مقترح لبعض أسئلة حول الباب الاول و الثاني

تحليل مركب

السؤال الاول:

اكتب العدد المركب $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ على الصورة الجبرية و الصورة القطبية ثم استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

السؤال الثاني:

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{C}$ و لتكن $f: \Omega \to \mathbb{C}$ دالة تحليلية. أثبت أن لكل $z \in \Omega$

$$\begin{vmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$$

حيث $u = Re(f)$ و $v = Im(f)$

السؤال الثالث: لنجعل الدالة $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ المعرفة كالاتي:

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \;\; f(z) = x^2 + y^2 - y + ix$$

باستعمال معادلات كوشي-ريمان حدد النقاط z حيث تكون الدالة f قابلة للاشتقاق و أوجد مشتقة الدالة f عند هذه النقاط.

السؤال الرابع: لنجعل الدالة $\mathrm{u}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة كالاتي:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 - y^2 + 2y.$$

أوجد مرافقا توافقيا للدالة u على $\mathbb{R}^2$

السؤال الخامس:

ليكن Ω نطاقا من $\mathbb{C}$ و لتكن $f: \Omega \to \mathbb{C}$ دالة تحليلية و لنجعل $\bar{\mathrm{f}}: \Omega \to \mathbb{C}$ الدالة المعرفة بما يلي

$$\overline{f}\,(z) = \overline{f(z)}$$

أثبت أنه اذا كانت الدالة $\bar{f}$ تحليلية فان الدالة f تكون ثابتة.

السؤال السادس:

لنجعل Log التعيين الاساسي لدالة اللوغاريتم و لنجعل متسلسلة القوى

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

1) أوجد نصف قطر متسلسلة القوى $g(z)$

2) أثبت أن

$$\forall z \in B(1,1), \quad g'(z) = \frac{1}{z}$$

3) استنتج أن

$$\forall z \in B(1,1), \quad g(z) = Logz$$

4) استنتج أنه لكل $0 < r < 1$ و لكل $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} r^n cosn\theta}{n} = \frac{1}{2} \ln(1 + 2rcos\theta + r^2)$$