{R},\ m^*(B) \geq m^*(B \bigcap A) + m^*(B \bigcap A^c)$$

فمثلًا إن كَان $m^*(A) = 0$ فإنّ A يكون قَابل لِلقيَاس
٢) نظرًا لِلتّنَاظر الموجود فَى التّعريف فإنّ $A \subset \mathbb{R}$ يكون قَابل لِقيَاس إذَا و فقط إذَا كَان A^c قَابل لِقيَاس

نظريّة : لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة المّجموعَات القَابلة لِلقيَاس فإنّ $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m^*)$ يكون فضَاءً مقَاسًا تَامًا يسمَى فضَاء لوبَاق

برهَان : ١) إِذَا كَان $E_1 \in \mathcal{M}$ و $E_2 \in \mathcal{M}$ فإِنّ $(E_1 \bigcup E_2) \in \mathcal{M}$ ذلك أنّه لكل $A \subset \mathbb{R}$ فإِنّ

$$A \bigcap (E_1 \bigcup E_2) = (A \bigcap E_1 \bigcap E_2) \bigcup (A \bigcap E_1 \bigcap E_2^c) \bigcup (A \bigcap E_2 \bigcap E_1^c)$$

إِذًا

$$m^*(A \bigcap (E_1 \bigcup E_2)) + m^*(A \bigcap (E_1 \bigcup E_2)^c) \leq m^*((A \bigcap E_1) \bigcap E_2) + m^*((A \bigcap E_1) \bigcap E_2^c)$$

$$+m^*(A \bigcap E_2 \bigcap E_1^c) + m^*(A \bigcap E_2^c \bigcap E_1^c) = m^*(A \bigcap E_1) + m^*(A \bigcap E_1^c) = m^*(A)$$

٢) نعرف أنّ $\phi \in \mathcal{M}$ و أنّ $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$

٣) لتكن $\forall n \in \mathbb{N},\ E_n \in \mathcal{M}$ متتَابعة منفصلة لنبيّن أنّ $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \in \mathcal{M}$ لتكن $F_k = \bigcup_{n \leq k} E_n$ لكل $A \subset \mathbb{R}$ و لكل $k \in \mathbb{N}$ فإِنّ

$$m^*(A) = m^*(A \bigcap F_k) + m^*(A \bigcap F_k^c) \geq \sum_{n=1}^{k} m^*(A \bigcap E_n) + m^*(A \bigcap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)^c)$$

إِذًا

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \bigcap E_n) + m^*(A \bigcap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)^c) \geq m^*(A \bigcap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)) + m^*(A \bigcap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)^c)$$

٤) لنبيّن أنّ m^* قيَاس، إِذَا طبقنَا مَا كتبنَاه فِى ٣ عندمَا تكون $A = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)$ نتحصّل علَى

$$m^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

منذ حين بيّنَا

$$m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

إذًا

$$m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

و بما أنّ $m^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$ فإنّ $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m^*)$ يكون فضَاءً مقَاسًا تَامًا

فَى مَا تبقَى إِذَا أهملنَا علَى $\mathbb{R}$ ذكر القيَاس أو القبيلة فإنَّا نقصد $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m^*)$ و لكلّ $E \in \mathcal{M}$ عوضًا عن $m^*(E)$ نكتب $m(E)$

فمثلًا تكون $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ قَابلة لِلقيَاس إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق الشرط التَّالَى

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \{x \in \mathbb{R}, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$$

نظريّة : كلّ مجموعة بورليّة تكون قَابلة لِلقيَاس

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}$$

برهَان

بما أنّ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ هي أصغر قبيلة تحتوي علَى $]a, \infty[, a \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{M}$ قَبيلة يكفي أن نبيّن أنّ كلّ $]a, \infty[$ قَابل لِقيَاس. ليكن $A \subset \mathbb{R}$ إن كَان $m^*(A) = \infty$ فبديهيّ أنّ

$$m^*(A) \geq m^*(A \bigcap]a, \infty[) + m^*(A \bigcap] - \infty, a])$$

. أمَّا إِذَا كَان $m^*(A) < \infty$ فلكلّ $\epsilon > 0$ يوجد غطَاء $\{I_n\}$ لِلمجموعة A من فترَات مفتوحة بحيث

$$\Sigma l(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon$$

إِذًا $I'_n = I_n \bigcap] - \infty, a]$ تغطّي $A \bigcap] - \infty, a]$ و $I''_n = I_n \bigcap]a, +\infty]$ تغطّي $A \bigcap]a, \infty[$ إِذًا

$$m^*(A\bigcap]-\infty,a])+m^*(A\bigcap]a,\infty[)\leq\sum m^*(I'_n)+m^*(I''_n)=\Sigma l(I_n)\leq m^*(A)+\epsilon$$

نظريّة : في فضَاء لوبَاق $(\mathbb{R},\mathcal{M},m)$ ليكن $E\in\mathcal{M}$ و $\epsilon>0$ فإنّه

١) يوجد مفتوح O من $\mathbb{R}$ يحقّق $E\subset O$ و $m(O\setminus E)<\epsilon$ (اَلمبدَإِ الأوّل لِلتلوُود)

٢) يوجد مغلق F من $\mathbb{R}$ يحقّق $F\subset E$ و $m(E\setminus F)<\epsilon$

برهَان ١) وجود المفتوح أ) لنفترض أوّلًا أنّ E محدود أي يوجد R يحقّق $E\subset[-R,R]$ من تعريف $m(E)=m^*(E)$ لكلّ $\epsilon>0$ يوجد غطَاء بفترَات مفتوحة قَابلة لِلعدّ $E\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}I_n$ بحيث إِذَا كَان $l(I_n)$ طول الفترة I_n فإِنّ $m(E)\leq\epsilon+\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)$ إِذًا $O=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ يفي بلغرض.

ب) أمَّا إِذَا كَان E غير محدودًا فلكلّ $n\in\mathbb{Z}$ فإِنّ $E_n=E\bigcap]n,n+1]$ يكون محدودًا و يحقّق $E_n\in\mathcal{M}$ إِذًا من المرحلة السَّابقة يوجد مفتوح $O_n\supset E_n$ و $m(O_n\setminus E_n)<\frac{\epsilon}{3.2^{|n|}}$ ليكن $O=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}O_n$ إِذًا

$$m(O\setminus E)\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}m(O_n\setminus E_n)\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\epsilon}{3.2^{|n|}}\leq\epsilon$$

٢) بمَا أنّ $E^c\in\mathcal{M}$ من المرحلة السَّابقة يوجد مفتوح O يحقّق $E^c\subset O$ و $m(O\setminus E^c)<\epsilon$ ليكن $F=O^c$ لنَا $E^c\subset O$ تكَافِئُ $F\subset E$ نلَاحظ أنّ $O\setminus E^c=O\bigcap E$ و كذلك $E\setminus F=O\bigcap E$ إِذًا $m(E\setminus F)=m(O\setminus E^c)<\epsilon$

نظريّة : في فضَاء لوبَاق $(\mathbb{R},\mathcal{M},m)$ ليكن $E\in\mathcal{M}$ فإِنّه توجد متتَابعة من مجموعَات G_n مفتوحة تحقّق $E\subset\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}G_n$ و $m((\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}G_n)\setminus E)=0$

كمَا توجد متتَابعة من مجموعَات F_n مغلقة تحقّق $E\supset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ و $m(E\setminus(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n))=0$

برهَان : من النظريّة السَابقة لكلّ $n \in \mathbb{N}$ يوجد مفتوح $E \subset G_n$ و $m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$ إذًا لكلّ $n \in \mathbb{N}$ فإنّ $m((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n) \setminus E) < \frac{1}{n}$ إذًا $m((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n) \setminus E) = 0$ كمَا أنّه لكلّ $n \in \mathbb{N}$ يوجد مغلق F_n من $\mathbb{R}$ يحقّق $F_n \subset E$ و $m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ إذًا لكلّ $n \in \mathbb{N}$ فإنّ $m(E \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)) \le m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ إذًا $m(E \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)) = 0$

ملَاحظة : في فضَاء توبولوجي نسمّي F_σ كلّ إتحَاد قَابل لِلعد لمجموعَات مغلقة كمَا نسمّي G_δ كلّ تقَاطع قَابل لِلعد لمجموعَات مفتوحة. اَلنظريّة السَابقة تنصّ علَى أنّه في فضَاء لوبَاق $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ لكلّ $E \in \mathcal{M}$ توجد مجموعة F من نوع F_σ كمَا توجدمجموعة G من نوع G_δ بحيث $F \subset E \subset G$ و $m(G \setminus F) = 0$

كتطبيق لِلنظريّة السَابقة بين أنّه يوجد متَرَاص K من $[0,2]$ يحقّق $m(K) = 1$ و دَاخل K فَارغ بين أنّ دَاخل $K + K$ غير فَارغ

نظريّة : (اَلمبدَإ الثَّاني لِلتلوُود أو نظريّة $Lusin$)

في فضَاء لوبَاق $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دَالة قَابلة لقيَاس لبَاق فلكلّ $\varepsilon > 0$ توجد دَالة g متّصلة علَى $[a,b]$ بحيث $m(\{x \in [a,b]; f(x) \neq g(x)\}) \le \varepsilon$

نظريّة : (اَلمبدَإ الثَّالث لِلتلوُود أو نظريّة $Egoroff$)

في فضَاء لوبَاق $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ ليكن $E \in \mathcal{M}$ و قيَاسه متنهي $(m(E) < \infty)$ لتكن $f_n : E \to \mathbb{R}$ متَتَابعة من الدوَال تَتقَارب تقريبًا في جميع نقَاط E من دَالة f فلكلّ $\varepsilon > 0$ يوجد $A \subset E$ قَابِل لِلقيَاس بحيث $m(A) \le \varepsilon$ و المتَتَابعة (f_n) تَتقَارب بانتظَام علَى $E \setminus A$ من f

المبدَإ الأوّل لِلتلوُود يقول أنّ كلّ مجموعة قَابلة لِلقيَاس هي تقريبًا إتّحَاد قَابل لِلعدّ لفترَات المبدَإ الثَّاني لِلتلوُود يقول أنّ كلّ دَالة قَابلة لِلقيَاس هي تقريبًا دَالة متّصلة أمّا

المبدَإ الثَّالث لِلتلوُود فيقول أنّ كلّ تقَارب $a.e.$ هو تقريبًا تقَارب منتظم

مجموعة غير قَابلة لقيَاس لوبَاق : في فضَاء لوبَاق $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ نلَاحظ أنّه لكلّ $E \in \mathcal{M}$ و لكلّ $a \in \mathbb{R}$ فإنّ $m(E) = m(a+E)$ ذلك أنّ طول كلّ فترة I يسَاوي طول الفترة $a+I$ لنعتمد أغطية E بفترَات مفتوحة قَابلة لِلعدّ $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ و ليكن $l(I_n)$ طول الفترة I_n القيَاس الخَارجي لِلمجموعة E هو

$$m(E) = m^*(E) = \inf_{E\subset\bigcup I_n} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \inf_{a+E\subset\bigcup(a+I_n)} \sum_{n=1}^{\infty} l(a+I_n) = m(a+E)$$

لنعرف علَى $\mathbb{R}$ علَاقة التّكَافُؤ $\sim$ نقول أنّ $x \sim y$ إذَا و فقط إذَا $x - y \in \mathbb{Q}$ صفوف التّكَافُؤ هي $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$ لكلّ $x \in \mathbb{R}$ فإنّ صفّ x هو $\overline{x} = x + \mathbb{Q}$ من كلّ $\overline{x} \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$ نختَار عنصرًا وحيد من $\overline{x}\bigcap[0,1[$ مجموعة هذه العنَاصر المختَارة بهذه الطريقة تكوّن مجموعة E من $[0,1[$ غير قَابلة لقيَاس لوبَاق ذلك أنّ $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} q + E$ و هذَا إتّحَاد منفصل لأنّ $q + E \bigcap q' + E \neq \emptyset$ تقتضي وجود $x \in E$ و $y \in E$ بحيث $q + x = q' + y$ إذًا $x - y \in \mathbb{Q}$ أي $\overline{x} = \overline{y}$ و بمَا أنّنَا إخترنَا من كلّ صف عنصرًا وحيد إذًا $x = y$ و من ثم فإنّ $q = q'$ إذًا لو كَان E قَابل لقيَاس لوبَاق لكَان $m(E) > 0$ إذ أنّ

$\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(q+E) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(E)$ إذًا $m(E) > 0$ إلَّا أنّ $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\bigcap[0,1[} q + E \subset [0,2]$ و الإتّحَاد منفصل إذًا $\sum_{q\in\mathbb{Q}\bigcap[0,1[} m(q+E) = \infty . m(E) \leq 2$ إذًا $m(E) = 0$ و هذَا ينَاقض مَا تقدَّم من أنّ $m(E) > 0$ · ينتج أنّ E غير قَابل لِلقيَاس في $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

أوجد دَالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غير قَابلة لقيَاس لوبَاق

ليحدِّد الطَّالب مَا لمْ يتمّ برهَانه و ليحَاول برهَانه أرسلُوا الحلول و جميع ملَاحظَاتكم حتَّى و لو كَانت أخطَاء مطبعيّة بسيطة فذلك دليل علَى المذَاكرة

الفضَاءَات L^p

تعريف

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس و f دَالة قَابلة لِلقيَاس علَى X و $0<p<\infty$ نعرّف

$$||f||_p=(\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

و نقول أنّ $f\in\mathcal{L}^p(X)$ إِن تحقَّق $||f||_p<\infty$

علَى $\mathcal{L}^p(X)$ نعرّف علَاقة التّكَافُؤ

$$f\sim g \Leftrightarrow f=g \ \ a.e.$$

صفوف التّكَافُؤ نسمّيهَا $L^p(X)$

أمثلة

١) اَلدَالة $f(x)=x^\alpha$ تحقِّق $f\in\mathcal{L}^p([1,\infty[)$ إِذَا و فقط إِذَا كَان $p\alpha<-1$

٢) علَى $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ حيث $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A فإِنّ كلّ $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{N})$ هو متتَابعة من الأعدَاد المركّبة $a_n=f(n)$ تحقِّق

$$||f||_p=(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

تعريف

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس و f دَالة قَابلة لِلقيَاس علَى X نقول أنّ $f\in\mathcal{L}^\infty(X)$ إِن وجد $M>0$ بحيث $\mu(\{x\in X,|f(x)|>M\})=0$ عندهَا نعرّف

$$||f||_\infty=\inf\{M\geq 0,\mu(\{x\in X,|f(x)|>M\})=0\}$$

بنفس الطّريقة،

علَى $\mathcal{L}^\infty(X)$ نعرّف علَاقة التّكَافُؤ

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \ a.e.$$

مجموعة صفوف التّكَافُؤ نسمّيهَا $L^{\infty}(X)$

أمثلة

١) اَلدَالة $f(x) = x\chi_{\mathbb{N}}(x)$ تنتمي إِلَى $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$ و لكن لَا تنتمي إِلَى $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A

٢) لكلّ $0 < p \leq \infty$ و لكلّ $\lambda \in \mathbb{C}$ فإِنّ

$$||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p$$

و كذلك

$$||f||_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \ a.e.$$

٣) علَى $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A يكون $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{N})$ هو مجموعة المتّتَابعَات من الأعدَاد المركّبة $a_n = f(n)$ المحدودة نسمّيهَا l^{∞} في حين أنّ l^p هو $\mathcal{L}^p(\mathbb{N})$

نظريّة (متَبَاينة $Holder$)

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس و ليكن $1 \leq p \leq \infty$ و q مرَافقه $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ لكلّ $f \in \mathcal{L}^p(X)$ و لكلّ $g \in \mathcal{L}^q(X)$ فإِنّ $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ و لنَا

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

برهَان

إِذَا كَان $||f||_p = 0$ أو $||g||_q = 0$ فإِنّ $f = 0 \ a.e.$ أو $g = 0 \ a.e.$ إِذًا $fg = 0 \ a.e.$ و تكون حينهَا المتَبَاينة بديهيّة

إِذَا كَان $p = \infty$ فإِنّ $q = 1$ و لنَا

$$|f(x)g(x)| \leq ||f||_{\infty} |g(x)| \ \ a.e.$$

عندمَا نكَامل الطّرفين نتحصل علَى متبَاينة $Holder$ في هذه الحَالة. نفس البرهَان في حَالة $q=\infty$ و $p=1$

أمَّا إِذَا كَان $1<p<\infty$ فنعرّف $F=\frac{|f|}{||f||_p}$ و $G=\frac{|g|}{||g||_q}$ إذًا

$$\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1$$

لكلّ $x\in X$ يحقّق $0<FG(x)<\infty$ لنعرّف $s(x)=pLnF(x)$ و $t(x)=qLnG(x)$

نظرًا لأنّ $t\to e^t$ محدّبة فإِنّ

$$e^{\frac{s(x)}{p}+\frac{t(x)}{q}} \le \frac{1}{p}e^{s(x)}+\frac{1}{q}e^{t(x)}$$

أي أنّ

$$F(x)G(x) \le \frac{1}{p}F^p(x)+\frac{1}{q}G^q(x)$$

عندمَا نكَامل الطّرفين نتحصّل علَى

$$\int_X FGd\mu \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

و هذَا هو المطلوب

نظريّة (متبَاينة $Minkowski$)

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس و ليكن $1\le p\le\infty$ و لكلّ $f\in\mathcal{L}^p(X)$ و لكلّ $g\in\mathcal{L}^p(X)$ فإِنّ $(f+g)\in\mathcal{L}^p(X)$ و لنَا

$$||f+g||_p \le ||f||_p+||g||_p$$

برهَان

إِذَا كَانت $p=1$ أو $p=\infty$ فَالبرهَان بديهي

إِذَا كَانت $1<p<\infty$ نلَاحظ أنّ $|f+g|^p\le|f||(f+g)^{p-1}|+|g||(f+g)|^{p-1}$ نظرًا لأنّ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ أي $(p-1)q=p$ فإِنّ متبَاينة $Holder$ تعطي

$$\int_X |f||(f+g)|^{p-1}d\mu \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |f+g|^{(p-1)q}d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

و كذلك

$$\int_X |g||(f+g)|^{p-1}d\mu \leq (\int_X |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}})(\int_X |f+g|^{(p-1)q}d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

إذًا لنَا

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq (\int_X |f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{q}}(||f||_p + ||g||_p)$$

إذَا كَانت $\int_X |f+g|^p d\mu < \infty$ ، نضرب الطّرفين في $(\int_X |f+g|^p d\mu)^{\frac{-1}{q}}$ نتحصل علَى متبَاينة مِنكوفسكي

ثمّ نلَاحظ أنّ $|f+g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ إذًا $\int_X |f+g|^p d\mu < \infty$ كلمَّا كَانت $f \in \mathcal{L}^p(X)$ و $g \in \mathcal{L}^p(X)$.

ملَاحظة

علَى L^p ليكن معيَار صفّ تكَافُؤ f هو $||f||_p$ فيكون هذَا المعيَار حسن التّعريف و يحقّق

١) لكلّ $f \in \mathcal{L}^p(X)$ فإنّ $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (من أجل هذَا عرّفنَا صفوف التّكَافُؤ).

٢) لكلّ $f \in L^p(X)$ و لكلّ $g \in L^p(X)$ فإنّ $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ (متبَاينة المثلّث)

٣) لكلّ $\lambda \in \mathbb{C}$ و لكلّ $f \in L^p(X)$ فإنّ $||\lambda f||_p = |\lambda|||f||_p$

و بهذَا يكون $(L^p(X), ||f||_p)$ فضَاء معيَاري

نظريّة $(Riesz - Fischer)$

الفضَاء $(L^p(X), ||f||_p)$ هو فضَاء بنَاخ $(Banach)$ أي معيَاري و كَامل

برهَان

لتكن f_n متَتَابعة كوشيّة في $(L^p(X),||f||_p)$ ، إِذًا توجد متَتَابعة جزئِيّة (f_{n_k}) تحقِّق

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq 2^{-k}$$

لتكن

$$g_n = \Sigma_{k=1}^{n}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\ ,\ g = \Sigma_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

بالإِعتمَاد علَى متبَاينة مِنكوفسكي نرَى أنّ $||g_k||_p < 1$ و بالتّقَارب المطّرد نرَى أنّ $||g||_p < 1$ إِذًا $g(x) < \infty\ a.e.$ و من ثمّ فإِنّ

$$f_{n_1} + \Sigma_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

تَتقَارب تقريبًا في جميع النّقَاط من f إِذًا

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$$

لتكن $\epsilon > 0$ بمَا أنّ f_n متَتَابعة كوشيّة في $(L^p(X),||f||_p)$ فتوجد رتبة $N \in \mathbb{N}$ بحيث إِذَا كَانت n و m أكبر من N فإِنّ $||f_n - f_m||_p \leq \epsilon$ بإِعتمَاد فتو نستنتج

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |fn_k - f_m|^p d\mu \leq \epsilon^p$$

و هذَا يبيّن أنّ $f \in L^p(X)$ و f_n تَتقَارب من f في $L^p(X)$

نلَاحظ أنّا قد أثبتنَا النّظريّة التَّالية

نظريّة

لتكن $1 \leq p < \infty$ إِذَا كَانت f_n تَتقَارب من f في $L^p(X)$ فإِنّ لهَا متَتَابعة جزئِيّة (f_{n_k}) تَتقَارب تقريبًا في جميع النّقَاط من f

نظريّة

لتكن $1 \leq p < \infty$ فإِنّ مجموعة الدّوَال البسيطة و القَابلة لِلتّكَامل تكون كثيفة في $L^p(X)$

برهَان

يكفي أن نثبت أنّه لكلّ $f \in L^p(X), f \geq 0$ و لكلّ $\epsilon > 0$ توجد دَالة بسيطة ψ تحقِّق $||f-\psi||_p \leq \epsilon$ نعرف أنّه توجد متَتَابعة من الدّوَال البسيطة تَتصَاعد نحو f بإِعتمَاد التّقَارب المطّرد لنَا $\lim_{n\to\infty} ||f-\psi_n||_p = 0$ إِذًا توجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $||f-\psi_n||_p \leq \epsilon$

نظريّة

لتكن $1 \leq p < \infty$ ٠ فإِنّ $\mathcal{C}_c$ مجموعة الدّوَال المتّصلة و التي تسَاوي صفر خَارج متراَص *compactly supported continuous functions* تكون كثيفة في $L^p(\mathbb{R})$

برهَان

نعرف أنّه لكلّ $f \in L^p(X), f \geq 0$ و لكلّ $\epsilon > 0$ توجد دَالة بسيطة ψ تحقِّق $||f-\psi||_p \leq \epsilon$ بمَا أنّ ψ هي تركيبة خطّية لدوَال خَاصّة بمجموعَات قَابلة لِلقيَاس يكفي أن نبيّن أنّه لكلّ دَالة χ_E خَاصّة بمجموعة E قَابلة لِلقيَاس توجد $g \in \mathcal{C}_c$ بحيث $||\chi_E - g||_p \leq \epsilon$ ٠ بمَا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} ||\chi_{E\bigcap[-n,n]} - \chi_E||_p = 0$$

يمكن أن نفترض أنّه يوجد $N > 0$ بحيث $E \subset [-N, N]$ نعرف أنّه لكلّ $\epsilon > 0$ يوجد متراَصّ $K \subset E$ و مفتوح V يحقِّق

$$]-N-1, N+1[\supset V \supset E \ , \ m(V \setminus K) \leq \epsilon$$

لتكن $h(x) = \inf_{y\in V^c} |x-y|$ نلَاحظ أنّ h دَالة متّصلة لتكن $a = \inf_{t\in K} h(t)$ و $g(x) = \inf(\frac{h}{a}, 1)$ فإِنّ g دَالة متّصلة تحقِّق

$$\chi_K \leq g \leq \chi_V$$

نستنتج أنّ

$$\int |\chi_E - g|^p dm \leq \int |\chi_E - \chi_K|^p dm = m(V \setminus K) \leq \epsilon$$

كتطبيق نبرهن النّظريّتين التّاليتين

نظريّة

لتكن $1 \leq p < \infty$ فإِنّ مجموعة الدّوَال السلميّة و القَابلة لِلتّكَامل تكون كثيفة في $L^p(X)$

برهَان

نعرف أنّه لكلّ $f \in L^p(X), f \geq 0$ و لكلّ $\epsilon > 0$ توجد دَالة موجبة $g \in \mathcal{C}_c$ تحقّق $||f-g||_p \leq \frac{\epsilon}{2}$ بمَا أنّ $g \in \mathcal{C}_c$ فهي منتظمة الإِتّصَال و توجد متّتَابعة من دَوَال سلّميّة φ_n تتصَاعد نحو g إِذًا إِنطلَاقًا من رتبة معيّنة فإِنّ $||g-\varphi_n||_p \leq \frac{\epsilon}{2}$ نستنتج أنّ

$$||f-\varphi_n||_p \leq ||f-g||_p + ||g-\varphi_n||_p \leq \epsilon$$

نظريّة

ليكن $1 \leq p \leq \infty$ و q مرَافقه $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ $f \in L^p(\mathbb{R})$ و $g \in L^p(\mathbb{R})$ فإِنّ

$$f*g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$$

هي دَالة متّصلة تحقّق $\lim\limits_{x\to\infty} f*g(x) = 0$ نقول أنّ $f*g \in \mathcal{C}_0$

برهَان

لتكن $\epsilon > 0$ إِذَا كَانت $g \in \mathcal{C}_c$ و $f \in \mathcal{C}_c$ فإِنّهمَا منتظمتَا الإِتّصَال و $\exists N \in \mathbb{N}, \forall |t| > N',\ g(t) = f(t) = 0$

$$|f*g(x) - f*g(x_0)| = |\int f(t)(g(x-t)-g(x_0-t))dt| \leq ||f||_p 2N \sup_{|t|\leq N} |(g(x-t)-g(x_0-t)|$$

و بمَا أنّ

$$\lim_{x\to x_0} \sup_{|t|\leq N} |g(x-t)-g(x_0-t)| = 0$$

نظرًا لِلإِتّصَال المنتظم فإِنّ $f*g$ تكون متّصلة و نلَاحظ أنّه $f*g(t) = 0, |t| > 2N$

في الحَالة العَامة نأخذ متتَابعتين $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{C}_c$ بحيث

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||_p=\lim_{n\to\infty}||g_n-g||_q=0$$

عندنَا

$$|f*g(x)-f_n*g_n(x)|\le|f*(g-g_n)(x)|+|(f-f_n)*g_n|\le||f||_p||g-g_n||_q+||f-f_n||_p||g_n||_q$$

إِذًا f_n*g_n هي متتَابعة من دوَال متّصلة تتقَارب بإِنتظَام من $f*g$ إِذًا $f*g$ متّصلة و لنَا

$$\lim_{|x|\to\infty}f*g(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{|x|\to\infty}f_n*g_n(x)=0$$

تمَارين

١) بيّن أنّ

$$\forall f\in L^1(\mathbb{R}),\ \forall\varphi\in\mathcal{C}^1,\ \int f(y)dy=\int f(\varphi(x))|\phi'(x)|dx$$

٢) لتكن $1\le p<\infty$ و $f\in L^p(\mathbb{R})$ لتكن $f_a(x)=f(x+a)$ أثبت أنّ $\lim_{a\to0}||f-f_a||_p=0$

٣) أثبت أنّه يوجد متراصّ $K\subset([0,1]\setminus\mathbb{Q})$ قيَاسه لَا يسَاوي صفر و أثبت أنّ $K+K$ يحتوي علَى فترة مفتوحة غير فَارغة

حَاول في تمَارين صفحة ٧١,٧٢,٧٣,٧٤,٧٥ من $Rudin$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٠ صفر ١٤٢٥

تحليل حقيقي ٢ **اَلَاختبَار النّهَائِي** **في سَاعتين**

التمرين الاَول

لتكن (f_n) متتَابعة من الدّوَال القَابلة لِلقيَاس علَى (X, τ, μ) و f دَالّة قَابلة لِلقيَاس نقول أنّ (f_n) تَتقَارب في القيَاس μ من f إِن و فقط إِن

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists E \in \tau, \mu(E) < \varepsilon, \forall n \geq N, \forall x \notin E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

١) بيّني إِن كَانت (f_n) تَتقَارب في القيَاس μ من f فإِنّه توجد متتَابعة جزئِيّة (f_{n_k}) تَتقَارب $(a.e.)$ تقريبًا في جميع نقَاط X من f

٢) إِذَا كَانت (f_n) تَتقَارب علَى X تقريبًا في جميع النقَاط من f و $\mu(X) < \infty$ بيّني أنّ (f_n) تَتقَارب في القيَاس μ من f

٣) هل تبقَى النّتيجة السَّابقة صحيحة إِذَا عوّضنَا $\mu(X) < \infty$ ب μ $\sigma-$ متهية $(\mu\ \sigma - finite)$

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٤ ذو القعدة ١٤٢٥

تحليل حقيقي ٢ اَلاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الاَول

١) أورد نصّ و برهَان متبَاينة هلدير متَى تحصل المسَاوَاة

٢) إِستنتج أنّه لكلّ $(x_1, .., x_n) \in \mathbb{C}^n$ و لكلّ $(y_1, .., y_n) \in \mathbb{C}^n$ فإِنّ

$$|x_1y_1 + .. + x_ny_n| \leq (|x_1|^3 + .. + |x_n|^3)^{\frac{1}{3}}(|y_1|^{\frac{3}{2}} + .. + |y_n|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

متَى تحصل المسَاوَاة

٣) بين كمَا في الدّرس أنّ لكلّ $A \subset \mathbb{R}$ قَابلة لِلقيَاس و لكلّ $0 < \epsilon$ يوجد مغلق $F \subset \mathbb{R}$ و مفتوح $V \subset \mathbb{R}$ بحيث $F \subset A \subset V$ و قيَاس $V \setminus F$ أقلّ من ϵ

التمرين الثَّاني

لتكن E مجموعة الدّوَال السّلميّة و القَابلة لِلتّكَامل علَى $\mathbb{R}$

١) بيّن أنّ E كثيفة في $L^1(\mathbb{R})$ هل E كثيفة في $L^\infty(\mathbb{R})$

٢) لكلّ $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ أوجد $\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{int}dt$ و لكلّ $f \in L^1(\mathbb{R})$ إستنتج قيمة $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{int}dt$

٣) هل صحيح أنّ كلّ دَالة متّصلة $f \in L^1(\mathbb{R})$ تحقّق $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$

التمرين الثَّالث

١) بيّن كمَا جَاء فَي الدّرس أو الملزمة أنّه $\forall p \in [1, \infty[$ يكون الفضَاء المعيَاري $L^p(\mathbb{R})$ كَاملًا و بيّن أنّه توجد $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ متّصلة و تحقّق $\forall p > 0, f \in L^p(\mathbb{R})$

٢) لتكن $f \in L^2(\mathbb{R})$ تحقّق

$$\forall g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \quad \int f(t)g(t)dt = 0$$

بيّن أنّ $\int f^2(t)dt = 0$ و إستنتج أنّ $f = 0$

٣) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دَالة متّصلة بيّن أنّ صورة كلّ مغلق بَالدَالة f يكون بورلي هل صورة كلّ مجموعة قَابلة لِلقيَاس بَالدَالة f تكون حتمًا قَابلة لِلقيَاس

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٥ ربيع الثَّاني ١٤٢٧

تحليل حقيقي ٢ اَلَاختبَار الفصلَى الثَّاني في سَاعتين

التمرين الَاول

١) أورد نصّ و برهَان متبَاينة $Minkowski$ ·

اَلتمرين الثَّاني

ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضَاء مقَاس بحيث $0<\mu(X)<\infty$ · لتكن $f:X\to\mathbb{R}$ دَالة قَابلة لِلتكَامل بحيث لكل مجموعة قَابلة لِلقيَاس E تحقِق $\mu(E)>0$ يكون $(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f d\mu)\in\{1,2\}$

١) بيّن أنّ $f(x)\in\{1,2\}$ $a.e.$

٢) إستنتج أنّه $f(x)=1$ $a.e.$ أو $f(x)=2$ $a.e.$

٣) لتكن $1\le p\le s\le\infty$ قَارن بين $\mathcal{L}^p(X)$ و $\mathcal{L}^s(X)$

٤) لتكن $g\in\mathcal{L}^\infty(X)$ مَا تعريف $||g||_\infty$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{p\to\infty}||g||_p=||g||_\infty$

التمرين الثَّالث

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٧ ربيع الأوّل ١٤٢٧

تحليل ٢ اَلاختبَار الفصلي الأوّل في سَاعتين

التمرين الَاول

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة لوبَاق $dominated\ convergence\ theorem$

٢) أوجد $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{1+e^{(-nsint)}}{\sqrt{t}}dt$

التمرين الثَّاني

لتكن τ القبيلة التَّافهة علَى $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعة المجموعَات الجزئِيّة من $\mathbb{N}$ و لكلّ $A\subset\mathbb{N}$ ليكن $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A

١) أوجد جميع الدّوَال القَابلة لِلقيَاس علَى $(\mathbb{N},\tau)$ و حدِّد مجموعة الدّوَال القَابلة

لِلتّكَامل علَى $(\mathbb{N},\tau,\mu)$

٢) علَى $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ بين أنّ كلّ دَالة تكون قَابلة لِلقيَاس. لتكن $f_n=\chi_{\{1,n\}}$ أي f_n هي الدَّالة الخَاصّة بَالمجموعة $\{1,n\}$ أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ و $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$

٣) هل صحيح أنّه إِذَا كَانت (f_n) متّتَابعة من دَّوَال بسيطة و قَابلة لِلتّكَامل و $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ دَالة بسيطة و قَابلة لِلتّكَامل فإِنّ

$$\int_{\mathbb{N}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$$

تمَارين الثَّالث

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس و $f:X\to[-\infty,+\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس

١) مَا معنَى $f=0$ تقريبًا في جميع النّقَاط بيّن أنّه إِذَا $f=0$ تقريبًا في جميع النّقَاط فإِنّ $\int_X |f|d\mu=0$

٢) لتكن $f\in L^1(X)$ بيّن أنّه

$$\forall\epsilon>0,\ \ \exists\delta>0,\ \ \mu(E)\le\delta \Rightarrow \int_E |f|d\mu\le\epsilon$$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢ جمَادَى الأَوّل ١٤٢٧

تحليل حقيقي ٢ علوم الاَختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الاَول

١) أورد نصّ و برهَان متَبَاينة $Holder$. (لاَ تنسَى الحَالة $p=1$)

٢) لكلّ $\epsilon>0$ و لكلّ $x\in\mathbb{R}$ و لكلّ $y\in\mathbb{R}$ بإِعتمَاد $(x\sqrt{\epsilon}-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}y)^2$ بيّن أنّ

$$2|x.y|\le\epsilon x^2+\frac{1}{\epsilon}y^2$$

لتكن (x_n) و (y_n) متّتَابعتين من أعدَاد مركّبة بيّن أنّ

$$2\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n| \leq \epsilon(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon}(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

التمرين الثَّاني

علَى $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ليكن $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A و $f_n = \frac{1}{n+1}\chi_{\{n,n+1,..,2n\}}$

١) برهن كمَا في الدّرس أنّ كلّ دَالة موجبة $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تكون قَابلة لِلقيَاس و أنّ

$$\int_{\mathbb{N}} g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)$$

٢) أوجد $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ و قَارن بيّن $\int_{\mathbb{N}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$ و $\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ هل (f_n) تتقَارب بإِنتظَام مَا العبرة

التمرين الثَّالث

لكلّ $n \in \mathbb{N}$ لتكن $f_n(x) = (1+\frac{x}{2n})^{-n}$

١) لكلّ $x > 0$ أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\sin(\frac{x}{n})$

٢) لكلّ $a > 0$ بيّن أنّ $\lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\sin(\frac{x}{n})dx = 0$ · أوجد أصلًا g_n لِلدَالة f_n و أوجد قيمة $\int_a^{+\infty} f_n(x)dx$ ثمّ إِستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\sin(\frac{x}{n})dx = 0$$

٣) أوجد قيمة $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)cos(\frac{x}{n})dx$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٦ جمَادَى الأول ١٤٢٨

تحليل حقيقي ٢ اَلإختبَار الفصلَى الثَّاني في سَاعتين

التمرين الأول

لتكن $1 \leq p < \infty$ و لكلّ $f \in L^1(\mathbb{R})$ و لكلّ $x \in \mathbb{R}$ لتكن $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt$

١) أثبت أنّ مجموعة الدّوَال السلميّة و القَابلة لِلتّكَامل تكون كثيفة في $L^p(\mathbb{R})$

٢) أثبت أنّ مجموعة الدّوَال المتّصلة و التي تسَاوي صفر خَارج متَرَاص تكون كثيفة في $L^p(\mathbb{R})$

٣) بيّن أنّ $\widehat{f}$ دَالة معرّفة علَى كَامل $\mathbb{R}$ و هي متّصلة

٤) بيّن أنّ $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$ و إِستنتج أنّ $\widehat{f}$ منتظمة الإِتّصَال

التمرين الثَّاني

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس و لتكن $f : X \to [0, +\infty[$ دَالة قَابلة لِتّكَامل

١) بيّن أنّ $\lim_{n\to\infty} n \int_X log(1 + (\frac{f(x)}{n}))d\mu = \int_X f(x)d\mu$

٢) بيّن $x \to nlog(1 + (\frac{x}{n})^2) - 2x$ متنَاقصة علَى $[0, +\infty[$ و إِستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty} n \int_X log(1 + (\frac{f(x)}{n})^2)d\mu = 0$$

لنفترض في بَاقي التّمرين أنّ قيَاس X متنهي

٣) لتكن $1 \leq p \leq s \leq \infty$ قَارن بين $\mathcal{L}^p(X)$ و $\mathcal{L}^s(X)$ و بيّن بأمثلة أنّه لَا يمكن مقَارنة $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ و $\mathcal{L}^s(\mathbb{R})$

٤) لتكن $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ مَا تعريف $||g||_\infty$ و بيّن أنّ $||g||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||g||_p$

التمرين الثَّالث

لتكن $1 \leq p < \infty$ و $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من f في $L^p(\mathbb{R})$.

١) أثبت كمَا في المحَاضرة أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لهَا متَتَابعة جزئِيّة (f_{n_k}) تَتقَارب تقريبًا في جميع النّقَاط من f

٢) إِذَا كَانت $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب عند جميع النّقَاط من g مَا العلَاقة بين f و g . حدّد هذه العلَاقة إِذَا كَانت f و g متّصلتين

٣) لتكن $f_a(x) = f(x+a)$ بينّ أنّ $\lim_{a\to 0} ||f_a - f||_p = 0$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١ ربيع الثَّاني ١٤٢٨

تحليل حقيقي ٢ اَلاختبَار الفصلَى الأول في سَاعتين

التمرين الَاول

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس و لتكن $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس

١) أثبت كمَا في الملزمة أنّ $h = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ و $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ تكونَان قَابلتين لِلقيَاس

٢) إِستنتج أنّ مجموعة النّقَاط الّتي تكون فيهَا f_n متقَاربة هي مجموعة قَابلة لِلقيَاس

٣) لنفترض أنّ $\mu(X) < \infty$ و أنّ f_n تتقَارب تقَارب بسيط من f بيّن أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f_n}{1+f_n^2} d\mu = \int_X \frac{f}{1+f^2} d\mu$$

و بيّن أنّ هذه النّتيجة قد لَا تكون صحيحة إِن كَان $\mu(X) = \infty$

التمرين الثَّاني

١) مَا تعريف فضَاء مقَاس تَام ٠ أوجد مثَال لفضَاء مقَاس تَام و مثَال ثَاني لفضَاء مقَاس غير تَام

٢) بيّن أنّ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ يكون فضَاء مقَاس تَام إِذَا و فقط إِذَا

لكلّ دَالة $f : X \to [-\infty, +\infty]$ قَابلة لِلقيَاس و لكّل g دَالة تسَاوَى f مَا عدَا علَى مجموعة مهملة فإِنّ g تكون دَالة قَابلة لِلقيَاس

التمرين الثَّالث

لتكن $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعة المجموعَات الجزئِيّة من $\mathbb{N}$ و لكلّ $A \subset \mathbb{N}$ ليكن $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A

١) أورد نصّ و برهَان تمهيديّة فتو $Fatou's\ lemma$

٢) علَى $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ بين أنّ كلّ دَالة تكون قَابلة لِلقيَاس. لتكن $f_n=\chi_{\{n,n+1,..,n^2\}}$ أي f_n هي الدَّالة الخَاصّة بَالمجموعة $\{n,n+1,..,n^2\}$ أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ و $\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$

٣) علَى الفضَاء المقَاس $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ ، هل صحيح أنّه إِذَا كَانت (f_n) متتَابعة من دَوَال بسيطة و قَابلة لِلتّكَامل و تَتقَارب بإِنتظَام من الدَالة الصفرية فإِنّ

$$\int_{\mathbb{N}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0$$

جَامعة الملك فيصل   كلية العلوم

قسم الريَاضيَات   ٣٠ ربيع الثَّاني ١٤٢٨

تحليل حقيقي ٢   اَلاختبَار الفصلَى الثَّاني   في سَاعتين

التمرين الَاول

لتكن $f_n : X\to[\infty,+\infty]$ متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس

١) أثبت كمَا في الملزمة أنّ $g=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ و $h=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ تكونَان قَابلتين لِلقيَاس

٢) إِستنتج أنّ مجموعة النّقَاط الّتي تكون فيهَا f_n متقَاربة هي مجموعة قَابلة لِلقيَاس

لنفترض أنّ $\mu(X)<\infty$ و أنّ f_n تَتقَارب بإِنتظَام من f بيّن أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$$

و بيّن أنّ هذه النّتيجة قد لَا تكون صحيحة إِن كَان $\mu(X)=\infty$

التمرين الثَّاني

١) ليكن $(X,\mathcal{A}^*,\mu)$ فضَاء مقَاس

بيّن $(X,\mathcal{A}^*,\mu)$ يكون فضَاء مقَاس تَام

إِذَا و فقط أذَا لكلّ $f:X\to[-\infty,+\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس و لكّل g دَالة تسَاوَى f تقريبًا فَى جميع النّقَاط فإِنّ g تكون دَالة قَابلة لِلقيَاس

ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضَاء مقَاس بحيث $0<\mu(X)<\infty$. لتكن $f:X\to\mathbb{R}$ دَالة قَابلة لِلتكَامل بحيث لكل مجموعة قَابلة لِلقيَاس E تحقِق $\mu(E)>0$ يكون $(\frac{1}{\mu(E)}\int_E fd\mu)\in\{1,2\}$

١) بيّن أنّ $a.e.\ f(x)\in\{1,2\}$

٢) إستنتج أنّه $a.e.\ f(x)=1$ أو $a.e.\ f(x)=2$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٠ جمَادَى الأوّل ١٤٢٨

تحليل حقيقي ٢ علوم الَاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الَاول ليكن $(\mathbb{R},\mathcal{M},\mu)$ فضَاء لوبَاق

١) مَا هو تعريف $\mathcal{M}$ و مَا هو تعريف μ و أثبت أنّه لكلّ $A\in\mathcal{M}$ فإنّه توجد متتَابعة $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المترَاصّات من A بحيث $\mu(A\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n)=0$ هل هذَا يقتضي أنّه توجد متتَابعة $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المترَاصّات من A بحيث $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$

٢) عرّف دَالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ غير قَابلة لِلقيَاس (دون برهَان)

٣) أوجد $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{1+e^{(-nsint)}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}dt$

٤) لتكن $f(t)=\frac{e^{(-sint)}}{(t+1)\sqrt{t}}$ أوجد $\{p>0,f\in L^P(]0,\infty[)\}$

التمرين الثّاني

١) أوجد طريقة لإثبَات أنّ $\int_0^\infty e^{-(x^2)}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ و أورد نصوص النظريَّات التي إستعملتهَا

٢) أوجد $\lim_{n\to\infty}n\int_0^\infty log(1+\frac{e^{-x^2}}{n})dx$ و $\lim_{n\to\infty}n\int_0^\infty log(1+\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{n}})dx$
دعّم جوَابك بإثبَات

٣) بيّن أنّه لكل $0\le c<A<\infty$ فإنّ $e^{-c^2}=\lim_{n\to\infty}[\int_c^A e^{-nx^2}dx]^{\frac{1}{n}}$ و مَا هي قيمة

$\lim_{n\to\infty}[\int_c^\infty e^{-nx^2}dx]^{\frac{1}{n}}$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٥ ربيع الأوّل ١٤٢٩

تحليل حقيقي ٢ اَلاختبَار الفصلَى الأوّل في سَاعتين

التمرين الاَول لكلّ مجموعة $A\subset\mathbb{N}$ نكتب $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ليكن $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A و علَى $\mathbb{N}$ لتكن $\mathcal{A}$ القبيلة المولدة من $\{1\}$

١) أورد نصّ و برهَان تمهيديّة فتو $Fatou$ ·

٢) أوجد القبيلة $\mathcal{A}$ و بيّن أنّ كلّ دَالة قَابلة لِلقيَاس علَى $(\mathbb{N},\mathcal{A})$ تكون بسيطة

٣) أوجد الدوَال القَابلة لِلتكَامل في $(\mathbb{N},\mathcal{A},\mu)$ · هل $(\mathbb{N},\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس تَام

٤) علَى $(\mathbb{N},\mathcal{A},\mu)$ بين أنّه إِذَا كَانت (f_n) متَتَابعة من دَوَال قَابلة لِلتّكَامل فإِنّ

$$\int_{\mathbb{N}}\liminf_{n\to\infty}f_n d\mu=\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}}f_n d\mu$$

هل تبقَى هذه النتيجة صحيحة في $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$

التمرين الثَّاني ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضَاء مقَاس تَام بحيث $\mu(X)=1$ و $f:X\to[-\infty,+\infty]$ دَالة قَابلة لِلقيَاس تحقِّق $0<f<3$ $a.e.$ أي تقريبًا في جميع النّقَاط

١) مَا هو تعريف $0<f<3$ تقريبًا في جميع النّقَاط بيّن أنّ f قَابلة لِلتّكَامل

٢) بيّن أنّ $0<\int_X fd\mu<3$

لنفترض أنّه لكل مجموعة قَابلة لِلقيَاس E تحقِق $\mu(E)>0$ يكون $(\frac{1}{\mu(E)}\int_E fd\mu)\in\{1,2\}$

٣) بيّن أنّ $f(x)\in\{1,2\}$ $a.e.$

٤) إِستنتج أنّه $f(x)=1$ $a.e.$ أو $f(x)=2$ $a.e.$

تمارين الثّالث

لتكن $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $f_n(x) = nf(nx)$

١) أوجد $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$

٢) أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ هل توجد دَالة g قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ تحقِق $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq g$

جَامعة الملك فيصل **كلية العلوم**

قسم الريَاضيَات ٩ جمَادَى الأول ١٤٢٩

تحليل حقيقي ٢ ألإختبَار الفصلَى الثّاني في سَاعتين

التمرين الأول : ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ فضَاء لوبَاق

١) أثبت أنّ $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ هو فضَاء تَام

٢) هل صحيح أنّه لكلّ مجموعة $A \subset \mathbb{R}$ قَابلة أو غير قَابلة لِلقيَاس و لكلّ $0 < \epsilon$ يوجد مفتوح V من $\mathbb{R}$ و مغلق F من $\mathbb{R}$ يحقّقَان $F \subset A \subset V$ و $m(V \setminus F) < \epsilon$ برّر جوَابك

٣) لتكن $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ هل $f \in L^1(\mathbb{R})$ و هل $f \in L^2(\mathbb{R})$.

٤) لنفترض أنّ $h \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^3(\mathbb{R})$ بيّن كمَا في الدرس أنّ $h \in L^2(\mathbb{R})$

التمرين الثّاني : لتكن $1 \leq p < \infty$ و $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تَتقَارب من f في $L^p(\mathbb{R})$.

١) أثبت كمَا في المحَاضرة أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لهَا متتَابعة جزئيّة (f_{n_k}) تتقَارب تقريبًا في جميع النّقَاط من f

٢) إذَا كَانت f و g دَالتين علَى $\mathbb{R}$ متّصلتين و متسَاويتين تقريبًا في جميع النّقَاط أثبت أنّهمَا متسَاويتَان في جميع النّقَاط

٣) لتكن $f_a(x) = f(x+a)$ بينّ أنّ $\lim_{a\to 0} ||f_a - f||_p = 0$ (إبدء بإفترَاض أنّ f متّصلة و تسَاوي صفر خَارج متراص)

٤) لتكن $h(x) = \chi_{[0,\infty[}(x) + x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ حيث χ_A هي الدَّالة الخَاصّة بَالمجموعة A

بينّ أنّ $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ و أوجد $||h(x)||_\infty$ هل توجد دَالة ϕ متّصلة علَى $\mathbb{R}$ تسَاوي h تقريبًا في جميع النّقَاط

و أوجد $\lim_{a\to 0^+} ||h_a - h||_\infty$ حيث $h_a(x) = h(x+a)$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٣ جمَادَى الثَّاني ١٤٢٩

تحليل حقيقي ٢ علوم الَاختبَار النّهَائي في سَاعتين

التمرين الَاول

١) أورد نصّ و برهَان متَباينة $Holder$. (لَا تنسَى الحَالة $p = 1$)

٢) لتكن (x_n) و (y_n) متتَابعتين من أعدَاد مركّبة بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^3 + |y_n|^{\frac{3}{2}} = 1$ بيّن أنّ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le 1$

٣) بينّ أنّ لكلّ $p \geq 3$ فإنّ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ تكون متقَاربة و بينّ أنّ

$$\lim_{p\to\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

$\mu_2(K) = 0$ و دَاخل K فَارغ

التمرين الثَّالث

لكلّ $n \in \mathbb{N}$ لتكن $f_n(x) = (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$

١) لكلّ $x > 0$ أوجد $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \cos(\frac{x}{n})$

٢) لكلّ $a > 0$ بيّن أنّ $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\cos(\frac{x}{n})dx$.

لكل $n \geq 2$ بين أنّ $\frac{1}{A} \leq \int_{a^2}^{+\infty} 1+\frac{u}{n})^{-n}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_a^{+\infty} f_n(x)dx$

٣) أوجد قيمة $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)cos(\frac{x}{n})dx$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٨ ذو القعدة ١٤٣٠

تحليل حقيقي ٢ اَلَاختبَار الفصلَى الأوّل في سَاعة و ٤٥ دقيقة

التمرين الَاول

١) أثبت أو أنفَى بمثَال مضَاد

أ) كلّ دَالة قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[1,2]$ تكون متّصلة مقطعيًّا

ب) كلّ دَالة محدودة علَى $[1,2]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان

ج) لكلّ دَالة قَابلة لتكَامل ريمَان f علَى $[1,2]$ توجد دَالة متّصلة F علَى $[1,2]$ بحيث عدَد النقَط $x \in [1,2]$ التي لَا يتحقّق فيهَا $\{F'(x) \neq f(x)\}$ يكون متهي

٢) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

أ) بيّن أنّ f قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[0,2]$

ب) أثبت أنّ

$$\sqrt{\int_0^2 (sin(\frac{1}{x})+e^{x^2})^2dx} \leq \sqrt{\int_0^2 sin^2(\frac{1}{x}dx)} + \sqrt{\int_0^2 e^{2x^2}dx}$$

٣) أوجد $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_{x^2}^{\arctan(2x)} sin(x^2)dx$

التمرين الثَّاني : لتكن $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ قَبيلة بورَال علَى $\mathbb{R}$ و $f:\mathbb{R}\to[-\infty,+\infty]$

١) مَا هو تعريف $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و مَا هو تعريف f قَابلة لِلقيَاس علَى $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

٢) أثبت أنّ f تكون قَابلة لِلقيَاس إِذَا و فقط إِذَا حقَّقت

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R}, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

٣) لنفترض أنّ f قَابلة لِلقيَاس بين أنّ $|f|$ تكون قَابلة لِلقيَاس و أنّ

$$\{x \in \mathbb{R}, f(x) = -\infty\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

٤) لتكن $f_n : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من الدّوَال القَابلة لِلقيَاس أثبت أنّ

$$f(x) = \begin{cases} \limsup |f_n(x)| & , \quad x \geq 0 \\ \liminf f_n(x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

تكون قَابلة لِلقيَاس.

جَامعة الملك فيصل **كلية العلوم**

قسم الريَاضيَات ٢٠ صفر ١٤٣٠

تحليل حقيقي ٢ علوم **الَاختبَار النّهَائِي** **في سَاعتين**

التمرين الأول :

ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ فضَاء لوبَاق و $A \subset]1, \frac{3}{2}[$ بحيث $A \notin \mathcal{M}$ و $f(x) = \frac{cosx}{1+|x|}$

١) مَا تعريف $||\ ||_\infty$ و مَا تعريف $L^\infty(\mathbb{R})$. أثبت أنّ $||f - \chi_{\mathbb{Q}}||_\infty = 1$ حيث $\chi_{\mathbb{Q}}$ هي الدَّالة الخَاصّة بَالمجموعة $\mathbb{Q}$

٢) هل $f \in L^1(\mathbb{R})$ و هل $f \in L^2(\mathbb{R})$.

٣) عرّف (دون برهَان) مجموعة جزئيّة $A \subset]1, \frac{3}{2}[$ بحيث $A \notin \mathcal{M}$ و أوجد دَالة g غير قَابلة لِلقيَاس علَى $\mathbb{R}$

٤) هل صحيح أنّه لكلّ $\epsilon > 0$ يوجد مفتوح V من $\mathbb{R}$ يحقّق $A \subset V$ و $\mu(V \setminus A) < \epsilon$ برّر جوَابك

التمرين الثَّاني :

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة الدَّالة المسيطرة لِلوبَاق

٢) لكلّ $t \in [0,\infty[$ أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{1+e^{-n[sin(nt)]^2}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$ و أوجد

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1+e^{-n[sin(nt)]^2}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$$

٣) أورد نصّ و برهَان متَبَاينة $Holder$ · (لَا تنسَى الحَالة $p=1$)

٤) لتكن (x_n) و (y_n) متتَابعتين من أعدَاد مركّبة بحيث

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^3 = \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^{\frac{4}{3}} = 1$ بيّن أنّ $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leq 1$

جَامعة الملك فيصل كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ١٨ ذو القعدة ١٤٣٠

تحليل حقيقي ٢ اَلَاختبَار الفصلَى الأوّل في سَاعة و ٤٥ دقيقة

التمرين الَاول

١) أثبت أو أنفَى بمثَال مضَاد

أ) كلّ دَالة قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[1,2]$ تكون متّصلة مقطعيًّا

ب) كلّ دَالة محدودة علَى $[1,2]$ تكون قَابلة لتكَامل ريمَان

ج) لكلّ دَالة قَابلة لتكَامل ريمَان f علَى $[1,2]$ توجد دَالة متّصلة F علَى $[1,2]$ بحيث عدَد النقَط $x \in [1,2]$ التي لَا يتحقَّق فيهَا $\{F'(x) \neq f(x)\}$ يكون منتهي

٢) لتكن

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

أ) بيّن أنّ f قَابلة لتكَامل ريمَان علَى $[0,2]$

ب) أثبت أنّ

$$\sqrt{\int_0^2 (sin(\frac{1}{x}) + e^{x^2})^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^2 sin^2(\frac{1}{x} dx)} + \sqrt{\int_0^2 e^{2x^2} dx}$$

٣) أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_{x^2}^{\arctan(2x)} sin(x^2)dx$

التمرين الثّاني : لتكن $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ قَبيلة بورَال علَى $\mathbb{R}$ و $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$

١) مَا هو تعريف $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و مَا هو تعريف f قَابلة لِلقيَاس علَى $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

٢) أثبت أنّ f تكون قَابلة لِلقيَاس إِذَا و فقط إِذَا حقّقت

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \{x \in \mathbb{R}, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

٣) لنفترض أنّ f قَابلة لِلقيَاس بين أنّ $|f|$ تكون قَابلة لِلقيَاس و أنّ

$$\{x \in \mathbb{R}, f(x) = -\infty\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

٤) لتكن $f_n : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من الدّوَال القَابلة لِلقيَاس أثبت أنّ

$$f(x) = \begin{cases} \limsup |f_n(x)| & , \quad x \geq 0 \\ \liminf f_n(x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

تكون قَابلة لِلقيَاس.

جَامعة الملك فيصل **كلية العلوم لِلبنَات**

قسم الريَاضيَات ١ ذو الحجة ١٤٣٠

نظرية القَايِيس و تكَامل لوبَاق الاَختبَار الفصلي الأوّل في سَاعة

التمرين الاَول

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس و $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من دوَال تحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{Q},\ (f_n^{-1}([q,+\infty])) \in \mathcal{A}$$

١) مَا هو تعريف القبيلة و القيَاس و الفضَاء مقَاس و مَا هو تعريف $(f_n^{-1}([q,+\infty]))$. بين أنّه لكلّ $n \in \mathbb{N}$ تكون f_n دَالة قَابلة لِلقيَاس.

٢) بين بطريقة مشَابهة لمَا في المحَاضرة أنّ $\liminf f_n$ دَالة قَابلة لِلقيَاس

٣) لتكن $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ دَلة متّصلة بين بطريقة مشَابهة لمَا في المحَاضرة أنّ $\phi(\frac{1}{f_1^2+1}, \frac{1}{f_2^2+1}, \frac{1}{f_3^2+1})$ تكون دَالة قَابلة لِقيَاس و استنتج أنّ $\frac{1}{f_1^2+1}.\frac{1}{f_2^2+1} + \frac{1}{f_3^2+1}$ تكون دَالة قَابلة لِقيَاس

التمرين الثَّاني

لتكن $\tau = \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ القبيلة التَّافهة علَى $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعة المجموعَات الجزئيّة من $\mathbb{N}$ و لكلّ $A \subset \mathbb{N}$ ليكن $\mu(A)$ هو عدَد عنَاصر A

١) بيّن أنّ كلّ دَالة قَابلة لِلقيَاس علَى $(\mathbb{N}, \tau)$ تكون ثَابتة

٢) علَى $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ بين أنّ كلّ دَالة تكون قَابلة لِلقيَاس.

٣) لتكن $f_n = \chi_{\{1,n\}}$ أي f_n هي الدَّالة الخَاصّة بَالمجموعة $\{1,n\}$ أوجد $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ و $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ و $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$

هل صحيح أنّ $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$

جَامعة الملك فيصل **كلية العلوم لِلبنَات**

قسم الريَاضيَات ٢٥ ذو الحجة ١٤٣٠

نظرية القَاييس و تكَامل لوبَاق **الاَختبَار الفصلي الثَّاني**

التمرين الأول

لكلّ مجموعة $B \subset \mathbb{N}$ نكتب $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ليكن $\mu(B)$ هو عدَد عنَاصر B و علَى $\mathbb{N}$
لتكن $\mathcal{A}$ القبيلة المولدة من المجموعة الجزئيّة $\{1,2\} \subset \mathbb{N}$

١) أوجد القبيلة $\mathcal{A}$

٢) بيّن أنّ كلّ دَالة $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ قَابلة لِلقيَاس علَى $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ تكون بسيطة

٣) علَى $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ بين أنّه إِذَا كَانت (f_n) متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس و تكَاملهَا متنهي فإِنّ

$$\int_{\mathbb{N}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$$

هل تبقَى هذه النتيجة صحيحة في $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$

التمرين الثَّاني

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضَاء مقَاس

١) أثبت أنّ $f : X \to [-\infty, +\infty]$ تكون د الة قَابلة لِلقيَاس إِذَا و فقط إِذَا تحقَّق

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \;\; \{x \in X, f(x) > q\} \in \mathcal{A}$$

٢) لنفترض أنّ $\mu(X) = 1$ و $f : X \to]0, 3[$ دَالة قَابلة لِلقيَاس بيّن أنّ $0 < \int_X f d\mu < 3$

٣) لتكن $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ متتَابعة من دَوَال قَابلة لِلقيَاس أثبت كمَا في الملزمة أنّ $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ و $h = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ تكونَان قَابلتين لِلقيَاس

٤) بيّن أنّ المجموعَات الجزئيّة $\{x \in X; f_1(x) = -\infty\}$ و $\{x \in X; f_2(x) = \infty\}$ و $\{x \in X; f_1(x) = f_2(x)\}$ تكون قَابلة لِلقيَاس

٥) إِستنتج أنّ مجموعة النّقَاط $x \in X$ التّي تكون فيهَا المتَتَابعة $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ متقَاربة هي مجموعة قَابلة لِلقيَاس

جَامعة الملك فيصل   كلية العلوم لِلبنَات

قسم الرياضيات ١صفر ١٤٣١

نظرية القَايِيس و تكَامل لوبَاق **الاختبَار الفصلي الثَّالث** (من ٢٥)

اَلتمرين الَاول

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة الدَّالة المسيطرة $dominated\ convergence\ theorem$

٢) أوجد $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{cos(\frac{t}{n})+sin(\frac{t}{n})}{1+t^2}dt$

٣) أوجد مثَال لفضَاء مقَاس $(X,\mathcal{A},\mu)$ و متتَابعة (f_n) من دَوَال قَابلة لِلتّكَامل تتقَارب بإِنتظَام من دَالة f قَابلة لِلتّكَامل إِلَّا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \neq \int_X f d\mu$$

٤) هل يمكن في المثَال السَابق أن يكون $\mu(X)=2$ · برّر جوَابك بإِثبَات

التمرين الثَّاني

لتكن $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $f_n(x)=nf(nx)$

١) مَا هو نصّ و برهَان نظريّة التّقَارب المطّرد، أوجد $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$

٢) أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ هل توجد دَالة g قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ تحقِق $\forall n\in\mathbb{N}, f_n\leq |g|$

٣) هل توجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث $(f_n)_{n\geq N}$ تكون متتَابعة مطّردة

٤) أوجد $\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\infty} log(1+\frac{4e^{-4x^2}}{n})dx$ مع العلم أنّ $\int_0^{\infty} e^{-(x^2)}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

جَامعة الملك فيصل **كلية العلوم لِلبنَات**

قسم الرياضيَات ١٥ صفر ١٤٣١

نظرية القَايِيس و تكَامل لوبَاق   الَاختبَار النّهَائِي

التمرين الأول :

ليكن $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ فضَاء لوبَاق و m^* المقيَاس الخَارجي

١) بين كمَا جَاء في الملزمة أنّه لكلّ $E \in \mathcal{M}$ توجد متتَابعة من مجموعَات O_n مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحقِّق $E \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ و $m((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n) \setminus E) = 0$

إستنتج أنّه لكلّ $E \in \mathcal{M}$ يوجد بوريلي B و مجموعة $N \subset \mathbb{R}$ تحقِّق $m(N) = 0$ و $E = B \setminus N$

٢) عرّف (دون برهَان) مجموعة جزئيّة $A \subset]1,2[$ بحيث $A \notin \mathcal{M}$ و أوجد دَالة g غير قَابلة لِلقيَاس لوبَاق معرّفة علَى $]1,3[$

إستنتج أنّه يوجد $\epsilon > 0$ بحيث لكلّ مفتوح $A \subset V$ من $\mathbb{R}$ فإنّ $m^*(V \setminus A) > \epsilon$

٣) لتكن $f(x) = \frac{sinx}{1+|x|}$ بيّن أنّ $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)dx = 0$ هل $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و هل $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

ألتمرين الثّاني :

١) لتكن $p \in]0,\infty[$ ، مَا هو تعريف $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ و أورد نصّ و برهَان متبَاينة $Holder$. (لَا تنسَى الحَالة $p = 1$)

٢) لنفترض أنّ $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{L}^4(\mathbb{R})$ بإِعتمَاد الدَّالتين $|h|$ و $|h|^2$ بيّن أنّ $h \in \mathcal{L}^3(\mathbb{R})$

٣) مَا هي نصوص المبدَأ الثَّاني و المبدَأ الثَّالث لِلتوُود و أوجد دَالة f قَابلِة لتكَامل لوبَاق بحيث لَا توجد g دَالة متّصلة علَى $\mathbb{R}$ تحقِّق $f = g$ $a.e.$

٤) لكن لتكن $f_n(x) = \frac{n}{2+(nx)^2}$ أوجد $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$ و أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ هل

توجد دَالة g قَابلة لِلتكَامل علَى $\mathbb{R}$ تحقِق $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq g$

٥) أوجد

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2n^2+k^2}$$