(1)

- تحليل حقيقي 2 -

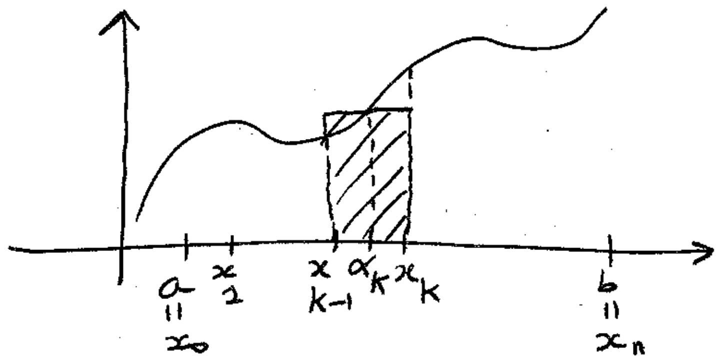
أهداف المقرر:

مفهوم ريمان للتكامل:

لتكن f دالة معرفة ومحدودة على فترة مغلقة ومحدودة $[a,b]$. وليكن التقسيم التالي للفترة

$$P = \{ x_0 = a,\ x_1,\ \dots,\ x_{k-1},\ x_k,\ \dots,\ x_n = b \}$$

لتكن α_k نقطة مختارة عشوائيا في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_{k-1}\right) f(\alpha_k)$$

بشرط أن هذه النهاية لا ترتبط باختيار نقاط التقسيم x_k ولا على اختيار النقاط العشوائية α_k .

ملاحظة: إذا كانت f دالة محدودة ومتصلة قطعيا على $[a,b]$ فإنها تكون قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $[a,b]$

مثال:

$$f : [2,5] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 + 1\ ; & 2 \le x < 3 \\ 4x + 6\ ; & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

الدالة f متصلة على الفترات $[2,3[$ و $]3,5]$

$$f(3) = 10 \quad ; \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 18 \quad ; \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 10$$

وبالتالي f محدودة ومتصلة قطعيا على $[2,5]$ فهي قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $[2,5]$.

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = \int_2^3 (x^2+1)\,dx + \int_3^5 (4x+6)\,dx =$$

مثال: ليكن $a<b$.

$$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \ ; & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \ ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

f دالة محدودة على $[a,b]$.

f غير قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $[a,b]$ ولكي نرى هذا نأخذ أولا النقاط العشوائية $\alpha_k \in \mathbb{Q}$ فنتحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b-a.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\alpha_k) = b-a.$$

ونأخذ هذه المرة $\alpha_k \notin \mathbb{Q}$ نتحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\alpha_k) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\alpha_k) = 0.$$

وبالتالي f غير قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $[a,b]$ بالرغم من أنها دالة محدودة على فترة مغلقة ومحدودة.

الهدف من المقرر:

تقديم مفهوم للتكامل يكون أعمق وأشمل من تكامل ريمان ألا وهو تكامل Lebesgue.

تمديد مفهوم الطول للحصول على قياس Lebesgue ومن ثم تعريف التكامل على أساسه.

لدينا هذه الأبواب:

- المجموعات القابلة للقياس وخاصياتها
- الدوال القابلة للقياس وخاصياتها
- مفهوم Lebesgue للتكامل وعلاقته بتكامل ريمان.
- خاصيات تكامل Lebesgue
- نظريات التقارب الخاصة بتكامل Lebesgue

مقدمة

I - المجموعات :

تعريف : الفئة أو المجموعة هي تجمع من الأشياء المحددة. الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة.

مثال :

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} ; b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. $\mathbb{C} = \{x + iy ; \quad x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

تعريف :

1/ نقول أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة B ونكتب $A \subset B$ إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي إلى B

$$(A \subset B) \Longleftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

2/ نقول أن المجموعتين A و B متساويتان إذا كان لديهما نفس العناصر.

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \land B \subset A)$$

3/ اتحاد مجموعتين A و B (ونرمز له ب $A \cup B$) هو المجموعة

$$A \cup B = \{x ; \quad x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \quad \text{و} \quad x \notin B$$

4/ تقاطع المجموعتين A و B (ونرمز له ب $A \cap B$) هو المجموعة :

$$A \cap B = \{x ; \quad x \in A \land x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{و} \quad x \in B$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \quad \text{أو} \quad x \notin B.$$

٧/ نقول أن المجموعتين A و B منفصلتان أو غير متقاطعتان إذا كان $A\cap B=\phi$; ϕ = الفئة الخالية.

<u>خاصيات</u> :

لتكن A و B و C ثلاث مجموعات. لدينا :

i/ $A\cup\phi=A$; $A\cap\phi=\phi$

ii/ $A\subset(A\cup B)$; $B\subset(A\cup B)$

iii/ $(A\cap B)\subset A$; $(A\cap B)\subset B$.

iv/ $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

v/ $A\cap A=A$; $A\cup A=A$.

vi/ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

vii/ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

viii/ $A\cap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$

$A\cup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$

حيث :

$\bigcup_{i\in I}B_i=\{x\ ;\ \exists i\in I\ ;\ x\in B_i\}$

$\bigcap_{i\in I}B_i=\{x\ ;\ \forall i\in I\ ;\ x\in B_i\}$.

<u>تعريف</u> : لتكن F الفئة الشاملة.

لتكن A و B مجموعات جزئية من F.

$A\setminus B=\{x\in F\ ;\ x\in A\wedge x\notin B\}$.

$B\setminus A=\{x\in F\ ;\ x\in B\wedge x\notin A\}$.

الفرق المتماثل $A\Delta B$ هو المجموعة

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ 

تعريف : لتكن A مجموعة جزئية من الفئة الشاملة F.
مكملة A بالنسبة للفئة الشاملة F (و نرمزلها A^c)
هي المجموعة :
$A^c = F \setminus A = \{x \in F \; ; \; x \notin A\}$.

خاصيات : لتكن A و B فئات جزئية من الفئة الشاملة F.
لدينا :

$i/ \; F^c = \phi \; ; \quad \phi^c = F$.

$ii/ \; A \cap A^c = \phi \; ; \quad A \cup A^c = F$.

$iii/ \; (A^c)^c = A \; ;$

$iv/ \; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \; ; \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

$v/ \; A \setminus B = A \cap B^c$

$vi/ \left(\bigcap_i B_i\right)^c = \bigcup_i B_i^c \; ; \quad \left(\bigcup_i B_i\right)^c = \bigcap_i B_i^c$

تعريف : إذا كانت E مجموعة فإن فئة القوة للمجموعة E
ونرمزلها بـ $\mathcal{P}(E)$ هي المجموعة المتكونة من جميع
المجموعات الجزئية للمجموعة E بما فيها E و ϕ.

$\mathcal{P}(E) = \{A \; ; \; A \subseteq E\}$.

مثال : $E = \{1, 2\}$ فإن : $\mathcal{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}\}$

تعريف : ليكن A و B مجموعات غير خالية.
حاصل الضرب الكرتيزي $A \times B$ هو المجموعة المكونة من كل
الأزواج المرتبة (a, b) بحيث $a \in A \; ; \; b \in B$.

$A \times B = \{(a, b) \; ; \; a \in A \; ; \; b \in B\}$.

II- الحدود السفلية والعلوية لمجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

تعريف :

ن/ نقول أن العدد الحقيقي M هو حد علوي للمجموعة A
إذا كان : $\forall x \in A;\ x \leq M.$

ن/ نقول أن العدد الحقيقي K هو حد سفلي للمجموعة A
إذا كان : $\forall x \in A;\ x \geq K$

ملاحظة : كل عدد أكبر من M يمثل أيضا حدا علويا للمجموعة A
كل عدد أصغر من K يمثل حدا سفليا للمجموعة A.

تعريف :

ن/ نقول أن العدد الحقيقي M هو أصغر حد علوي للمجموعة A
إذا تحقق :
* M يمثل حدا علويا للمجموعة A : $\forall x \in A;\ x \leq M$
* إذا كان L حدا علويا للمجموعة A فإن $M \leq L$

ونكتب $M = \operatorname{Sup} A$

ن/ نقول أن العدد الحقيقي K هو أكبر حد سفلي للمجموعة A
إذا تحقق :
* K يمثل حدا سفليا للمجموعة A : $\forall x \in A;\ x \geq K$
* إذا كان ℓ حدا سفليا للمجموعة A فإن $K \geq \ell$

ونكتب $K = \inf(A)$

ملاحظة : ليس من الضروري أن يكون أصغر حد علوي أو أكبر حد سفلي للمجموعة A من عناصر المجموعة.

مثال : $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ فإن $\operatorname{Inf}(A) = 0\ ;\ \operatorname{Sup}(A) = 1$

خاصية التقريب : لتكن $A \subset \mathbb{R}$;

$$M = \operatorname{Sup}(A) \iff \forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A;\quad M - \varepsilon < x \leq M$$

$$K = \operatorname{Inf}(A) \iff \forall \varepsilon > 0;\ \exists y \in A;\quad K \leq y < K + \varepsilon .$$

الباب الأول : المقياس والمجموعات القابلة للقياس :

I- الفضاءات القابلة للقياس :

تعريف : ليكن Ω مجموعة. $\mathcal{A}$ عائلة من مجموعات جزئية من Ω $(\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega))$. نقول أن $\mathcal{A}$ قبيلة أو جبر سيجما على Ω إذا تحققت الشروط التالية.

1/ $\phi \in \mathcal{A}$

2/ لكل $E \in \mathcal{A}$ فان $E^c \in \mathcal{A}$

3/ لكل $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}$ فان $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}$

في هذه الحالة نقول أن الزوج $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس وتسمى عناصر $\mathcal{A}$ مجموعات قابلة للقياس.

مثال :

1/ $\mathcal{A} = \{\phi, \Omega\}$

2/ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

3/ ليكن $E \subset \Omega$ فان $\mathcal{A} = \{\phi, E, E^c, \Omega\}$ جبر سيجما على Ω.

ملاحظات : ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس.

1/ لكل $E, F \in \mathcal{A}$ فان : $E \cap F \in \mathcal{A}$; $E \setminus F$; $E \Delta F$

الاثبات :

$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{A}.$

$E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{A}.$

$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F) \in \mathcal{A}$.

ثانيا/ $\Omega^c = \phi \in \mathcal{A} \Leftarrow \Omega \in \mathcal{A}$.

وبالتالي كل قبيلة على Ω تحتوي على Ω.

ثالثا/ لكل $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{A}$ فإن: $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}$

الإثبات:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}.$$

تعريف: ليكن $\mathcal{D}$ عائلة من مجموعات جزئية من Ω $(\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega))$. فإن أصغر جبر سيجما على Ω يحتوي على $\mathcal{D}$ يسمى القبيلة المولدة من $\mathcal{D}$.

إذا كانت $\mathcal{D}$ توبولوجيا على Ω فان القبيلة المولدة من $\mathcal{D}$ تسمى جبر بوريل على Ω و نرمز لها بـ $\mathcal{B}_\Omega$.

مثال: ليكن $E \subset \Omega$; $\mathcal{D} = \{E\}$.
فان القبيلة المولدة من $\mathcal{D}$ هي $\{\phi, E, E^c, \Omega\}$.

تعريف: نأخذ $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ عائلة الفترات المفتوحة $]a, b[$; $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
القبيلة المولدة من $\mathcal{D}$ تسمى جبر بوريل (Borel-Algebra) $\mathcal{B}$ على $\mathbb{R}$. يعني أن $\mathcal{B}$ هو أصغر جبر سيجما على $\mathbb{R}$ يحتوي على الفترات المفتوحة.
كل عنصر في $\mathcal{B}$ يسمى مجموعة بوريل (Borel-set)

خاصيات :

1/ كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تنتمي الى $\mathcal{B}$.

2/ كل مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ تنتمي الى $\mathcal{B}$.

3/ $\mathcal{B}$ يحتوي على جميع التقاطعات والاتحادات القابلة للعد للمجموعات المغلقة او المفتوحة.

4/ $\mathcal{B}$ يحتوي على جميع المجموعات القابلة للعد.

البرهان :

1/ لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. فانه يوجد (I_n) عائلة من الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ و المنفصلة مثنى مثنى بحيث $G = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} I_n$.

بما ان $\forall n \in \mathbb{N};\ I_n \in \mathcal{B}$ و $\mathcal{B}$ جبر سيجما على $\mathbb{R}$ فان $G \in \mathcal{B}$.

2/ لتكن F مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ فان F^c مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وحسب (1) فان $F^c \in \mathcal{B}$ وبالتالي $F \in \mathcal{B}$.

3/ من خاصيات جبر سيجما.

4/ لنثبت اولا ان كل انواع الفترات تنتمي الى $\mathcal{B}$.

$\bullet/\ ]a, +\infty[\ = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}}]a, n[\ \in \mathcal{B}$ * $\bullet/\ ]-\infty, a] = (]a, +\infty[)^c \in \mathcal{B}$

$\bullet/\ ]-\infty, a[\ = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, a[\ \in \mathcal{B}$. * $\bullet/\ [a, +\infty[\ = (]-\infty, a[)^c \in \mathcal{B}$

$\bullet/\ [a, b[\ =]-\infty, b[\ \cap [a, +\infty[\ \in \mathcal{B}$

$\bullet/ \ ]a,b] =]-\infty, b] \cap]a, +\infty[\ \in \mathcal{B}.$

$\bullet/ \ [a,b] =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[\ \in \mathcal{B}.$

$\bullet/ \ \{a\} =]-\infty, a] \cap [a, +\infty[\ \in \mathcal{B}.$

لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة قابلة للعد فإن

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \in \mathcal{B}.$$

تمرين 1 :

أثبت أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ و مجموعة الأعداد الغير نسبية $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ مجموعات بوريل

تمرين 2 :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس.

ليكن $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ دالة.

نضع $\mathcal{A}' = \{A \subset \mathcal{X} ;\ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$.

أثبت أن $\mathcal{A}'$ قبيلة على $\mathcal{X}$.

$\mathcal{A}'$ تسمى صورة القبيلة $\mathcal{A}$ بالدالة f.

تمرين 3 :

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير قابلة للعد.

نضع $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega ;$ A أو A^c قابلة للعد$\}$

أثبت أن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس.

تعريف : القياس :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس.

نقول أن الدالة $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ قياس

$$E \longmapsto \mu(E)$$

إذا حققت الشروط التالية:

1/ يوجد $E \in \mathcal{A}$ بحيث $\mu(E) < +\infty$

2/ لكل $E_1, \dots, E_2, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى فان:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$$

حينئذ نسمي $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

ملاحظات: ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

1/ $\mu(\phi) = 0$

2/ لكل $E, F \in \mathcal{A}$ بحيث $E \cap F = \phi$ فان

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

3/ لكل $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ منفصلة مثنى مثنى فان:

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

4/ لكل $E, F \in \mathcal{A}$ بحيث $E \subset F$ فان $\mu(E) \leq \mu(F)$.

الاثبات:

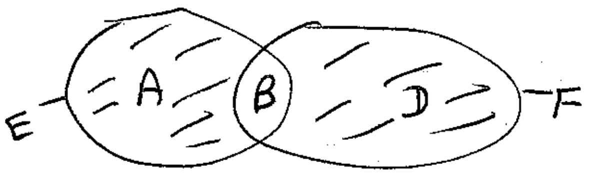
نضع $A = F \setminus E$ فان $F = A \cup E$ و $A \cap E = \phi$

وبالتالي:

$$\mu(F) = \mu(A \cup E) = \mu(E) + \mu(A) \geq \mu(E)$$

٧/ لكل $E, F \in \mathcal{A}$ فان : $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$

الاثبات :



نضع $B = E \cap F \in \mathcal{A}$;
$A = E \setminus B \in \mathcal{A}$
$D = F \setminus B \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}\mu(E \cup F) = \mu(A \cup B \cup D) &= \mu(A) + \mu(B) + \mu(D) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) + \mu(D) + \mu(B) \\ &\leq \mu(A \cup B) + \mu(D \cup B) = \mu(E) + \mu(F).\end{aligned}$$

٧ن/ لكل $E, F \in \mathcal{A}$;

$$\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F).$$

الاثبات : بنفس طريقة ٧/ .

٧ت/ لكل $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}$ فان

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

مثال :

1/ قياس العد :

ليكن Ω مجموعة . لكل $A \subset \Omega$ نضع

$\mu(A) = |A| =$ عدد عناصر المجموعة A.

فان $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ فضاء مقاس و μ قياس العد .

2/ ليكن Ω مجموعة غير خالية . $x_0 \in \Omega$.

لكل $A \subset \Omega$ نضع :

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 ; & x_0 \in A \\ 0 ; & x_0 \notin A \end{cases}$$

μ قياس على $\mathcal{P}(\Omega)$ يسمى قياس Dirac عند النقطة x_0 ونرمز له ب δ_{x_0} .

تعريف : القياس التام :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

نقول أن الفضاء $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس تام لذا كانت كل مجموعة جزئية من مجموعة قياسها صفر، قابلة للقياس. يعني لذا كانت $E \subset F$ و $\mu(F) = 0$ فان $E \in \mathcal{A}$.

مثال :

1/ قياس Dirac عند النقطة x هو قياس تام.

2/ قياس العد أيضا قياس تام.

ملاحظة : من فضاء مقاس $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ كيف نكون فضاء مقاس تام ؟

نظرية : ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

نضع : $\mathcal{A}^* = \{E \subset \Omega ;\ \exists A, B \in \mathcal{A} ;\ A \subset E \subset B ;\ \mu(B \setminus A) = 0\}$

ولكل $E \in \mathcal{A}^*$ نعرف : $\mu^*(E) = \mu(B)$

فان $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ فضاء مقاس تام.

البرهان : لدينا :

$E \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{A} ;$

$A \subset E \subset B \ ;\ \mu(B \setminus A) = 0.$

أولا : نثبت أن $\mathcal{A}^*$ جبر سيجما على Ω :

i/ $\phi \in \mathcal{A}^*$

ii/ لكل $E \in \mathcal{A}^*$ فان $E^c \in \mathcal{A}^*$.

iii/ لكل $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}^*$ فان $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}^*$

ثانيا: نثبت أن μ^* قياس على $\mathcal{A}^*$.

1/ μ^* حسنة التعريف:

لو إذا كان: $A \subset E \subset B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$

و $A_1 \subset E \subset B_1$ و $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$

هل أن: $\mu(B) = \mu(B_1)$

بما أن: $A \subset E \subset B_1$ فإن $\mu(A) \leq \mu(B_1)$

$A_1 \subset E \subset B$ فإن $\mu(A_1) \leq \mu(B)$

و نصل أن: $\mu(A) = \mu(B)$ و $\mu(A_1) = \mu(B_1)$

فإن $\mu(B) = \mu(B_1) = \mu^*(E)$.

2/ هل يوجد $E \in \mathcal{A}^*$ بحيث $\mu^*(E) < +\infty$ ؟

نعلم أنه يوجد $E \in \mathcal{A}$ بحيث $\mu(E) < +\infty$

و بالتالي: $E \subset E \subset E$ و $\mu(E \setminus E) = 0$: $E \in \mathcal{A}^*$

$\mu^*(E) = \mu(E) < +\infty$.

3/ ليكن $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}^*$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى

هل أن: $\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$ ؟

لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ بحيث: $A_n \subset E_n \subset B_n$

و $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$. $(A_n)_n$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى.

$$\bigsqcup_n A_n \subset \bigsqcup_n E_n \subset \bigsqcup_n B_n$$

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(E_n)$$

و بالتالي μ^* قياس على $\mathcal{A}^*$.

ثالثا: نثبت أن μ^* قياس تام على $\mathcal{A}^*$.

ليكن $F \in \mathcal{A}^*$ بحيث $\mu^*(F) = 0$ و $E \subset F$

هل أن $E \in \mathcal{A}^*$ ؟

بما أن $F \in \mathcal{A}^*$ فانه يوجد $A, B \in \mathcal{A}$ بحيث

$A \subset F \subset B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$.

$0 = \mu^*(F) = \mu(B)$.

وبالتالي: $E \subset F \subset B$ $\Rightarrow$ $\phi \subset E \subset B$

$\mu(B \setminus \phi) = \mu(B) = 0$ $\Rightarrow$ $E \in \mathcal{A}^*$.

هذا يعني أن μ^* قياس تام على $\mathcal{A}^*$.

$\therefore$ $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ فضاء مقاس تام.

<u>تمرين</u>:

نضع μ قياس العد على $\mathbb{N}$.

نضع $\mathcal{A}$ القبيلة المولدة من المجموعة $E = \{1, 2\}$.

1/ أوجد $\mathcal{A}$.

2/ هل $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس تام؟

3/ نضع δ_3 قياس Dirac عند النقطة 3.

هل $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \delta_3)$ فضاء مقاس تام؟

<u>نظرية</u>: ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

i/ ليكن $(E_n)_n$ متتالية متزايدة في $\mathcal{A}$ $(E_n \subset E_{n+1}, \forall n)$

فان

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)$$

ii/ ليكن $(E_n)_n$ متتالية متناقصة في $\mathcal{A}$ $(E_{n+1} \subset E_n, \forall n)$

نفرض أن $\mu(E_1)<+\infty$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}E_n\right).$$

ملاحظة: $\mu(E_1)<+\infty$ شرط ضروري في النظرية السابقة (نفذ).

مثال: نأخذ $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ حيث μ مقياس العد.

نأخذ

$$E_n=\{k\in\mathbb{N}\,;\,k>n\}.$$

برهان النظرية:

II قياس Lebesgue :

① قياس Lebesgue الخارجي

تعريف : نعرف طول الفترة المحدودة كالآتي:

$$L([a,b]) = L([a,b[) = L(]a,b]) = L(]a,b[) = b-a.$$

نعرف طول الفترة الغير محدودة بأنها $+\infty$.

ملاحظات :

1/ $L(\phi) = 0$

2/ لكل فترة I في $\mathbb{R}$ فان $L(I) = \overline{\mathbb{R}}_+$: $L(I) \geq 0$

3/ إذا كانت I و J فترات في $\mathbb{R}$ بحيث $J \subset I$ فان $L(I) \leq L(J)$

تعريف : لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

نعرف قياس Lebesgue الخارجي أو القياس الخارجي للمجموعة A ونرمز له ب $m^*(A)$ على النحو التالي:

$$m^*(A) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) \; ; \; A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \text{ فترة مفتوحة } I_n \right\}.$$

ملاحظات :

1/ بما أن $L(I_n) \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فان $m^*(A) \in [0, +\infty]$.

2/ ليكن $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ غطاء للمجموعة A حيث I_n فترة مفتوحة وهذا يعني أن $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$

فان : $m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n)$

خاصيات :

1/ $m^*(\phi) = 0$

2/ إذا كان $A \subseteq B$ فان $m^*(A) \leq m^*(B)$

3/ القياس الخارجي لأي مجموعة مكونة من عنصر واحد يساوي صفرا.

وهذا يعني أنه إذا كانت $A = \{x\}$ فان $m^*(A) = 0$.

البرهـــان :

لدينا $\phi \subseteq]a,a[\Leftarrow 0 \leq m^*(\phi) \leq L(]a,a[) = 0$

$\Longrightarrow m^*(\phi) = 0.$

ثانيا ليكن $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ غطاءا للمجموعة B بحيث I_n فترة مفتوحة. وهذا يعني أن $B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$.

بما أن $A \subset B$ فان $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ وهذا يعني أن

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n).$$

$$\Longrightarrow m^*(A) \leq \operatorname{Inf}\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) ;\ B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n ;\ I_n \text{ فترة مفتوحة} \right\}$$

$$\Longrightarrow m^*(A) \leq m^*(B).$$

ثالثا ليكن $A = \{x\}$; $x \in \mathbb{R}$. لدينا لكل $n \in \mathbb{N}$:

$$A \subset]x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}[.$$

$$\Longrightarrow m^*(A) \leq L\left(]x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}[\right) = \frac{2}{n}.$$

$$\Longrightarrow m^*(A) \leq \frac{2}{n} ;\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

نؤول n إلى $+\infty$ نتحصل على $m^*(A) = 0$.

نظرية 1 : القياس الخارجي لفترة هو طولها.

يعني إذا كانت A فترة فان $m^*(A) = L(A)$.

البرهـــان :

الحالة الاولى : $A = [a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة.

لدينا لكل $\varepsilon > 0$; $A \subset I =]a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}[$

$$\Longrightarrow m^*(A) \leq L(I) = \varepsilon + b - a.$$

نؤول ε إلى الصفر نتحصل على $m^*(A) \leq b - a$ (1).

لنبرهن على أن: $m^*(A) \geq b-a$.

ليكن $\mathcal{O}=\{I_n, n\in \mathbb{N}\}$ غطاءاً للمجموعة A حيث I_n فترة مفتوحة.

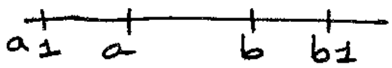
بما أن $A=[a,b]$ مجموعة متراصة فإنه يوجد غطاء منته وجزئي من $\mathcal{O}$ ليكن $\mathcal{O}^*$. يعني أن $\mathcal{O}^*$ منته و $A\subset \bigcup_{I_n\in\mathcal{O}^*} I_n$

من الواضح أن: $\sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) \geq \sum_{I_n\in\mathcal{O}^*} L(I_n)$.

الآن العنصر a ينتمي إلى A وبالتالي توجد فترة مفتوحة I_1 بحيث أن $a\in I_1=]a_1,b_1[\in\mathcal{O}^*$.

لدينا احتمالين:

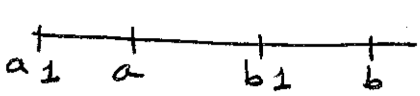
إذا كان $b_1>b$:



في هذه الحالة: $\sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n)\geq \sum_{I_n\in\mathcal{O}^*} L(I_n)\geq L(I_1)\geq b-a=L(A)$

$\Longrightarrow m^*(A)\geq b-a$ (2) $\Longrightarrow m^*(A)=b-a$: ((1)+(2))

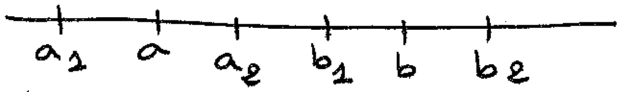
إذا كان $b_1<b$:



في هذه الحالة $b_1\in A$ وبالتالي يوجد I_2 فترة مفتوحة من $\mathcal{O}^*$ بحيث $b_1\in]a_2,b_2[=I_2$.

لدينا احتمالين:

إذا كان $b_2>b$:

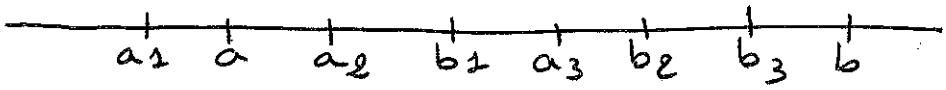


في هذه الحالة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n)\geq \sum_{I_n\in\mathcal{O}^*} L(I_n)\geq L(I_1)+L(I_2)\geq b-a=L(A)$$

$\Longrightarrow m^*(A)\geq b-a$ (3) : (1)+(3) $\Longrightarrow m^*(A)=b-a$.

إذا كان $b_2<b$ فنكرر نفس العمل السابق



فيكون لدينا:

$a\in I_1=]a_1,b_1[$; $b_1\in I_2=]a_2,b_2[$

$b_2\in I_3=]a_3,b_3[$; ... ; $b_{n-1}\in I_n=]a_n,b_n[$.

وبما أن θ^* هي مجموعة منتهية فإننا حتما سنصل إلى $b \in]a_m, b_m[$ وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) \geq \sum_{I_n \in \theta^*} L(I_n) \geq \sum_{n=1}^{m} L(I_n)$$

$$\geq (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_m - a_m)$$

$$\geq (b_m - a_1) + \underbrace{(b_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(b_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(b_{m-1} - a_m)}_{\geq 0}$$

$$\geq b_m - a_1$$

$$\geq b - a = L(A).$$

$$\Rightarrow m^*(A) \geq (b-a)$$

وهذه المعادلة مع المعادلة (1) تعطينا: $m^*(A) = b - a = L(A)$

<u>الحالة الثانية</u> : $A =]a, b]$ أو $A = [a, b[$ أو $A =]a, b[$

ليكن: $A_1 = [a, b]$; $A_2 = [a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}]$ لكل $\varepsilon > 0$.

لدينا:

$$A_2 \subset A \subset A_1$$

$$\Rightarrow m^*(A_2) \leq m^*(A) \leq m^*(A_1).$$

$$\Rightarrow L(A_2) \leq m^*(A) \leq L(A_1)$$

$$\Rightarrow b - a - \varepsilon \leq m^*(A) \leq b - a.$$

نؤول ε إلى الصفر نتحصل على $m^*(A) = b - a$.

<u>الحالة الثالثة</u> : A فترة غير محدودة وبالتالي $L(A) = +\infty$

ليكن $a \in A$ ليكن $K > 0$ لدينا إما $[a, a+K] \subset A$

أو $[a-K, a] \subset A$ وبالتالي $L[a, a+K] \leq m^*(A)$

أو

$$L[a-K, a] \leq m^*(A)$$

$$\Rightarrow K \leq m^*(A) \; ; \; \forall K > 0$$

نؤول K إلى $+\infty$ نتحصل على $m^*(A) = +\infty$ يعني $m^*(A) = L(A)$

نظرية 2 : خاصية مادون التجميع القابل للعد :

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ فإن :

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n).$$

البرهان : لدينا لكل مجموعة A_n , $n \in \mathbb{N}$

$$m^*(A_n) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} L(I_{n,i})\ ;\ A_n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_{n,i}\ ;\ I_{n,i} \text{ فترة مفتوحة} \right.$$

من خاصية التقريب لأكبر حد سفلي فإن لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ يوجد غطاء $(I_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ من الفترات المفتوحة للمجموعة A_n

بحيث :
$$m^*(A_n) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} L(I_{n,i}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

نلاحظ أن المجموعة $\{I_{n,i}\ ,\ n,i \in \mathbb{N}\}$ قابلة للعد و تحقق :

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_{n,i} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{i,n} I_{n,i}$$

و بالتالي المجموعة $\{I_{n,i}\ ,\ n,i \in \mathbb{N}\}$ تمثل غطاءاً للمجموعة $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ وهذا يعطي :

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_{n,i})$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon\ ;\quad \forall \varepsilon > 0$$

نؤول ε إلى الصفر نتحصل على :

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n).$$

نتيجة 1 : لتكن A مجموعة قابلة للعد فان $m^*(A) = 0$

البرهان : $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ يعني أن $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x_n\}$

$$\Rightarrow m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x_n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(\{x_n\}) = 0$$

$$\Rightarrow m^*(A) = 0.$$

ملاحظة : بما أن $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ مجموعات قابلة للعد فان :

$$m^*(\mathbb{N}) = m^*(\mathbb{Z}) = m^*(\mathbb{Q}) = 0.$$

ملاحظة : الفترة $[0,1]$ غير قابلة للعد.

بما أن $m^*([0,1]) = L([0,1]) = 1 \Rightarrow m^*([0,1]) \neq 0$

فهذا يعني أن $[0,1]$ غير قابلة للعد.

وهذا ينطبق على أي فترة $[a,b]$; $[a,b[$; $]a,b]$ أو $]a,b[$ حيث $a < b$.

نظرية 3 : لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مفتوحة G بحيث أن

$$A \subset G \quad \text{و} \quad m^*(G) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

البرهان : ليكن $\varepsilon > 0$ ، لدينا :

$$m^*(A) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) ;\ A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n ;\ \text{فترة مفتوحة } I_n \right\}$$

حسب خاصية التقريب لأكبر حد سفلي لمجموعة فان لهذا $\varepsilon > 0$ يوجد غطاء $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من الفترات المفتوحة للمجموعة A

يعني أن $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ بحيث:

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

ليكن $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ فان G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. $A \subset G$

ولدينا :

$$m^*(G) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(I_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

خلاصة : خواص القياس الخارجي :

لكل مجموعة A في $\mathbb{R}$ لدينا :

$$m^*(A) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} L(I_n) \; ; \; A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \; ; \; I_n \text{ فترة مفتوحة} \right\}$$

- $m^*(\phi) = 0$
- $A \subseteq B \implies m^*(A) \leq m^*(B)$
- A مجموعة منتهية أو قابلة للعد فإن $m^*(A) = 0$.
- القياس الخارجي لفترة هو طولها. $m^*(I) = L(I)$
  حيث I فترة في $\mathbb{R}$.
- $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n)$
- $A \subset \mathbb{R}$; لكل $\varepsilon > 0$ يوجد G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$
  بحيث $A \subset G$ و $m^*(G) \leq m^*(A) + \varepsilon$

تمرين 1 :

ليكن $E \subset \mathbb{R}$ بحيث $m^*(E) = 0$.

أثبت أن لكل $F \subset \mathbb{R}$: $m^*(E \cup F) = m^*(F)$

تمرين 2 :

ليكن $E \subset \mathbb{R}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ نعرف المجموعات :

$E + \lambda = \{x + \lambda \; ; \; x \in E\}$. ; $\lambda E = \{\lambda x \; ; \; x \in E\}$;

أثبت أن :

i/ $m^*(E + \lambda) = m^*(E)$

ii/ $m^*(-E) = m^*(E)$

iii/ $m^*(\lambda E) = |\lambda| \cdot m^*(E)$.

2) المجموعات القابلة للقياس في مفهوم Lebesgue :

تعريف : لتكن E مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.
نقول أن E قابلة للقياس في مفهوم Lebesgue إذا تحقق :
لكل مجموعة جزئية A في $\mathbb{R}$ لدينا :

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

ملاحظة : لدينا لكل $A \subset \mathbb{R}$:

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

$$\Rightarrow m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

وبالتالي لتكون E قابلة للقياس يكفي أن يتحقق لكل $A \subset \mathbb{R}$

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

مثال : ϕ و $\mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس.
لتكن $A \subset \mathbb{R}$ فإن : $m^*(A \cap \phi) + m^*(A \cap \phi^c) = m^*(A)$

$$m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(A \cap \mathbb{R}^c) = m^*(A).$$

خاصيات :

1/- لتكن $E \subset \mathbb{R}$ بحيث $m^*(E) = 0$ فإن E قابلة للقياس.

2/- إذا كانت E قابلة للقياس فإن E^c قابلة أيضا للقياس.

3/- اتحاد مجموعتين قابلتين للقياس يكون مجموعة قابلة للقياس : يعني إذا كانت E و F قابلة للقياس فإن $E \cup F$ تكون قابلة للقياس.

4/- تقاطع مجموعتين قابلتين للقياس يكون مجموعة قابلة للقياس : يعني إذا كانت E و F قابلة للقياس فإن $E \cap F$ تكون قابلة للقياس.

البرهان :

1/- لتكن $A \subset \mathbb{R}$. لدينا دائما : $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

من جهة أخرى لدينا : $A \cap E \subset E \Rightarrow m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$

$$\Rightarrow m^*(A \cap E) = 0.$$

ولدينا أيضا : $(A\cap E^c)\subset A \Rightarrow m^*(A\cap E^c)\le m^*(A)$.

وبالتالي : $m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)\le 0+m^*(A)=m^*(A)$

وهكذا نتحصل على : $m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$.

مما يثبت أن المجموعة E قابلة للقياس.

2/- لنثبت أن E^c قابلة للقياس. ليكن $A\subset\mathbb{R}$:

$$m^*(A\cap E^c)+m^*(A\cap (E^c)^c)=m^*(A\cap E^c)+m^*(A\cap E)$$
$$=m^*(A)$$

لأن E قابلة للقياس.

وبالتالي E^c قابلة للقياس.

3/- ليكن F، E مجموعات قابلة للقياس. لنثبت أن $E\cup F$ قابلة للقياس. ليكن $A\subset\mathbb{R}$.

ليكن $\lambda=m^*(A\cap(E\cup F))+m^*(A\cap(E\cup F)^c)$.

نريد إثبات أن $\lambda=m^*(A)$.

بما أن E قابلة للقياس فإن:

$$m^*(A\cap(E\cup F))=m^*(A\cap(E\cup F)\cap E)+m^*(A\cap(E\cup F)\cap E^c).$$
$$=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap F\cap E^c).$$

$$m^*(A\cap(E\cup F)^c)=m^*(A\cap E^c\cap F^c).$$

$$\Rightarrow \lambda=m^*(A\cap E)+\underbrace{m^*(A\cap E^c\cap F)+m^*(A\cap E^c\cap F^c)}_{\shortparallel}.$$

$$=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$$ لأن F قابلة للقياس :

$$=m^*(A)$$ لأن E قابلة للقياس :

وبالتالي $E\cup F$ قابلة للقياس.

4/ بما أن E و F قابلة للقياس فإن E^c و F^c قابلة للقياس وحسب 3/ فإن $E^c\cup F^c$ قابلة للقياس. حسب 2/ فإن $(E^c\cup F^c)^c$ قابلة للقياس يعني أن $E\cap F$ قابلة للقياس.

ملاحظات :

1/- المجموعات القابلة للعد تكون قابلة للقياس بما أن قياسها الخارجي يساوي صفرا.

حينئذ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ هي مجموعات قابلة للقياس.

وحسب الخاصية 2/ فان $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ و $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ هي أيضا مجموعات قابلة للقياس.

2/- باستخدام الخاصية 3/ ومبدأ الاستقراء الرياضي نثبت أن اتحاد عدد منته من المجموعات القابلة للقياس يكون مجموعة قابلة للقياس.

3/- باستخدام الخاصية 4/ و مبدأ الاستقراء الرياضي نثبت أن تقاطع عدد منته من المجموعات القابلة للقياس يكون مجموعة قابلة للقياس.

تعريف :

لتكن $\mathcal{M}$ عائلة كل المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ والتي تكون قابلة للقياس في مفهوم Lebesgue.

نظرية 4 : العائلة $\mathcal{M}$ تمثل جبر بولي على $\mathbb{R}$.

البرهان : المجموعة $\mathcal{M}$ غير خالية بما أن $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

حسب الخاصيات 2/ و 3/ فان $\mathcal{M}$ مغلقة تحت عمليتي الاتحاد والتتميم وبالتالي فهي تكون جبرا على $\mathbb{R}$.

خاصيات :

a- إذا كانت F_1 و F_2 مجموعات قابلة للقياس وغير متقاطعة فان :

$$m^*(F_1 \cup F_2) = m^*(F_1) + m^*(F_2)$$

b- لتكن $F_1, F_2, \dots, F_n$ مجموعات قابلة للقياس وغير متقاطعة فان :

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(F_k)$$

c/ لتكن $F_1,\dots,F_n \subseteq \mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس و غير متقاطعة فان لكل $A \subseteq \mathbb{R}$ لدينا:

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k).$$

d/ ليكن $E, F \subseteq \mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس بحيث $E \subset F$ و $m^*(E) < +\infty$ فان:

$$m^*(F \setminus E) = m^*(F) - m^*(E).$$

البرهان:

a/ بما أن F_1 قابلة للقياس فان:

$$\begin{aligned} m^*(F_1 \cup F_2) &= m^*((F_1 \cup F_2) \cap F_1) + m^*((F_1 \cup F_2) \cap F_1^c) \\ &= m^*(F_1) + m^*(F_2 \cap F_1^c) \\ &= m^*(F_1) + m^*(F_2) \end{aligned}$$

بما أن $F_1 \cap F_2 = \phi$ فان $F_2 \subset F_1^c$ يعني $F_2 \cap F_1^c = F_2$.

b/ نتيجة للخاصية a/ مع استخدام مبدأ الاستقراء الرياضي.

c/ باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي.

• اذا كان $n = 1$ فان:

$$m^*(A \cap F_1) = \sum_{k=1}^{1} m^*(A \cap F_k)$$

• فرضية الاستقراء: نفرض أن العلاقة صحيحة عند العدد n.
يعني لكل $F_1, \dots, F_n$ مجموعات قابلة للقياس ومنفصلة مثنى مثنى فان لكل $A \subseteq \mathbb{R}$ لدينا:

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k)$$

• لنثبت العلاقة عند العدد $(n+1)$.
ليكن $F_1, \dots, F_n, F_{n+1}$ مجموعات قابلة للقياس ومنفصلة مثنى مثنى وليكن $A \subseteq \mathbb{R}$. لنثبت أن:

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A \cap F_k) ?$$

ليكن $F = \bigsqcup_{k=1}^{n} F_k$ لدينا:

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} F_k\right) = m^*(A \cap (F \cup F_{n+1})).$$

وبما أن F_{n+1} مجموعة قابلة للقياس فان:

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} F_k\right) = m^*\left(A \cap (F \cup F_{n+1}) \cap F_{n+1}\right) + m^*\left(A \cap (F \cup F_{n+1}) \cap F_{n+1}^c\right)$$
$$= m^*(A \cap F_{n+1}) + m^*(A \cap F \cap F_{n+1}^c).$$

بما أن $F \cap F_{n+1} = \phi$ فان $F \subset F_{n+1}^c$ وبالتالي $F \cap F_{n+1}^c = F$

$$\Rightarrow m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} F_k\right) = m^*(A \cap F_{n+1}) + m^*(A \cap F).$$

وحسب فرضية الاستقراء فان :

$$m^*(A \cap F) = m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k)$$

وبالتالي :

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} F_k\right) = m^*(F_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A \cap F_k)$$

وبالتالي العلاقة صحيحة عند العدد $(n+1)$.

إذن لكل $n \in \mathbb{N}$ ، لكل $F_1, \ldots, F_n \subset \mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس ومنفصلة مثنى مثنى ولكل $A \subseteq \mathbb{R}$ لدينا :

$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k).$$

d/ بما أن $E \subset F$ فان : $F = E \cup (F \setminus E)$

والمجموعات E و $F \setminus E$ قابلة للقياس وغير متقاطعة

وبالتالي:

$$m^*(F) = m^*(E \cup (F \setminus E))$$
$$= m^*(E) + m^*(F \setminus E).$$

بما أن $m^*(E) < +\infty$ فان :

$$m^*(F \setminus E) = m^*(F) - m^*(E).$$

<u>ملاحظة</u> : الخاصية d غير صحيحة إذا كان $m^*(E) = +\infty$

<u>مثال</u> : $F = [1, +\infty[$; $E = [2, +\infty[$.

$$m^*(E) = m^*(F) = +\infty$$

$F \setminus E = [1, 2[$; $m^*(F \setminus E) = 1$.

$m^*(F) - m^*(E) = +\infty - \infty$: غير معرفة

نظرية 5 : $\mathcal{M}$ عائلة المجموعات القابلة للقياس تكون جبر سيجما على $\mathbb{R}$.

البرهان : أثبتنا في نظرية 4 أن $\mathcal{M}$ جبر بولي على $\mathbb{R}$. ينقصنا لذا لإثبات أن $\mathcal{M}$ مغلقة بالنسبة لعملية الاتحادات القابلة للعد.

لتكن $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مجموعات قابلة للقياس لنثبت أن $F=\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ تكون أيضا مجموعة قابلة للقياس.

سنبدأ أولا بفصل الاتحاد على النحو التالي :

ليكن $A_1 = F_1$; $A_2 = F_2 \setminus F_1$; $A_3 = F_3\setminus(F_1 \cup F_2)$, ... ,

$$A_n = F_n \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n-1} F_k\right)$$

نلاحظ هكذا أن $A_1 \cup A_2 = F_1 \cup F_2$ وأن $A_1 \cap A_2 = \phi$

وأن المجموعات $(A_n)_n$ منفصلة مثنى مثنى.

و $\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} F_n$.

ليكن $B_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ و $B = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k$

بما أن $(F_n)_n$ مجموعات قابلة للقياس فان $(A_n)_n$ قابلة للقياس. وحسب الخاصية ط/ فان المجموعة B_n قابلة للقياس.

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ لدينا :

$$m^*(A) = m^*(A\cap B_n) + m^*(A\cap B_n^c)$$

$$= m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) + m^*(A\cap B_n^c)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m^*(A\cap A_k) + m^*(A\cap B_n^c)$$

لدينا : $B_n \subset B \Leftarrow B^c \subset B_n^c \Longleftarrow A\cap B^c \subset A \cap B_n^c$

$$\Longrightarrow m^*(A\cap B^c) \leq m^*(A\cap B_n^c).$$

وبالتالي :
$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap A_k) + m^*(A \cap B^c)$$
وهذا لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي :
$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap A_k) + m^*(A \cap B^c).$$
حسب خاصية مادون التجميع القابل للعد :
$$\geq m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) + m^*(A \cap B^c)$$
$$\geq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$
وبالتالي فان $B = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ مجموعة قابلة للقياس.

حينئذ فان المجموعة $\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} F_k$ قابلة للقياس.

مما يعطي $\mathcal{M}$ جبر سيجما على $\mathbb{R}$.

نتيجة 1 : لتكن $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{M}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى فان لكل $A \subseteq \mathbb{R}$ لدينا :
$$m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_k)$$
البرهان : ليكن $F_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$ و $F = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k$.
$$F_n \subset F \Rightarrow F_n \cap A \subset F \cap A. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow m^*(F_n \cap A) \leq m^*(F \cap A).$$
$$\Rightarrow m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leq m^*(F \cap A)$$
الخاصية c
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) \leq m^*(F \cap A) \; ; \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_k) \leq m^*(F \cap A)$$
من جهة أخرى لدينا :
$$m^*(A \cap F) = m^*\left(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = m^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A \cap E_k\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_k)$$
حسب خاصية مادون التجميع القابل للعد

وبالتالي :
$$m^*(A \cap F) = \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_k)$$

نتيجة 2 : لتكن $E_1, \dots, E_n, \dots$ مجموعات قابلة للقياس ومنفصلة مثنى مثنى فان :

$$m^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k).$$

البرهان : يكفي أن نضع $A = \mathbb{R}$ في النتيجة 1.

نظرية 6: إذا كان a عددا حقيقيا فان الفترة $]a, +\infty[$ تكون قابلة للقياس.

نتيجة :

1 - لكل $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; الفترات $]-\infty, b]$; $[a, b]$; $]a, b[$; $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, +\infty[$; $]-\infty, b[$ تكون قابلة للقياس.

2 - كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تكون قابلة للقياس.

3 - كل مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ تكون قابلة للقياس.

4 - إذا كانت $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مجموعات مفتوحة فان $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$ تكون قابلة للقياس.

5 - إذا كانت $(F_n)_n$ مجموعات مغلقة فان $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ تكون قابلة للقياس.

البرهان :

1 - حسب النظرية فان الفترة $]a, +\infty[$ قابلة للقياس وبالتالي :

$\bullet)$ $]-\infty, b] = \left(]b, +\infty[\right)^c \in \mathcal{M}.$

$\bullet)$ $]a, b] =]a, +\infty[\cap]-\infty, b] \in \mathcal{M}.$

$\bullet)$ $]a, b] \setminus \{b\} \in \mathcal{M} \Rightarrow]a, b[\in \mathcal{M}.$

$\bullet)$ $]a, b] \cup \{a\} \in \mathcal{M} \Rightarrow [a, b] \in \mathcal{M}.$

$\bullet)$ $]a, b[\cup \{a\} \in \mathcal{M} \Rightarrow [a, b[\in \mathcal{M}.$

$\bullet)$ $]a, +\infty[\cup \{a\} \in \mathcal{M} \Rightarrow [a, +\infty[\in \mathcal{M}.$

$\bullet)$ $]-\infty, b] \setminus \{b\} \in \mathcal{M} \Rightarrow]-\infty, b[\in \mathcal{M}.$

2 - لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فان $G = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ حيث I_n فترة مفتوحة

حسب الخاصية 1- فان I_n قابلة للقياس.
بما ان $\mathcal{M}$ جبر سيجما على $\mathbb{R}$ فان $G \in \mathcal{M}$.
3- لتكن F مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ فان F^c مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وبالتالي حسب 2- فان F^c قابلة للقياس.
و بما ان $\mathcal{M}$ جبر سيجما فان F قابلة للقياس.
4- نتيجة للخاصية 2 وكون $\mathcal{M}$ جبر سيجما على $\mathbb{R}$ فهي مغلقة بالنسبة للتقاطعات القابلة للعد.
5- نتيجة للخاصية 3 وكون $\mathcal{M}$ مغلقة بالنسبة للاتحادات القابلة للعد.

نظرية 7: كل مجموعات بوريل تكون قابلة للقياس يعني ان $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

البرهان:
بما ان $\mathcal{M}$ جبر سيجما على $\mathbb{R}$ يحتوي على الفترات المفتوحة.
و بما ان $\mathcal{B}$ هو اصغر جبر سيجما على $\mathbb{R}$ يحتوي على الفترات المفتوحة
فان: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

تعريف: اذا كانت E مجموعة قابلة للقياس فاننا نعرف قياسها بانه: $m(E) = m^*(E)$.

خاصيات: تتوفر في قياس Lebesgue الخواص التالية:
$$m : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$
1/ لكل $E, F \in \mathcal{M}$ بحيث $E \subseteq F$ فان: $m(E) \leq m(F)$
2/ لكل $E, F \in \mathcal{M}$ بحيث $E \subset F$ و $m(E) < +\infty$ فان:
$$m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$$
3/ لكل $(E_n)_n \in \mathcal{M}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى فان:
$$m\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n)$$
4/ لكل $(E_n)_n \in \mathcal{M}$ فان،
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n)$$

(14) تابع - قياس Lebesgue -

1/ إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ بحيث $m^*(E)=0$ فان $E \in \mathcal{M}$ و $m(E)=0$.

2/ لتكن $F \in \mathcal{M}$ بحيث $m(F)=0$ فان لكل $E \subset F$ لدينا $E \in \mathcal{M}$ و $m(E)=0$.

<u>البرهان</u>:

كل الخاصيات وقع إثباتها من قبل إلا الأخيرة.

2/ لدينا: $E \subset F \Rightarrow m^*(E) \leq m^*(F) \Rightarrow$

$0 \leq m^*(E) \leq 0 \Rightarrow m^*(E) = 0$

$\Rightarrow E \in \mathcal{M}\,;\quad m(E) = m^*(E) = 0.$

<u>تعريف</u>:

1/ نقول عن المتتالية $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ بأنها متزايدة إذا كان: $E_n \subset E_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وفي هذه الحالة نقول أنها متقاربة ونهايتها:

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

2/ نقول أن المتتالية $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة إذا كان: $E_{n+1} \subset E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ونعرف نهايتها بأنها:

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$$

<u>نظرية 8</u>:

1/ إذا كانت $(E_n)_n$ متتالية متزايدة في $\mathcal{M}$ فان

$$\lim_{n\to+\infty} m(E_n) = m\left(\lim_{n\to+\infty} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

2/ إذا كانت $(E_n)_n$ متتالية متناقصة في $\mathcal{M}$ وكان هناك $N \in \mathbb{N}$ بحيث $m(E_N) < +\infty$ فان:

$$\lim_{n\to+\infty} m(E_n) = m\left(\lim_{n\to+\infty} E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

<u>البرهان</u>:

1/ لتكن $E = \lim_{n\to+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. نستخدم أسلوب فصل المجموعات.

ليكن $F_1 = E_1 \quad ; \quad F_2 = E_2 \setminus E_1 \quad ; \quad F_k = E_k \setminus E_{k-1}$

لدينا : $F_i \cap F_j = \phi \quad ; \forall i \neq j$.

$\forall i \in \mathbb{N} : F_i \in \mathcal{M}$;

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} F_k \quad ; \quad E_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} F_k \ ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$m(E) = m\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(F_k)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} m(F_k) = \lim_{n \to +\infty} m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} F_k\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} m(E_n).$$

2) $(E_n)_n$ متناقصة يعني $E_{n+1} \subset E_n$

وبالتالي : $E_n^c \subset E_{n+1}^c$. ليكن $G_n = E_N \setminus E_n$ يعني أن

$G_n = E_N \cap E_n^c$ وبالتالي فان $(G_n)_n$ متتالية متزايدة

و $G_n \in \mathcal{M}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. حسب 1) فان :

$$\lim_{n \to +\infty} m(G_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_N \setminus E_n\right).$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} m(E_N \setminus E_n) = m\left(E_N \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n^c\right)\right) = m\left(E_N \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right)^c\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} m(E_N) - m(E_n) = m(E_N) - m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

وذلك لأن $m(E_N) < +\infty$ و $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \subset E_N$.

وبالتالي :

$$\lim_{n \to +\infty} m(E_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

ملاحظة :

الشرط وجود $N \in \mathbb{N}$ بحيث $m(E_N) < +\infty$ ضروري ولا يمكن الاستغناء عنه في النظرية السابقة 2)

مثال : $E_n = [n, +\infty[$. $(E_n)_n$ متتالية متناقصة

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \phi$ وبالتالي $m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = 0$

بينما $m(E_n) = +\infty$ يعني أن $\lim_{n \to +\infty} m(E_n) = +\infty$

 تابع ـ قياس Lebesgue

نظرية 9: المبدأ الأول للتلوود Littlewood:

ليكن $E \in \mathcal{M}$ و $\varepsilon > 0$ فانه يوجد G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$E \subset G \;; \qquad m(G \setminus E) < \varepsilon .$$

البرهان:

1^{er}/ لذاكانت E مجموعة محدودة فانه يوجد G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$E \subset G \;; \qquad m^*(G) < m^*(E) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow m^*(G \setminus E) = m^*(G) - m^*(E) < \varepsilon .$$

بما أن: $G \setminus E \in \mathcal{M}$ فان $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

2^{e}/ لذاكانت E مجموعة غير محدودة:

نضع لكل $n \in \mathbb{Z}$; $E_n = E \cap]n, n+1)$.

$E_n \in \mathcal{M}$ و E_n محدودة.

حسب الفقرة (1^{er}) فانه يوجد G_n مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ بحيث $E_n \subset G_n$ و $m(E_n \setminus G_n) < \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{|n|}}$

نضع $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$

$$G \setminus E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n \setminus E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (G_n \setminus E_n)$$

$$\Longrightarrow m(G \setminus E) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(G_n \setminus E_n) < \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{|n|}} = \varepsilon$$

<u>نتيجة</u> : ليكن $E\in\mathcal{M}$.

ن/ لكل $\varepsilon>0$ يوجد F مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ بحيث
$F\subset E$ و $m(E\setminus F)<\varepsilon$

نن/ يوجد متتالية $(G_n)_n$ من مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحقق :

$$E\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n\ ;\quad m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n\setminus E\Big)=0$$

ننن/ يوجد متتالية $(F_n)_n$ من مجموعات مغلقة في $\mathbb{R}$ بحيث :

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\subset E\ ;\quad m\Big(E\setminus\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\Big)=0$$

<u>البرهان</u> :

ن/ حسب المبدأ الأول للتلوود فإنه يوجد G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ بحيث :
$E^c\subset G\ ;\ m(G\setminus E^c)<\varepsilon.$

نضع $F=G^c$ مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$. $F\subset E$.

$E\setminus F=E\cap F^c=E\cap G=G\setminus E^c\Rightarrow m(E\setminus F)<\varepsilon.$

نن/ حسب المبدأ الأول للتلوود و لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد G_n مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ بحيث $E\subset G_n$ و $m(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}$

و بالتالي: $E\subset G_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ يعني $E\subset\bigcap_n G_n$

$\bigcap_n G_n\setminus E\subset G_k\setminus E\quad\forall k\in\mathbb{N}.$

$\Rightarrow m\big(\bigcap_n G_n\setminus E\big)\leq m(G_k\setminus E)<\frac{1}{k}\quad\forall k\in\mathbb{N}$

نؤول k إلى $+\infty$ نتحصل على : $m\big(\bigcap_n G_n\setminus E\big)=0$.

ننن/ نطبق (نن) مع E^c و نضع $F_n=G_n^c$.

ملاحظة: أثبتنا في السابق أن كل مجموعة قابلة للعد قياسها الخارجي صفر وبالتالي فهي في $\mathcal{M}$ وقياسها صفر. في المثال التالي سنبين أن هناك مجموعات في $\mathcal{M}$ قياسها صفر ولكنها غير قابلة للعد.

مثال: مجموعة كانتور (Cantor set)

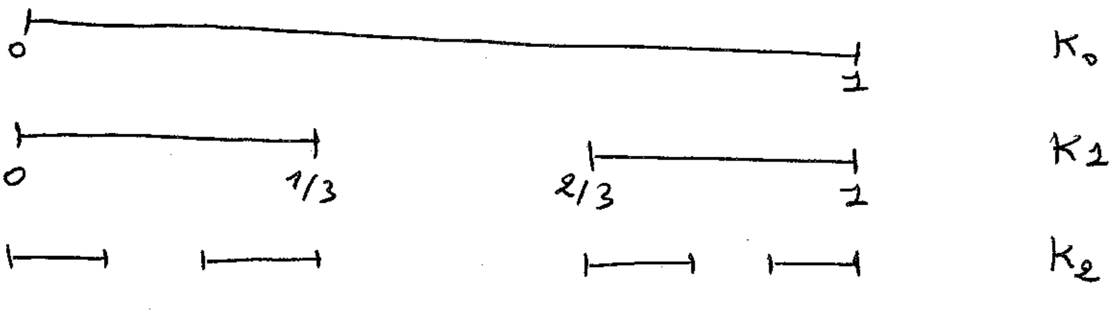
ليكن $K_0 = [0,1]$.

K_1 هي المجموعة الناتجة من حذف الثلث الأوسط من K_0

$$K_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

K_2 هي المجموعة الناتجة من حذف الثلث الأوسط من كل فترة في K_1 يعني أن $K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

وهكذا: K_n هي المجموعة الناتجة من حذف الثلث الأوسط من كل فترة في K_{n-1}.



مجموعة كانتور: $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$.

خاصيات مجموعة كانتور:

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$; K_n مغلقة وبالتالي K مجموعة مغلقة فهي إذن قابلة للقياس.

2/ K مجموعة مغلقة ومحدودة فهي إذن مجموعة متراصة.

3/ المتتالية $(K_n)_n$ متناقصة $K_n \supset K_{n+1}$.

4/ قياس المجموعة K يساوي صفر: $m(K) = 0$

لنثبت هذا؟ بما أن K_n هي المجموعة الناتجة من حذف الثلث الأوسط من كل فترة في K_{n-1} فإن $m(K_n) = \frac{2}{3} m(K_{n-1})$.

وبالتالي فان : $m(K_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n m(K_0)$. $K_0=[0,1]$

$$m(K_0)=1 \Rightarrow m(K_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} m(K_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0=m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}K_n\right)=m(K).$$

17/ مجموعة كانتور مجموعة غير قابلة للعد.

يمكن إثبات أن مجموعة كانتور تكافئ الفترة $[0,1]$.

مثال لمجموعة غير قابلة لقياس Lebesgue :

لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $[0,1]$ على النحو التالي:

$$x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$$

$\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $[0,1]$. تكون فصول التكافؤ:

$$[x]=\{y\in[0,1];\ y\,\mathcal{R}\,x\}=\{y\in[0,1];\ x-y\in\mathbb{Q}\}$$

$$=\{y\in[0,1];\ y-x=q\in\mathbb{Q}\}.$$

$$=\{x+q;\ q\in\mathbb{Q}\}=(x+\mathbb{Q})\cap[0,1].$$

نختار بطريقة عشوائية عنصرا واحدا فقط من كل فصل تكافؤي. ولتكن P هي مجموعة هذه العناصر.

سنبرهن أن المجموعة P غير قابلة للقياس.

نعلم أن $[-1,1]\cap\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد.

$$[-1,1]\cap\mathbb{Q}=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$$

نضع :

$$P_1=P+x_1=\{x+x_1;\ x\in P\}$$

$$P_2=P+x_2$$

$$\vdots$$

$$P_n=P+x_n=\{x+x_n;\ x\in P\}.$$

1/ المجموعات $(P_n)_n$ غير متقاطعة مثنى مثنى.

الاثبات :

ليكن $x\in P_n\cap P_k$; $n\neq k$

$$x\in P_n \Leftrightarrow x=y+x_n;\ y\in P$$

$$x\in P_k \Leftrightarrow x=z+x_k;\ z\in P$$

وبالتالي: $y + x_n = z + x_k \Rightarrow y - z = x_k - x_n \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow y \mathcal{R} z \Rightarrow [y] = [z]$$

وهذا مرفوض.

وبالتالي $P_n \cap P_k = \phi$ والمجموعات $(P_n)_n$ منفصلة مثنى مثنى.

ثا/ $[0,1] \subset \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} P_n \subset [-1,2]$

الاثبات:

ليكن $x \in [0,1]$ فانه يوجد $y \in P \subset [0,1]$ بحيث $x \in [y]$

وبالتالي $x - y \in \mathbb{Q}$ يعني أن يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x - y = x_n$

$$\Rightarrow x = y + x_n \in P_n \subset \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} P_k$$

وبالتالي: $[0,1] \subset \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} P_k$

ليكن $x \in \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} P_k$. هذا يعني أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$x \in P_n \Rightarrow$ يوجد $y \in P$ بحيث $x = y + x_n$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq x_n \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 \leq y + x_n \leq 2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{array}$$

وهذا يعني أن $\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} P_k \subset [-1,2]$

ثا/ المجموعة P غير قابلة للقياس.

الاثبات:

نفرض العكس أن المجموعة P قابلة للقياس وهذا يعني

المجموعة P_n أيضا قابلة للقياس لكل $n \in \mathbb{N}$

$$m(P_n) = m(P + x_n) = m(P).$$

بما أن لدينا: $[0,1] \subset \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} P_n \subset [-1,2]$

$$\Rightarrow m([0,1]) \leq m\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} P_n\right) \leq m([-1,2])$$

$$1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(P_n) \leq 3$$

$$1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m(P) \leq 3$$

إذا كان $m(\ell)=0$ فإن: $\sum_{n=1} m(\ell)=0$ و $1\leq 0\leq 3$
مرفوض.

إذا كان $m(\ell)>0$ فإن: $\sum_{n=1}^{+\infty} m(\ell)=+\infty$ و $1\leq +\infty \leq 3$
مرفوض

وبالتالي المجموعة ℓ غير قابلة للقياس.

تمرين 1:

لتكن $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ مجموعات قابلة للقياس.

أثبت أن:

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

تمرين 2:

لتكن G مجموعة مفتوحة وغير خالية في $\mathbb{R}$.

أثبت أن: $m(G)>0$.

تمرين 3: ليكن $E\subset \mathbb{R}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

1) أثبت أن لكل $A\subseteq \mathbb{R}$ لدينا:

i/ $A\cap(E+\lambda) = (A-\lambda)\cap E + \lambda$

ii/ $(E+\lambda)^c = E^c + \lambda$

iii/ $(\lambda E)^c = \lambda . E^c$; $\lambda \neq 0$

iv/ $A\cap(\lambda E) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda} A \cap E\right)$; $\lambda\neq 0$.

2) لتكن $E\subset\mathbb{R}$ مجموعة قابلة للقياس. $\lambda\in\mathbb{R}$

أثبت أن λE و $E+\lambda$ تكون قابلة للقياس

أثبت أن:

i/ $m(E+\lambda) = m(E)$

ii/ $m(\lambda E) = |\lambda| . m(E)$.

تمرين 4: كل فترة $[a,b]$ حيث $b-a>0$ تحتوي على مجموعة غير قابلة للقياس.

الباب الثاني :

الدوال القابلة للقياس :

تعريف : ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس .

نقول أن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة للقياس إذا وفقط :

لكل $\alpha \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ تكون مجموعة قابلة للقياس .

يعني أن : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in \mathcal{A}$

حيث : $f^{-1}(]\alpha, +\infty]) = \{x \in \Omega ; \ f(x) > \alpha\}$

ملاحظة : إذا كانت $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

فإن f تكون قابلة للقياس إذا كان :

لكل $\alpha \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{A}$

حيث : $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in \Omega ; \ f(x) > \alpha\}$.

مثال : لو أخذنا : $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{M})$ فضاء Lebesgue

و $\mathcal{M}$ عائلة المجموعات القابلة لقياس Lebesgue .

ليكن $\Omega \in \mathcal{M}$. $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ دالة .

تكون f دالة قابلة لقياس Lebesgue إذا وفقط :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}$.

وإذا كانت $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ فان f تكون قابلة لقياس

lebesgue إذا وفقط :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{M}$.

تابع الباب الثاني - تحليل 2 -

<u>نظرية 1</u>: لتكن $\Omega \in \mathcal{M}$. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة فان f دالة قابلة لقياس Lebesgue.

<u>البرهان</u>: ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$. بما أن $]\alpha, +\infty[$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ و f دالة متصلة فان $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ تكون مجموعة مفتوحة وبالتالي $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ مجموعة قابلة للقياس.

<u>مثال</u>:

$$f : [3, 25] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -4 \,; & 3 \leq x < 7 \\ 18 \,; & 7 \leq x < 11 \\ -9 \,; & 11 \leq x < 20 \\ 3 \,; & 20 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

نريد إثبات أن f دالة قابلة لقياس Lebesgue.

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$. هل أن: $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{M}$ ؟

إذا كان: $\alpha < -9$ فان:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \{x \in [3,25] \,;\ f(x) > \alpha\}$$
$$= [3, 25] \in \mathcal{M}.$$

إذا كان: $-9 \leq \alpha < -4$ فان:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = [3, 11[\,\cup\, [20, 25] \in \mathcal{M}.$$

إذا كان: $-4 \leq \alpha < 3$ فان:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = [7, 11[\,\cup\, [20, 25] \in \mathcal{M}$$

إذا كان $3 \leq \alpha < 18$ فان:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = [7, 11[\in \mathcal{M}.$$

إذا كان $\alpha \geq 18$ فإن:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \phi \in \mathcal{M}$$

وبالتالي لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ لدينا: $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{M}$

و f دالة قابلة لقياس Lebesgue .

<u>تعريف</u> : <u>الدالة الذاتية</u> :

لتكن $E \subseteq \mathbb{R}$. نعرف الدالة الذاتية للمجموعة E بأنها:

$$\chi_E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 ; & x \in E \\ 0 ; & x \notin E \end{cases}$$

<u>نظرية 9</u> : الدالة الذاتية χ_E قابلة للقياس $\Longleftrightarrow$ E مجموعة قابلة للقياس.

<u>البرهان</u> : " $\Longleftarrow$ " نفرض أن χ_E قابلة للقياس.

فإن :

$$\chi_E^{-1}(]0,+\infty[) = \{x \in \mathbb{R};\ \chi_E(x) > 0\}$$
$$= E \in \mathcal{M}.$$

" $\Longrightarrow$ " لنفرض أن E مجموعة قابلة للقياس.

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$. هل أن $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{M}$ ؟؟

إذا كان $\alpha < 0$ فإن:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) > \alpha\} = \mathbb{R} \in \mathcal{M}$$

إذا كان $0 \leq \alpha < 1$ فإن:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = E \in \mathcal{M}$$

إذا كان $\alpha \geq 1$ فإن:

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \phi \in \mathcal{M}.$$

تمرين 1 :

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

أثبت أن f دالة قابلة للقياس.

نظرية 3 : $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس.
$f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ دالة.
التعابير التالية متكافئة :

a/ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$، المجموعة : $f^{-1}\left(]\alpha, +\infty]\right) = \{x \in \Omega ;\ f(x) > \alpha\}$
تكون قابلة للقياس.

b/ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$; المجموعة : $f^{-1}\left([\alpha, +\infty]\right) = \{x \in \Omega ;\ f(x) \geq \alpha\}$
تكون قابلة للقياس.

c/ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$; المجموعة : $f^{-1}\left([-\infty, \alpha]\right) = \{x \in \Omega ;\ f(x) \leq \alpha\}$
تكون قابلة للقياس.

d/ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$، المجموعة : $f^{-1}\left([-\infty, \alpha[\right) = \{x \in \Omega ;\ f(x) < \alpha\}$
تكون قابلة للقياس.

البرهان : $\mathcal{A}$ عائلة المجموعات القابلة للقياس تمثل جبر سيجما على Ω وبالتالي فهي مغلقة بالنسبة للتقاطعات والاتحادات القابلة للعد وكذلك بالنسبة للتتميم.

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(a) \Leftrightarrow (c)$: $\{x \in \Omega ;\ f(x) > \alpha\} = \left(\{x \in \Omega ;\ f(x) \leq \alpha\}\right)^c$

$(b) \Leftrightarrow (d)$: $\{x \in \Omega ;\ f(x) \geq \alpha\} = \left(\{x \in \Omega ;\ f(x) < \alpha\}\right)^c$

(a) $\Longleftarrow$ (b) : لدينا :

$$\{x \in \Omega ;\ f(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega ;\ f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n}\}$$

حسب التعبير (a) فان لكل $n \in \mathbb{N}$, المجموعة
$\{x \in \Omega ;\ f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$ تكون قابلة للقياس .

(b) $\Longleftarrow$ (a) : لدينا :

$$\{x \in \Omega ;\ f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega ;\ f(x) \geqslant \alpha + \tfrac{1}{n}\}$$

حسب التعبير (b) فان لكل $n \in \mathbb{N}$ المجموعة
$\{x \in \Omega ;\ f(x) \geqslant \alpha + \frac{1}{n}\}$ تكون قابلة للقياس .

نتيجة : اذا كانت الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة للقياس
فان المجموعة $\{x \in \Omega ;\ f(x) = \alpha\}$ تكون قابلة للقياس
لكل $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

البرهان :

* اذا كان $\alpha \in \mathbb{R}$ فان :

$$\{x \in \Omega ;\ f(x) = \alpha\} = \{x \in \Omega ;\ f(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in \Omega ;\ f(x) \geqslant \alpha\}$$

** اذا كان $\alpha = +\infty$ فان :

$$\{x \in \Omega ;\ f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in \Omega ;\ f(x) > n\}$$

*** اذا كان $\alpha = -\infty$ فان :

$$\{x \in \Omega ;\ f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in \Omega ;\ f(x) < -n\}.$$

تابع- الدوال القابلة للقياس - تحليل ٤

خاصيات الدوال القابلة للقياس Lebesgue :

لتكن $\Omega \in \mathcal{M}$; $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس.

١/ لكل $a,b \in \mathbb{R}$; $a < b$. فان :

$f^{-1}(]a,b[)$ ، $f^{-1}([a,b[)$ ، $f^{-1}([a,b])$ ، $f^{-1}(]a,b])$ مجموعات قابلة للقياس.

٢/ لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فان $f^{-1}(G)$ تكون مجموعة قابلة للقياس.

٣/ لتكن F مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ فان $f^{-1}(F)$ تكون مجموعة قابلة للقياس.

٤/ لتكن G مجموعة بوريل فان $f^{-1}(G)$ تكون مجموعة قابلة للقياس.

البرهان :

١/
$$]a,b[=]a,+\infty[\cap]-\infty,b[$$
$$\Rightarrow f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]a,+\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty,b[) \in \mathcal{M}$$

وهكذا بقية الفترات.

٢/ G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. $G = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} I_n$

حيث I_n فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$. $I_n =]a_n, b_n[$

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigsqcup_n I_n\right) = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(I_n)$$

حسب (١) فان $f^{-1}(I_n) \in \mathcal{M}$ وبالتالي $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$.

نظرية 4: ليكن $E \subseteq \Omega$ مجموعة قابلة للقياس.
ليكن $f,g: E \to \mathbb{R}$ دوال قابلة للقياس. ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$.
فان الدوال: $f \pm \lambda$; λf ; $|f|$; f^2 ; $f+g$
$f \cdot g$; $\frac{1}{f}$ كلها دوال قابلة للقياس.

البرهان: ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) $\{x \in E;\ f(x)+\lambda > \alpha\} = \{x \in E;\ f(x) > \alpha - \lambda\} \in \mathcal{A}$
وبالتالي الدالة $f+\lambda$ قابلة للقياس.

ii) • $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0 \Rightarrow \lambda f$ قابلة للقياس

• $\lambda > 0$: $\{x \in E;\ \lambda f(x) > \alpha\} = \{x \in E;\ f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \mathcal{A}$
وبالتالي الدالة λf قابلة للقياس

• $\lambda < 0$: $\{x \in E;\ \lambda f(x) > \alpha\} = \{x \in E;\ f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \mathcal{A}$
وبالتالي الدالة λf قابلة للقياس.

iii) • $\alpha > 0$; $\{x \in E;\ |f(x)| < \alpha\} = \{x \in E;\ -\alpha < f(x) < \alpha\}$
$= \{x \in E;\ f(x) > -\alpha\} \cap \{x \in E;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

• $\alpha \leq 0$; $\{x \in E;\ |f(x)| < \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$
وبالتالي الدالة $|f|$ قابلة للقياس.

iv) • $\alpha > 0$; $\{x \in E;\ f^2(x) > \alpha\} = \{x \in E;\ f(x) > \sqrt{\alpha}$ أو $f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$
$= \{x \in E;\ f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in E;\ f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{A}$

• $\alpha \leq 0$; $\{x \in E;\ f^2(x) > \alpha\} = E \in \mathcal{A}$
وبالتالي الدالة f^2 قابلة للقياس.

v) $\{x \in E;\ f(x)+g(x) < \alpha\} = \{x \in E;\ f(x) < \alpha - g(x)\}$
ومن كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ فانه يوجد $r \in \mathbb{Q}$ بحيث:

$$f(x) < r < \alpha - g(x)$$

وبالتالي : $\{x \in E;\ f(x)+g(x) < \alpha\} = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E;\ f(x) < r < \alpha - g(x)\}$

$$= \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E;\ f(x) < r\} \cap \{x \in E;\ g(x) < \alpha - r\}$$

$$\in \mathcal{A}$$

وبالتالي الدالة $f+g$ قابلة للقياس.

vi) $f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$

وبالتالي الدالة fg قابلة للقياس.

v) $\frac{1}{f}$: ?

نضع $\frac{1}{f(x)} = \infty$ إذا كانت $f(x) = 0$.

بما أن المجموعة $\{x \in E;\ f(x) = 0\}$ قابلة للقياس فيكفي أن نثبت أن المجموعة $\{x \in E;\ \frac{1}{f(x)} < \alpha\}$ قابلة للقياس.

هذه المجموعة هي اتحاد المجموعات A و B حيث

$$A = \{x \in E;\ f(x) > 0\} \cap \{x \in E;\ \alpha f(x) > 1\}.$$

$$B = \{x \in E;\ f(x) < 0\} \cap \{x \in E;\ \alpha f(x) < 1\}.$$

وهي مجموعات قابلة للقياس بما أن f دالة قابلة للقياس.

إذا كان $\alpha = 0$ فان $A = \phi$ و $B = \{x \in E;\ f(x) < 0\}$.

وبالتالي الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للقياس.

نتيجة 1 : نعرف الدوال :

$$\max(f,g): E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x); & f(x) \geq g(x) \\ g(x); & g(x) \geq f(x) \end{cases}.$$

$$\min(f,g) : x \longmapsto \begin{cases} f(x); & f(x) \leq g(x) \\ g(x); & g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

$$f^+ : x \longmapsto \begin{cases} f(x); & f(x) \geq 0 \\ 0; & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^{-} : x \longmapsto \begin{cases} -f(x) \;; & f(x) \leq 0 \\ 0 \;; & f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f^{-} = -\min(f,0). \qquad f^{+} = \max(f,0).$$

$$|f| = f^{+} + f^{-} \;; \qquad f = f^{+} - f^{-}$$

لذا كانت f و g دوال قابلة للقياس فان الدوال $\max(f,g)$ ؛ $\min(f,g)$ ؛ f^{+} ؛ f^{-} تكون أيضا قابلة للقياس.

البرهان: لدينا:

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$$

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right).$$

و بالتالي حسب النظرية السابقة فان $|f-g|$ دالة قابلة للقياس لأن $(f+g \pm |f-g|)$ تكون قابلة للقياس وبالتالي $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ تكون قابلة للقياس.

بما أن $f^{+} = \max(f,0)$ فهي قابلة للقياس

$f^{-} = -\min(f,0)$ فهي قابلة للقياس.

نتيجة ٢:

لذا كانت f و g دوال قابلة للقياس فان المجموعات

$$\{x \in E;\ f(x) \leq g(x)\} \;;\; \{x \in E;\ f(x) < g(x)\} \;;\; \{x \in E;\ f(x) = g(x)\}$$

تكون كلها قابلة للقياس.

تعريف: لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال $n \in \mathbb{N},\ f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

نعرف الدوال:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : x \longmapsto \sup\{f_n(x) \;;\; n \in \mathbb{N}\}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n : x \longmapsto \inf\{f_n(x) \;;\; n \in \mathbb{N}\}.$$

$\limsup f_n : x \longmapsto \limsup f_n(x) = \operatorname{Inf}_n g_n(x)$

حيث

$g_n(x) = \sup\{f_k(x) ; k \geq n\}$

$\liminf f_n : x \longmapsto \liminf f_n(x) = \sup_n h_n(x)$

حيث

$h_n(x) = \operatorname{Inf}\{f_k(x) ; k \geq n\}.$

من خاصيات النهايات فان $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ تكون موجودة

اذا فقط : $f(x) = \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)$

نظرية 4 : لتكن $f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس فان الدوال $\sup f_n$; $\operatorname{Inf} f_n$; $\limsup f_n$

$\liminf f_n$ جميعها قابلة للقياس على E

كما ان $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ تكون قابلة للقياس على مجال تعريفها.

البرهان : ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

•) $\{x \in E ; \sup_n f_n(x) > \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \{x \in E ; f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

•) $\{x \in E ; \operatorname{Inf}_n f_n(x) < \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \{x \in E ; f_n(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

وبالتالي الدوال $\sup_n f_n$ و $\operatorname{Inf}_n f_n$ قابلة للقياس.

•) $\limsup f_n = \operatorname{Inf}_n g_n$; $g_n = \sup\limits_{k \geq n} f_k \Longrightarrow$ g_n قابلة للقياس

وبالتالي $\inf_n g_n$ قابلة للقياس لان $\limsup f_n$ قابلة للقياس

•) $\liminf f_n = \sup_n h_n$; $h_n = \operatorname{Inf}\limits_{k \geq n} f_k \Longrightarrow$ h_n قابلة للقياس

وبالتالي $\sup_n h_n$ قابلة للقياس.

•) مجال تعريف الدالة $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ هي المجموعة

$\{x \in E ; \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)\}$

وهي مجموعة قابلة للقياس. وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ قابلة للقياس.

تعريف : نقول أن الخاصية P تتحقق تقريبا إذا كانت مجموعة النقاط التي لا تتحقق عندها هذه الخاصية يكون قياسها معدوما.

أمثلة : في فضاء lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$:

1/ نقول أن الدالتين $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ متساويتان تقريبا إذا كان :

$$m\left(\{x \in E;\ f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

ونكتب : $f = g\ (a.e)$

حيث تستخدم $(a.e)$ لاختصار عبارة almost everywhere أي أن المساواة $f = g$ تكاد تكون عند كل نقطة من E.

2/ كما أن $f \geqslant g\ (a.e)$ يعني أن

$$m\left(\{x \in E;\ f(x) < g(x)\}\right) = 0.$$

3/ نقول أن متتالية من الدوال $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ متقاربة من f $(a.e)$ إذا كان : $m\left(\{x \in E; \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \neq f(x)\}\right) = 0$

ونكتب

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f\ (a.e)$$

أو

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f\ (a.e)$$

مثال :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n} \quad ; \quad f : [0,1] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \begin{cases} 0 ; & x \in [0,1[\\ 1/2 ; & x = 1 \end{cases}$$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \begin{cases} 0 ; & x \in [0,1[\\ 1 ; & x = 1 \end{cases}$$

لدينا لكل $x \in [0,1[$; $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ وبالتالي $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$f_n(1) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ لكل $x \in [0,1]$.

نقول أن المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب نقطة بنقطة من الدالة f.

ونكتب

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \quad \text{on } [0,1]$$

نلاحظ كذلك أن: لكل $x \in [0,1[$; $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = g(x)$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(1) \neq g(1)$$

وبالتالي

$$\{x \in [0,1] ; \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \neq g(x)\} = \{1\}$$

وهي مجموعة قياسها معدوم لأنها منتهية.

وبالتالي

$$f_n \longrightarrow g \quad a.e \quad on \ [0,1]$$

<u>ملاحظة</u> : لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال معرفة على E.

1/ <u>التقارب</u> <u>نقطة</u> <u>بنقطة</u> :

نقول أن $(f_n)_n$ تتقارب نقطة بنقطة من الدالة f إذا كان

$$\forall x \in E \ ; \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

ونكتب $\lim f_n = f$ أو

$$f_n \longrightarrow f$$

2/ <u>التقارب</u> <u>المنتظم</u> :

نقول أن $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام من الدالة f إذا كان:

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ونكتب

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

3/ <u>التقارب</u> <u>(a.e)</u> :

$$f_n \longrightarrow f \ (a.e) \text{ on } E$$

$$\Longleftrightarrow \ m(\{x \in E \ ; \ \lim f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$$

4/ لدينا دائما:

التقارب المنتظم $\Longrightarrow$ التقارب نقطة بنقطة.

نظرية 5: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس تام. $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; $E \in \mathcal{A}$

نفرض أن: f قابلة للقياس

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ قابلة للقياس} \\ f = g \ (a\text{-}e) \text{ on } E \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ فان } g \text{ تكون دالة قابلة للقياس.}$$

البرهان:

ليكن $A = \{x \in E ;\ f(x) \neq g(x)\}$ لدينا $\mu(A) = 0$.

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\{x \in E ;\ g(x) > \alpha\} = \left(\{x \in E ;\ g(x) > \alpha\} \cap A\right) \cup \left(\{x \in E ;\ g(x) > \alpha\} \cap A^c\right)$$

لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} \{x \in E ;\ g(x) > \alpha\} \cap A \subset A \\ \mu(A) = 0 \\ (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ مقاس تام} \end{array}\right\} \Longrightarrow \{x \in E ;\ g(x) > \alpha\} \cap A \in \mathcal{A}$$

$$\{x \in E ;\ g(x) > \alpha\} \cap A^c = \{x \in E ;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

وبالتالي المجموعة $\{x \in E ;\ g(x) > \alpha\}$ قابلة للقياس.

والدالة g قابلة للقياس.

مثال 1: في الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 ; & x \in \mathbb{Q} \\ 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \\ \sin x ; & x \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty[\\ x^2 + 1 ; & x \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, 0[\end{cases}$$

لدينا f دالة قابلة للقياس لأن $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ و $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للقياس.

لدينا $f = g$ a-e on $\mathbb{R}$ لأن: $\{x \in \mathbb{R} ;\ f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{Q}$

و $m(\mathbb{Q}) = 0$

وبالتالي فان الدالة g قابلة للقياس.

مثال 2:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2+1-\cos x$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \tan x ; & x \in \mathbb{Q} \\ x^2+1-\cos x ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فهي قابلة للقياس.

$f = g$ $a.e$ لأن $m(\mathbb{Q}) = 0$; $\{x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{Q}$

وبالتالي g دالة قابلة للقياس.

نظرية 6: لتكن $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ و $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس. بحيث $f_n \longrightarrow f$ $a.e$

فان f دالة قابلة للقياس.

البرهان: نضع $A = \{x \in E ; \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$; $\mu(A) = 0$

وبالتالي فان $A , A^c \in \mathcal{A}$.

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\{x \in E ; f(x) > \alpha\} = \{x \in A ; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in A^c ; f(x) > \alpha\}.$$

لدينا:

$$\left.\begin{array}{r} \{x \in A ; f(x) > \alpha\} \subset A \\ \mu(A) = 0 \\ \text{مقاس تام } (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array}\right\} \Rightarrow \{x \in A ; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

لدينا: لكل $x \in A^c$; $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ وبما أن $(f_n)_n$ قابلة للقياس لكل $n \in \mathbb{N}$ فان f قابلة للقياس على A^c

وبالتالي المجموعة $\{x \in A^c ; f(x) > \alpha\}$ قابلة للقياس.

إذن: المجموعة $\{x \in E ; f(x) > \alpha\}$ قابلة للقياس.

والدالة f قابلة للقياس.

تعريف : ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس .

1/ لتكن E مجموعة جزئية من Ω. عرفنا الدالة الذاتية أو المميزة للمجموعة E بأنها :

$$\chi_E = \mathbb{1}_E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \quad x \longmapsto \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 \; ; x \in E \\ 0 \; ; x \notin E \end{cases}$$

ولدينا: E قابلة للقياس $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{1}_E$ دالة قابلة للقياس .

2/ لتكن $E_1, \dots, E_n$ مجموعات قابلة للقياس ومنفصلة مثنى مثنى .

لتكن φ تركيبة خطية من الدوال الذاتية $\mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n}$

يعني $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}$

حيث $a_i \in \mathbb{R}$ لكل $1 \leq i \leq n$.

الدالة φ تسمى دالة بسيطة.

يعني الدالة البسيطة هي دالة قابلة للقياس ومداها مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية .

3/ التركيبات الجبرية للدوال البسيطة :

إذا كان φ و ψ دوال بسيطة فإن: $\lambda\varphi$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; $\varphi + \psi$; $\varphi . \psi$; $\max(\varphi, \psi)$; $\min(\varphi, \psi)$ كلها دوال بسيطة أيضا .

4/ الدالة الدرجية :

تسمى الدالة البسيطة $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}$ دالة درجية إذا كانت E_i فترة حقيقية لكل $1 \leq i \leq n$.

نظرية : لتكن $f : E \longrightarrow [0, +\infty[$ دالة قابلة للقياس .
فإنه يوجد متتالية من الدوال البسيطة $(\varphi_n)_n$ بحيث

1/ $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$ لكل $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$

2/ $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ لكل $x \in E$.

ملاحظة: لتكن $f: \Omega \to \mathbb{C}$ دالة.
نقول أن f قابلة للقياس إذا كان $Re(f)$ و $Im(f)$ دوال قابلة للقياس. حيث:
$Re(f) =$ القيمة الحقيقية للدالة f.
$Im(f) =$ القيمة التخيلية للدالة f.

$$f = Re(f) + i\, Im(f) \; ; \; Re f, Im(f): \Omega \to \mathbb{R}.$$

و في هذه الحالة تكون أيضا $|f|$ دالة قابلة للقياس.

تمرين 1:

ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس.
$E, F \in \mathcal{A}$ مجموعات منفصلة. حيث $\Omega = E \cup F$.
أثبت أن f قابلة للقياس $\Longleftrightarrow$ $f_{|E}$ و $f_{|F}$ دوال قابلة للقياس.

تمرين 2: في فضاء Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$:
ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}$; $\Omega \in \mathcal{M}$. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس. نضع:

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} f(x) \; ; & x \in \Omega \\ 0 \; ; & x \notin \Omega. \end{cases}$$

أثبت أن g دالة قابلة لقياس lebesgue.

تمرين 3: في الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.
لتكن $(f_n)_n$ متتالية من الدوال القابلة للقياس على $\mathbb{R}$.
نضع،

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \overline{\lim}\, f_n(x) \; ; & x \geq 0 \\ \underline{\lim}\, |f_n(x)| \; ; & x < 0 \end{cases}$$

أثبت أن f دالة قابلة لقياس Lebesgue.

تمرين 4 : في الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

لتكن E مجموعة غير قابلة لقياس Lebesgue.

نضع :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} e^{x} \; ; & x \in E \\ -e^{x} \; ; & x \notin E \end{cases}$$

i/ أثبت أن f دالة غير قابلة للقياس.

ii/ أثبت أن $|f|$ دالة قابلة للقياس.

iii/ أثبت أن لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ ؛ المجموعة $\{x \in \mathbb{R} ; f(x) = \alpha\}$ قابلة للقياس

iv/ ماذا يمكن أن نستنتج ؟

تمرين 5 :

i/ في الفضاء $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ما هي الدوال القابلة للقياس.

ii/ نضع $\mathcal{A} = \{\Omega, \phi\}$. ما هي الدوال القابلة للقياس في الفضاء $(\Omega, \mathcal{A})$.

تمرين 6 : في الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$:

لتكن $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس.

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة

أثبت أن $h \circ f$ دالة قابلة للقياس.

تمرين 7 : في الفضاء $(\Omega, \mathcal{A})$ القابل للقياس . $E, F \subset \Omega$.

أثبت أن :

i) $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$. ii) $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$

iii) $\chi_{E^c} = 1 - \chi_E$. iv) $\chi_{E \Delta F} = |\chi_E - \chi_F|$

تمرين 8 : ليكن μ قياس العد على $\mathbb{N}$ و δ_1 قياس Dirac عند النقطة 1. نضع $E = \{2, 3, 4\}$

1/ أوجد القبيلة المولدة من المجموعة E.

2/ أثبت أن $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس تام.

3/ هل الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \delta_1)$ مقاس تام ؟

4/ لتكن

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto f(n) = \begin{cases} -2 \,; & 1 \leq x \leq 10 \\ 3 \,; & 11 \leq n \leq 20 \\ 0 \,; & x > 20 \end{cases}$$

هل الدالة f قابلة للقياس في الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ وفي الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ؟

- تحليل حقيقي 2 - الباب الثالث

التكـــامل

I تعريف وخاصيات التكامل

في كل ما يلي $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس.

نرمز إلى مجموعة الدوال القابلة للقياس على Ω بالرمز $\mathcal{L}^0(\Omega)$ ولمجموعتها الجزئية المكونة من الدوال البسيطة بالرمز $S(\Omega)$. كذلك نكتب $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ و $S_+(\Omega)$ ونعني بذلك مجموعتي الدوال في $\mathcal{L}^0(\Omega)$ و $S(\Omega)$ على الترتيب التي لا تأخذ قيما سالبة.

$\mathcal{L}^0(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; f دالة قابلة للقياس $\}$

$S(\Omega) = \{ f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$; f دالة بسيطة $\}$

$\mathcal{L}^0_+(\Omega) = \{ f \in \mathcal{L}^0(\Omega) ; \ \forall x \in \Omega ; \ f(x) \geq 0 \}$

$S_+(\Omega) = \{ f \in S(\Omega) ; \ \forall x \in \Omega ; \ f(x) \geq 0 \}$.

سنعرف التكامل على ثلاثة مراحل:

المرحلة الأولى: $f \in S_+(\Omega)$.

في هذه الحالة يمكن كتابة f على صورة

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{E_i}$$

حيث $E_i \in \mathcal{A}$; $(1 \leq i \leq n)$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى و $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ و $\forall i, 1 \leq i \leq n ; \ c_i \in \mathbb{R}_+$

يعرف تكامل الدالة f على Ω بأنه:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \mu(E_k).$$

حيث $0 . \infty = 0$ على الدوام.

مثال 1 : لتكن $E \in \mathcal{A}$; $\int_{\Omega} \chi_E \, d\mu = \mu(E)$.

مثال 2 : في فضاء Lebesgue : $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$:

لتكن

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 3 ; & x \in \mathbb{Q} \\ 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm = 3 \cdot m(\mathbb{Q}) = 0$$

مثال 3 : في فضاء Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$:

لتكن :

$$f : [-2, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 6 ; & -2 \leq x < 3 \\ 2 ; & x = 3 \\ 1 ; & 3 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$\int_{[-2,10]} f \, dm = 6 \cdot m([-2,3[) + 2 \cdot m(\{3\}) + 1 \cdot m(]3,10]) = 37.$$

ملاحظة : في فضاء Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

تكامل الدالة f يسمى تكامل Lebesgue.

مثال 4 :

نأخذ $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ ، μ قياس Dirac عند العنصر x_0

لدينا $f \in S_+(\Omega)$; $f = \sum_{k=1}^{n} C_k \chi_{E_k}$

فإن

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} C_k \mu(E_k) = \begin{cases} 0 ; & x_0 \notin E_k ; \forall k \\ C_j ; & x_0 \in E_j \end{cases}$$

$$= f(x_0)$$

-2- تابع - التكامل - تحليل دقيق 2 -

مثال 5: في الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث μ قياس العد.

لتكن

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 ; & x \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \\ \sqrt{2} ; & x \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 2 ; & x = 10 \\ 0 ; & x \notin \{1, \dots, 10\} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = 3.5 + \sqrt{2}.4 + 2.1$$
$$= 17 + 4\sqrt{2}.$$

خاصيات:

لتكن $f, g \in S_+(\Omega)$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ فان $\alpha f + \beta g \in S_+(\Omega)$

ولدينا:

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu$$

لكل $f \in S_+(\Omega)$ ،

$$\int_\Omega f \, d\mu \geq 0$$

لكل $f, g \in S_+(\Omega)$ ، اذا كانت $f \leq g$ فان: $\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$

المرحلة الثانية: $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

تعريف: لتكن $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ دالة قابلة للقياس.

نعرف تكامل الدالة f على Ω على النحو التالي:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu ; \ \varphi \in S_+(\Omega) ; \ \varphi \leq f \right\}.$$

ملاحظات: 1/ نقول أن f قابلة للتكامل على Ω اذا كان: $\int_\Omega f \, d\mu < +\infty$

2/ لكل $\varphi \in S_+(\Omega)$ بحيث $\varphi \leq f$ فان: $\int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu$

3/ لكل $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فان $\int_\Omega f \, d\mu \geq 0$.

نظرية 1 : لتكن $f \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$ فإننا نعلم أنه يوجد $(\varphi_n)_n$ متتالية متزايدة في $S_+(\Omega)$ بحيث $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = f$

فإن :

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \varphi_n \, d\mu .$$

خاصيات :

1) لتكن $f, g \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$ بحيث $f \leq g$ فإن: $\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$

2) ليكن $f, g \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ فإن

$\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$ ويكون لدينا:

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu$$

الاثبات :

بما أن $f, g \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$ فإنه يوجد $(\varphi_n)_n , (\psi_n)_n \subset S_+(\Omega)$

بحيث $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ ، $\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x)$ لكل $x \in \Omega$

$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ و $\lim_{n \to +\infty} \psi_n(x) = g(x)$ لكل $x \in \Omega$

$$\int_\Omega (\alpha \varphi_n + \beta \psi_n) \, d\mu = \alpha \int_\Omega \varphi_n \, d\mu + \beta \int_\Omega \psi_n \, d\mu$$

نؤول n إلى $+\infty$ نتحصل على :

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu$$

مثال : في فضاء Lebesgue : $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

لتكن $(a_n)_n$ متتالية في $\mathbb{R}_+$;

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = a_{[x]}$$

حيث $[x]$ هو صحيح العدد x.

نريد حساب تكامل Lebesgue للدالة f على $[1,+\infty[$

الحل : يمكن كتابة الدالة f على شكل :

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi_{[n,n+1[}$$

لتكن $(\varphi_n)_n$ المتتالية المعرفة : $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{[k,k+1[}$

$(\varphi_n)_n$ متتالية متزايدة في $\mathcal{E}^+(\Omega)$ و $f = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n$

حسب النظرية 1 فان:

$$\int_\Omega f \, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varphi_n \, dm.$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \, m([k,k+1[) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

المرحلة الثالثة : $f \in \mathcal{L}^\circ(\Omega)$:

لتكن $f:\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ دالة قابلة للقياس.

نأخذ $f^+ = \max(f,0)$; $f^- = \max(-f,0)$

لدينا : $f^+, f^- \in \mathcal{L}^\circ_+(\Omega)$ وبالتالي فان كل من

$\int_\Omega f^+ \, d\mu$ و $\int_\Omega f^- \, d\mu$ معرف.

لذا كان أحد هذه التكاملات منتهي فاننا نعرف تكامل الدالة f بأنه:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu$$

تعريف: نقول أن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قابلة للتكامل على Ω ونكتب $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ إذا كانت قابلة للقياس على Ω و إذا كان كل من $\int_\Omega f^+ d\mu < +\infty$ و $\int_\Omega f^- d\mu < +\infty$

و يكون تكامل الدالة f هو:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu .$$

ملاحظات:

1/ إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

الاثبات: بما أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $\int_\Omega f^- < +\infty$; $\int_\Omega f^+ < +\infty$

بما أن $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فإن

$$\int_\Omega |f| \, d\mu = \int_\Omega (f^+ + f^-) \, d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu < +\infty$$

و بالتالي $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

2/ إذا كانت $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ بحيث $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

الاثبات: لدينا: $f^+ \leq |f| \Longrightarrow \int_\Omega f^+ \leq \int_\Omega |f| < +\infty$

كذلك $f^- \leq |f|$

و بالتالي

$$\int_\Omega f^- \leq \int_\Omega |f| < +\infty$$

و هذا يعني أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

3/ إذا كانت $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فهذا لا يعني أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و لا حتى أن $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$.

وبالتالي : $\mathcal{L}^1(\Omega) = \{ f \in \mathcal{L}^0(\Omega) ; \int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty \}$

14/ لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فان : $\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$

<u>الاثبات</u> :

$$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| = \left| \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu \right|$$

$$\leq \int_\Omega f^+ \, d\mu + \int_\Omega f^- \, d\mu = \int_\Omega (f^+ + f^-) \, d\mu = \int_\Omega |f| \, d\mu$$

15/ لتكن $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ و $h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $|f| \leq h$

فان $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

<u>الاثبات</u> :

$$|f| \leq h \Rightarrow \int_\Omega |f| \, d\mu \leq \int_\Omega h \, d\mu < +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty \\ f \in \mathcal{L}^0(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\Omega).$$

<u>تعريف</u> : لتكن $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ دالة ;

$E \subset \Omega$ مجموعة قابلة للقياس .

نقول أن الدالة f قابلة للتكامل على E إذا كانت الدالة $f \cdot \chi_E$ قابلة للتكامل على Ω وفي هذه الحالة :

$$\int_E f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_E \, d\mu .$$

<u>ملاحظة</u> : إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فان $f \in \mathcal{L}^1(E)$ لكل $E \subset \Omega$ قابلة للقياس .

الاثبات : $|f \chi_E| \leq |f| \Rightarrow \int_\Omega |f \chi_E| \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$

نظرية 2 : ليكن $f \in \mathcal{L}^{\circ}(\Omega)$ ليكن $E \in \mathcal{A}$ بحيث $\mu(E)=0$

فان $f \in \mathcal{L}^{1}(E)$ و $\int_E f \, d\mu = 0$.

البرهان :

الحالة الأولى : لِذا كانت $f \in S_+(\Omega)$; $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$

حيث $c_k \in \mathbb{R}_+$; $1 \leq k \leq n$; $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ منفصلة مثنى مثنى

بحيث $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$.

$$f \cdot \chi_E = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k} \cdot \chi_E$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k \cap E} .$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f \cdot \chi_E \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \, m(E_k \cap E) .$$

بما أن $(E_k \cap E) \subset E$

و $\mu(E)=0$ فان $\mu(E_k \cap E) = 0$

وبالتالي $\int_\Omega f \chi_E \, d\mu = 0$

يعني أن $f \in \mathcal{L}^{1}(E)$ و $\int_E f \, d\mu = 0$.

الحالة الثانية : لِذا كانت $f \in \mathcal{L}^{\circ}_+(\Omega)$.

لتكن (φ_n) متتالية متزايدة في $S_+(\Omega)$ بحيث

$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = f$. $\int_E f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_E \varphi_n \, d\mu$

وحسب الحالة الاولى فان $\int_E \varphi_n \, d\mu = 0$; لكل $n \in \mathbb{N}$

وبالتالي $\int_E f \, d\mu = 0$.

الحالة الثالثة : $f \in \mathcal{L}^{\circ}(\Omega)$ في هذه الحالة

$f^+, f^- \in \mathcal{L}^{\circ}_+(\Omega)$ وبالتالي $\int_E f^+ = 0 = \int_E f^-$

يعني أن $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = 0$

تمرين: ليكن $f \in S(\Omega)$; $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$

حيث $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$ و $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ منفصلة مثنى مثنى

اثبت أن: $\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$

خاصيات التكامل:

1) التكامل عملية خطية. لكل $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$; $\alpha \in \mathbb{R}$
فان $f+g$, $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا:

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu \quad ; \quad \int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$$

2) ليكن $E, F \in \mathcal{A}$ بحيث $E \cap F = \phi$
ليكن $f \in \mathcal{L}^1(E) \cap \mathcal{L}^1(F)$ فان $f \in \mathcal{L}^1(E \cup F)$
ويكون:

$$\int_{E \cup F} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_F f \, d\mu.$$

3) لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $f \geq 0$ (a.e on Ω) فان $\int_\Omega f \, d\mu \geq 0$

4) لتكن $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $f \leq g$ (a.e on Ω) فان $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$

5) اذا كانت $f \geq 0$ (a.e on Ω) و $\int_\Omega f \, d\mu = 0$ فان $f = 0$ (a.e on Ω).

6) لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $\int_E f \, d\mu = 0$ لكل $E \in \mathcal{A}$
فان $f = 0$ (a.e on Ω)

7) نفرض أن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس تام.
لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$; $g = f$ (a.e on Ω) فان $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ويكون

$$\int_\Omega g \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

البرهـــان :

1/ لدينا، إذا كان $\alpha > 0$ فإن : $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$; $(\alpha f)^- = \alpha f^-$

إذا كان $\alpha < 0$: $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$; $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$

لدينا :

$$(f+g)^+ \leq |f+g| \leq |f|+|g| \Rightarrow \int_\Omega (f+g)^+ d\mu < +\infty$$

$$(f+g)^- \leq |f|+|g| \Rightarrow \int_\Omega (f+g)^- < +\infty .$$

وبالتالي $f+g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

لدينا :

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

كل هذه الدوال في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

$$\int_\Omega (f+g)^+ + \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^- = \int_\Omega (f+g)^- + \int_\Omega f^+ + \int_\Omega g^+$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g)^+ - \int_\Omega (f+g)^- = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$$

2/ $E \cap F = \phi \Rightarrow \chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$

$$(f \cdot \chi_{E\cup F})^+ = f^+ \cdot \chi_{E \cup F} = f^+ \chi_E + f^+ \chi_F$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f \cdot \chi_{E\cup F})^+ d\mu = \int_\Omega f^+ \chi_E + \int_\Omega f^+ \chi_F = \int_E f^+ + \int_F f^+ < +\infty$$

وبالمثل بالنسبة للدالة $(f \cdot \chi_{E\cup F})^-$ فإن :

-6- تابع- التكامل - - تحليل 2 -

$$\int_\Omega (f\cdot \chi_{E\cup F})^- \, d\mu = \int_E f^- + \int_F f^- < +\infty .$$

وبالتالي : $f\cdot\chi_{E\cup F} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ هذا يعني أن

$f \in \mathcal{L}^1(E\cup F)$.

$$\int_{E\cup F} f \, d\mu = \int_\Omega f\cdot \chi_{E\cup F} \, d\mu = \int_\Omega (f\cdot\chi_{E\cup F})^+ - \int_\Omega (f\cdot\chi_{E\cup F})^-$$

$$= \int_E f^+ + \int_F f^+ - \int_E f^- - \int_F f^- = \int_E f + \int_F f \, d\mu .$$

13/ لدينا : $f \geqslant 0$ a.e on Ω هذا يعني أن

$A = \{x\in\Omega \; ; \; f(x) < 0\}$; $\mu(A) = 0$. $\Longrightarrow \int_A f = 0$.

$\Omega = A \cup A^c$; $\int_\Omega f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{A^c} f \, d\mu = \int_{A^c} f \, d\mu \geqslant 0$

14/ يكفي أن نطبق الخاصية 13 مع $h = g - f \geqslant 0$ a.e .

15/ لدينا : $f \geqslant 0$ a.e و $\int_\Omega f \, d\mu = 0$. هل أن $f = 0$ a.e .

نضع :

$A = \{x\in\Omega \; ; \; f(x) \neq 0\} = B \cup D$

$B = \{x\in\Omega \; ; \; f(x) > 0\}$; $D = \{x\in\Omega \; ; \; f(x) < 0\}$.

$f \geqslant 0$ a.e $\Longrightarrow \mu(D) = 0$.

$B = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$; $E_n = \{x\in\Omega \; ; \; f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}$.

$$0 = \int_\Omega f \, d\mu \geqslant \int_{E_n} f \, d\mu \geqslant \frac{1}{n}\cdot\mu(E_n)$$

$\Longrightarrow \mu(E_n) = 0$; $\forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow \mu(B) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$

$\Longrightarrow f = 0$ a.e on Ω.

16 نضع : $A=\{x\in\Omega;\ f(x)\neq 0\}=B\cup D.$

$B=\{x\in\Omega;\ f(x)>0\}=\bigsqcup_n E_n\ ;\ E_n=\{x\in\Omega;\ f(x)\geq 1/n\}$

$D=\{x\in\Omega;\ f(x)<0\}=\bigsqcup_n F_n\ ;\ F_n=\{x\in\Omega;\ f(x)\leq -1/n\}.$

بما أن f دالة قابلة للقياس فإن $E_n, F_n\in\mathcal{A}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\int_{E_n} f\,d\mu=0\geq \frac{1}{m}\cdot\mu(E_n)\Rightarrow \mu(E_n)=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(B)=0.$$

$$\int_{F_n} f\,d\mu=0\leq -\frac{1}{n}\mu(F_n)\Rightarrow \mu(F_n)=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D)=0$$

وبالتالي $\mu(A)=0$ لذن $f=0$ a.e on Ω.

17 $f\in\mathcal{L}^1(\Omega)\Leftarrow$ $f\in\mathcal{L}^0(\Omega)$; $g=f$ a.e on Ω ;

والفضاء مقاس تام وبالتالي $g\in\mathcal{L}^0(\Omega)$.

نضع $A=\{x\in\Omega;\ g(x)\neq f(x)\};\ \mu(A)=0.$

$$\Rightarrow g\in\mathcal{L}^1(A);\quad \int_A g\,d\mu=0.$$

$\forall x\in A^c;\ g(x)=f(x),\quad g\in\mathcal{L}^1(A^c)$

وبالتالي $g\in\mathcal{L}^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega g\,d\mu=\int_A g\,d\mu+\int_{A^c} g\,d\mu=\int_{A^c} g\,d\mu=\int_{A^c} f\,d\mu=\int_\Omega f\,d\mu$$

تابع 6 التكامل

العلاقة بين تكامل Riemann وتكامل lebesgue

تمهيدية:

لتكن f دالة محدودة معرفة على Ω بحيث $\Omega \in \mathcal{M}$ و $m(\Omega) < +\infty$.

الدالة f تكون قابلة للقياس $\Longleftrightarrow$ تحقق الشرط:

$$\sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, dm \; ; \; \varphi \in S(\Omega) \; ; \; \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_\Omega \psi \, dm \; ; \; \psi \in S(\Omega) \; ; \; f \leq \psi \right\}$$

نتيجة:

لتكن f دالة محدودة وقابلة للقياس على Ω حيث $m(\Omega) < +\infty$. فان $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا:

$$\int_\Omega f \, dm = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, dm \; ; \; \varphi \in S(\Omega) \; ; \; \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_\Omega \psi \, dm \; ; \; \psi \in S(\Omega) \; ; \; f \leq \psi \right\}.$$

نظرية:

لذا كانت f دالة قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $\Omega = [a,b]$ فانها تكون قابلة للتكامل في مفهوم lebesgue على Ω ويكون لدينا:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\Omega f \, dm.$$

البرهان :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \,;\ \varphi \leq f \,;\ \text{دالة درجية } \varphi\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \,;\ \varphi \leq f \,;\ \varphi \in S(\Omega)\right\}$$

$$= \operatorname{Inf}\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \,;\ f \leq \psi \,;\ \psi \in S(\Omega)\right\}$$

$$\leq \operatorname{Inf}\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \,;\ f \leq \psi \,;\ \text{دالة سلمية } \psi\right\}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

و بالتالي f قابلة للتكامل في مفهوم lebesgue
و لدينا :

$$\int_{[a,b]} f \, dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

الخلاصة :

كل دالة قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $[a,b]$ تكون قابلة للتكامل في مفهوم lebesgue على $[a,b]$ و تتساوى قيمة التكاملات.

تمرين : لتكن

$$f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -2x \,; & 0 \leq x < 3 \\ x^2 \,; & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

1) أوجد f^+ ، f^- ، $\int_\Omega f^+$ ؛ $\int_\Omega f^-$ ؛

واستنتج $\int_\Omega f$ حيث $\Omega = [0,4]$.

- تحليل ٢ - - 8 - تابع التكامل -

ملاحظات :

1/ لدينا $\mathcal{R}(a,b) \subset \mathcal{L}^1([a,b])$

وتبين الدالة :

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 ; & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

أن $\mathcal{L}^1([a;b]) \not\subset \mathcal{R}(a,b)$ بما أن f غير قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على $[a,b]$ بينما f قابلة للتكامل في مفهوم Lebesgue على $[a,b]$.

2/ تمكننا النظرية السابقة من حساب تكامل Lebesgue للدالة f بالوسائل المستعملة لحساب تكامل ريمان في حال كانت $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

3/ في ضوء النظرية السابقة جرت العادة أن نكتب $\int_a^b f(x)dx$ عوضا عن $\int_{[a,b]} f \, dm$ وذلك دون الخشية من اللبس

نلاحظ كذلك أن كتابة $\int_a^b f(x)\,dx$ قد تعني أيا من التكاملات التالية : $\int_{[a,b]} f \, dm$ أو $\int_{[a,b[} f \, dm$ أو $\int_{]a,b[} f \, dm$ أو $\int_{]a,b]} f \, dm$.

وذلك لأن : $m(\{a\}) = m(\{b\}) = 0$

ونستخدم الرمز $\mathcal{L}^1(a,b)$ للدلالة على $\mathcal{L}^1([a,b])$ أو $\mathcal{L}^1(]a,b[)$ أو $\mathcal{L}^1(]a,b])$ أو $\mathcal{L}^1([a,b[)$.

مثال : حساب $\int_\Omega f \, dm$; $f(x) = \sin x$; $\Omega = [0,\pi[$.

مثال : f^-, f^+ devoir n°2

II التكامل والتقارب النقطي :

في كل مايلي $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاس .

نظرية 1 : تمهيد Fatou :

لتكن $(f_n)_n$ متتالية في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فان $\underline{\lim} f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

ويكون لدينا :

$$\int_\Omega \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

مثال 1 : في الفضاء $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ قياس العد .

نأخذ $f_n = \chi_{\{n\}}$. لدينا : $f_n \in \mathcal{L}^0_+(\mathbb{N})$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 ; & x = n \\ 0 ; & x \neq n . \end{cases}$$

ليكن $x \in \mathbb{N}$. فانه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x < N$.

وبالتالي

$$\forall n \geq N ; \quad x < N \leq n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N ; \quad f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 .$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} \underline{\lim} f_n \, d\mu = 0 .$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \mu(\{n\}) = 1 \quad ; \forall n \in \mathbb{N} .$$

$$\Rightarrow \underline{\lim} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = 1 .$$

ونلاحظ أن :

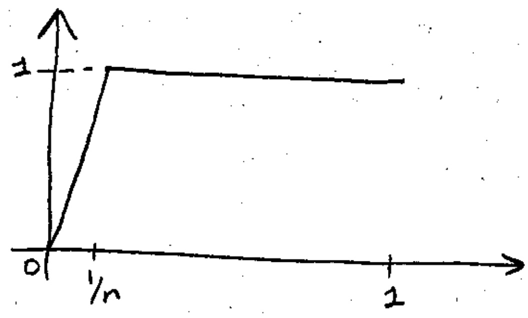
$$\int_{\mathbb{N}} \underline{\lim} f_n \, d\mu < \underline{\lim} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu$$

مثال 2 : في فضاء Lebesgue : $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

نأخذ $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} ; \; f_n(x) = \begin{cases} nx ; & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 ; & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

- تحليل 2 -

-9- تابع- التكامل -



لدينا: $f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

$\Omega = [0,1]$.

$f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

لكل $x>0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x < N$ وبالتالي:

$\forall n \geq N;\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$

$\Rightarrow \forall n \geq N;\ f_n(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$

$$\Rightarrow \int_\Omega \underline{\lim}\, f_n \, dm = \int_\Omega 1 \, dm = m(\Omega) = 1.$$

$$\int_\Omega f_n \, dm = \int_{[0,\frac{1}{n}]} f_n \, dm + \int_{]1/n,1]} f_n = \int_0^{1/n} nx \, dx + \int_{1/n}^1 1 \, dx$$

$$= n.\frac{1}{2n^2} + 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, dm = 1. = \int_\Omega \underline{\lim}\, f_n \, dm.$$

هنا لدينا مساواة في تمهيد Fatou.

نظرية 2:

نظرية التقارب المطرد: Montone Convergence Theorem

لتكن $(f_n)_n$ متتالية متزايدة في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$

$(\forall x \in \Omega;\ \forall n \in \mathbb{N};\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x))$

لتكن $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$

فإن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ ولدينا

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

البرهان: لدينا: $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \le f_n \le \dots \le f$.

$f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)\ ;\ \forall n \implies f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

حسب تمهيد Fatou لدينا:

$$\int_\Omega \underline{\lim}\, f_n\, d\mu \le \underline{\lim} \int_\Omega f_n\, d\mu .$$

$$\implies \int_\Omega f\, d\mu \le \underline{\lim} \int_\Omega f_n\, d\mu \le \overline{\lim} \int_\Omega f_n\, d\mu \le \int_\Omega f\, d\mu$$

$$\implies \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu .$$

ملاحظة:

النظرية السابقة غير صحيحة إذا كانت $(f_n)_n$ متتالية متناقصة.

مثال: في فضاء Lebesgue : $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$

$\Omega = [1, +\infty[\ ;\ f_n = \chi_{E_n}\ ;\ E_n = [n, +\infty[$.

$(f_n)_n$ متتالية متناقصة في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f = 0$.

$$\int_\Omega f_n\, dm = m(E_n) = +\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \neq \int_\Omega f\, dm = 0 .$$

أمثلة تطبيقية: في فضاء Lebesgue

مثال 1:

$f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)\ ;\ f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

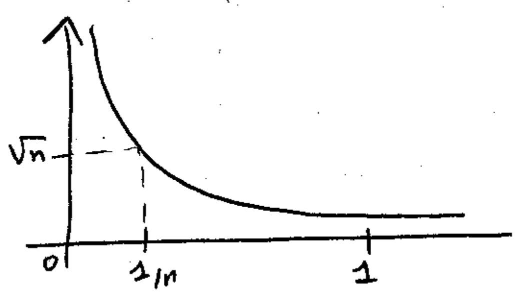
$\Omega =]0,1]$.

f متصلة على $]0,1]$ غير محدودة في جوار الصفر.

نأخذ المتتالية المعرفة كالتالي:

$f_n :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{n}\right) & ; \quad 0 < x < 1/n \\ f(x) & ; \quad \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



10 - تابع - التكامل :

المتتالية $(f_n)_n$ متزايدة. $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$

حسب نظرية التقارب المطرد فان :

$$\int_\Omega f\, dm = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n\, dm$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{1/n} \sqrt{n}\, dx + \int_{1/n}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n} + 2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2.$$

و $f \in \mathcal{L}^1]0,1]$.

مثال ٢ : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x$. $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$

لدراسة تكامل lebesgue للدالة f ندرس تكامل f^+ و f^-

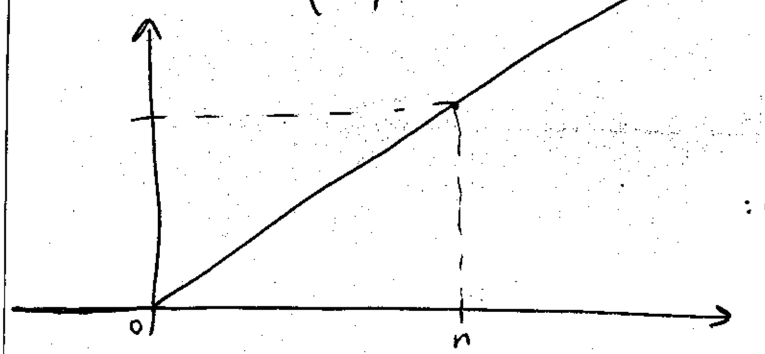
$f^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f^+(x) = \begin{cases} x ; & x \geq 0 \\ 0 ; & x < 0 \end{cases}$ $\quad f^+ \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

$f^- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f^-(x) = \begin{cases} 0 ; & x \geq 0 \\ -x ; & x < 0 \end{cases}$ $\quad f^- \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

دراسة تكامل f^+ :

لتكن $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$f_n(x) = \begin{cases} 0 ; & x \leq 0 \\ x ; & 0 \leq x \leq n \\ 0 ; & x > n \end{cases}$



$(f_n)_n$ متتالية متزايدة في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f^+$.

حسب نظرية التقارب المطرد فان :

$$\int_{\mathbb{R}} f^+ \, dm = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \int_{]-\infty,0]} 0 + \int_0^n x \, dx + \int_{]n,+\infty[} 0$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2} = +\infty$$

وبالتالي $f^+ \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ <u>لأن</u> $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

<u>نتيجة 1</u> : لتكن $(f_n)_n$ متتالية في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

لتكن

$$\forall x \in \Omega \, ; \; f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

فان $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ و يكون لدينا :

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu \, .$$

<u>البرهـــان</u> :

نضع

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \, .$$

$(g_n)_n$ متتالية متزايدة في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ ، $\lim_{n \to +\infty} g_n = f$

نطبق نظرية التقارب المطرد :

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} g_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\Omega} f_k \, d\mu$$

<u>مثـال</u> : في فضاء Lebesgue : $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

ما هي قيم الأعداد الحقيقية α بحيث تكون الدالة f_α قابلة لتكامل Lebesgue علـى $\mathbb{R}$. حيث

$$f_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot \chi_{[n,2n]}$$

الحل : نضع : $f_n = n^{\alpha} . \chi_{[n,2n]}$.

لدينا : $f_n \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\mathbb{R})$; $\forall n \in \mathbb{N}$. $f_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

حسب النتيجة 1 فان : $f_\alpha \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$ و لدينا:

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha \, dm = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} . m([n,2n])$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{-\alpha-1}}.$$

$$f_\alpha \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} f_\alpha \, dm < +\infty \iff -\alpha-1 > 1 \iff \alpha < -2$$

تمرين : في الفضا $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ حيث μ قياس العد. حدد $\mathcal{L}^{1}(\mathbb{N})$

نتيجة 2 :

لتكن $f : [a,+\infty[\to [0,+\infty[$ دالة لا تأخذ قيما سالبة. $(a \in \mathbb{R})$

إذا كان للدالة f تكاملا ريمانيا معتلا على $[a,+\infty[$

فان f تكون قابلة للتكامل Lebesgue على $[a,+\infty[$ ويكون:

$$\int_{[a,+\infty[} f \, dm = \int_a^{+\infty} f(x) \, dx .$$

البرهان :

لدينا : $f \in \mathcal{L}^{1}(a,b)$ لكل $b \geq a$.

لتكن $f_n = f . \chi_{[a,n]}$ فان $f_n \in \mathcal{L}^{0}_{+}(\Omega)$.

$(f_n)_n$ متتالية متزايدة. و $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$

من نظرية التقارب المطرد فان :

$$\int_{[a,+\infty[} f \, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,+\infty[} f_n \, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{n} f(x) \, dx = \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$$

مثال : $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = e^{-x}$

الدالة f متصلة وموجبة على $[0,+\infty[$

f تملك تكاملا ريمانيا معتلا على $[0,+\infty[$ وبالتالي

$$\int_{[0,+\infty[} f \, dm = \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = -e^{-x}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

نتيجة 3 :

لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. فان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث
لكل $E \in \mathcal{A}$; $\mu(E) < \delta$ فان $\left|\int_E f \, d\mu\right| < \varepsilon$

هذا يعني أن :

$$\lim_{\mu(E) \to 0} \int_E f \, d\mu = 0$$

البرهان :

الحالة الأولى : إذا كانت f دالة محدودة على Ω
فانه يوجد $M > 0$ بحيث $\forall x \in \Omega ;\ |f(x)| \leq M$

$$\left|\int_E f \, d\mu\right| \leq \int_E |f| \, d\mu \leq M\mu(E) < \varepsilon$$

يكفي أن نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

الحالة الثانية : نفرض أن f دالة غير محدودة على Ω.
لكل $n \in \mathbb{N}$ نعرف الدالة f_n على Ω :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) ; & |f(x)| \leq n \\ n ; & |f(x)| > n \end{cases}$$

نلاحظ أن :

لكل $x \in \Omega$; $|f_n(x)| \leq n$; $|f_n(x)| \leq |f(x)|$