السؤال الثالث من المحاضرة يجب مراجعتها
الحلول نُسخت من أجوبة بعض المتميزات

جامعة الملك فيصل          كلية العلوم

قسم الرياضيات          12 صفر ١٤٣٤

**هندسة التحويلات          الاختبار الفصلي الثاني          في ساعة و نصف**

لكل مستقيم $L$ من $\mathbb{R}^2$ ليكن $T_L$ الإنعكاس حول المحور $L$

**التمرين الأول**

١) ما هو تعريف الإنعكاس الإنزلاقي و ما هو تعريف التعاكس و ما هو تعريف التحاك

٢) ليكن $\Psi$ التحاك ذي مركز $(1,3)$ و عامل $2$ ما هي صيغة $\Psi$ و ما هي صورة $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ بالتحاك $\Psi$ .

٣) ليكن $T$ تقايس مباشر أثبت أنه يوجد $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ يحقق $a^2+b^2=1$ بحيث صيغة $T$ هي $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (ax+by+c, -bx+ay+d)$

٤) ليكن $H$ تقايس غير مباشر و $l$ هو محور السينات أثبت أنّ $T_l \circ H$ هو تقايس مباشر و استنتج أن $T$ يكون تقايس غير مباشرعلى $\mathbb{R}^2$ إذا و فقط إذا وجد $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ يحقق $a^2+b^2=1$ بحيث

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (ax+by+c, bx-ay+d)$$

**التمرين الثاني** في $\mathbb{R}^2$ ليكن $L$ المستقيم الذي يمر من $(0,1)$ و $(1,0)$ و $L'$ المستقيم الذي يمر من $(0,2)$ و $(2,0)$ و $D$ المستقيم المتعامد مع $L$ و الذي يمر من $(0,0)$

١) أوجد معادلة $L$ و معادلة $D$ ، أرسم $D$

٢) أوجد صيغة $T_L \circ T_{L'}$ و صيغة $T_L \circ T_D$

٣) أوجد صيغة $T' = T_L \circ T_D \circ T_{L'}$

٤) أرسم $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 1\}$ و $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 1\}$ و $T'(B)$ و $T'(\Delta)$ حيث $T'$ هي التحويلة المعرفة في السؤال السابق

**التمرين الثالث** أثبت كما في الحاضرة أنّ

أ) كل تقايس يثبت ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة هو العنصر المحايد

ب) التحويلة تكون تآلفيّة إذا و فقط إذا كل ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة تكون صورها ليست على إستقامة واحدة

ج) تحصيل دوران و إنعكاس إنزلاقي يكون إنعكاس إنزلاقي أو إنعكاس

التمرين الأول.

2

١) الانعكاس الانزلاقي.

هو تحصيل ازاحة مع انعكاس في نفس الاتجاه..

تعريف التعاكس..

2

التعاكس بالنسبة لدائرة مركزها m ونصف قطرها r

تحقق ← $|Am| \cdot |T(A)m| = r^2$

حيث T(A) هي النقطة الوحيدة التي تقع في $\overrightarrow{Am}$ .

تعريف التحاكي..

تعرف التحاكي ذي العامل r وذي المركز A

2

شروط التحاكي

يجب ان يحقق..

① $\overrightarrow{T(A)T(B)} = r\,\overrightarrow{AB}$

② $T(A) = A$


التحاكي

اذا كان لدي مستقيم AB

و A هو مركز التحاكي حيث $T(A)=A$

و T(B) هي الصورة لـ B تحت عملية التحاكي ..

$\therefore \overrightarrow{T(A)T(B)} = r\,\overrightarrow{AB}$

وتكون صورتها هي $\psi(x,y) = (X,Y)$

التحاكي يجب أن يحقق..

$$\overrightarrow{\psi(1,3)\,\psi(x,y)} = \text{ك}\ \overrightarrow{(1,3)\,(x,y)}$$

$$\overrightarrow{(1,3)\,(X,Y)} = \text{ك}\ \overrightarrow{(1,3)\,(x,y)}$$

$$(X-1,\ Y-3) = \text{ك}\,(x-1,\ y-3)$$

$$(X-1,\ Y-3) = (\text{ك}x - \text{ك},\ \text{ك}y - 3\text{ك})$$

$$X-1 = \text{ك}x - \text{ك} \qquad , \qquad Y-3 = \text{ك}y - 3\text{ك}$$

$$X = \text{ك}x - \text{ك} + 1 \rightarrow (1) \qquad , \qquad Y = \text{ك}y - 3\text{ك} + 3 \rightarrow (2)$$

نعوض عن $\text{ك} = 2$ في (1) و (2)

$$\Rightarrow X = 2x - 2 + 1 \qquad , \qquad Y = 2y - 6 + 3$$

$$X = 2x - 1 \qquad , \qquad Y = 2y - 3$$

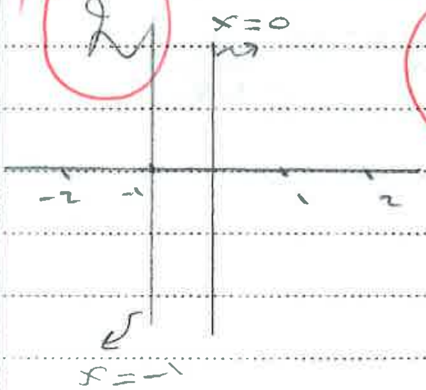
$$\therefore \psi(x,y) = (2x-1,\ 2y-3)$$

للتأكد من ان الصيغة صحيحة..

$$\psi(1,3) = (2(1)-1\ ,\ 2(3)-3)$$

$$= (2-1\ ,\ 6-3) = (1,3)$$

2




وهو صورة المستقيم $(x=0)$ تحت عملية التحاكي..

2

صورة $x=0$ بالتحاكي هي..

اولاً نرسم..

$$\psi(x,y) = (2x-1,\ 2y-3)$$

$$X = 2x-1 \qquad , \qquad Y = 2y-3$$

$$2x = X+1 \qquad , \qquad 2y = Y+3$$

$$x = \frac{1+X}{2} \qquad \& \qquad y = \frac{Y+3}{2}$$

نعوض عن قيمة $x$ في المعادلة $x=0$

$$\Rightarrow \frac{1+X}{2} = 0 \Rightarrow 1+X = 0$$

$$\Rightarrow X+1 = 0$$

$$\Rightarrow X = -1$$

وهو مستقيم يوازي & المحور الصادي..

٣) T تقايس مباشر أي أنه عبارة عن تحصيل انعكاسين وهو دوران أو الدوران او الازاحة
$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

صيغة الانعكاس هي

$T(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ إذا $2k\pi = \theta$ فهو ازاحة

لتكن $a = \cos\theta$ و $b = -\sin\theta$ ، $c = \sin\theta$

$d = \cos\theta$

2

$\therefore\ a = d$ و $c = -b$

(محدد التقايس المباشر هو 1)

$\det = ad - bc = 1$ لأن محدد الدوران هو

$= (a \cdot a) - (b \cdot (-b)) = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 = 1$

٤) H تقايس غير مباشر أي هو عبارة عن انعكاس أو تحصيل ثلاثة انعكاسات
L هو محور السينات بحيث أن $(T_L \circ H)$ هو دوران لانه ~~يحصل~~ عبارة عن تحصيل انعكاسين وبالتالي يكون تقايس مباشر

0,5

T تقايس غير مباشر لانه عبارة عن انعكاس

$\det T_L \times \det H = -1 \times -1 = 1$ لهذا $T_L \circ H$ هو تقايس مباشر

بما أن H تقايس غير مباشر نفرض أنه عبارة عن انعكاس واحد نفرض أنه يوجد $T_L$ تقايس $\therefore$ بتحصيل تقايسين واحد منهما غير مباشر يكون $T_L \circ H$ تحصيل مباشر $\therefore$ هو تقايس مباشر وأيضاً $T_L \circ H$ هو عبارة عن دوران لانه تحصيل انعكاسين وتحصيل انعكاسين يكون تقايس مباشر

ليكن T تقايس غير مباشر يحقق

$(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

نريد أن نثبت أن $a^2 + b^2 = 1$

بما أن T تقايس غير مباشر إذاً هو عبارة عن انعكاس او انعكاس انزلاقي

الصيغة العامة للانعكاس هي

$(x,y) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \end{pmatrix}$ او الانعكاس الانزلاقي

1

بمقارنة مصفوفة T بالمصفوفة العامة للانعكاس فإن

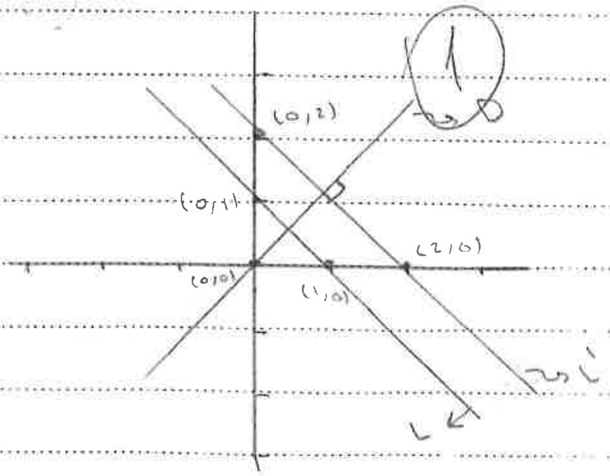
$a = \cos 2\theta$ $\quad b = \sin 2\theta$

$c = \sin 2\theta$ $\quad d = -\cos 2\theta$

أي أن

$d = -a$ $\quad c = b$

$\det = ad - bc = -1$ لأن محدد التقايس الغير مباشر هو $(-1)$




التمرين الثاني ..

1) اولاً .. اوجد معادلة L ..

$(x_1,y_1)\ (x_2,y_2)$

اوجد الميل بين $(1,0),(0,1)$

$$m_L = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

بما أن L مستقيم ..

نطبق المعادلة التالية ..

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m_L$$

$$\frac{y-0}{x-1} = -1$$

$$\Rightarrow y = -x+1$$

معادلة L ← $x - y - 1 = 0$

ثانياً نوجد معادلة D .. المستقيم D متعامد مع L اذاً العلاقة التالية متحققة ..

$$m_L \cdot m_D = -1$$

$$(-1)\cdot m_D = -1 \Rightarrow \boxed{m_D = 1}$$

و D يمر من $\overset{x_1\ y_1}{(0,0)}$ وبما أن D مستقيم نطبق المعادلة التالية ..

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m_D \Rightarrow \frac{y-0}{x-0} = 1 \Rightarrow y = x$$

$$\Rightarrow y - x = 0$$

هذه معادلة D

2) صيغة $T_L \circ T_D$ هي ..

اولاً اوجد صيغة L هو مستقيم يمر بالنقطة (1,0) ويميل زاوية

θ مع محور السينات ..

اولاً نوجد θ من ~~[illegible]~~ $m_L$ ..

$$\tan(\theta) = m_L \Rightarrow \tan(\theta) = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} = \theta$$

$$\therefore T_L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin -\frac{\pi}{2} & -\cos -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نطبق في قانون الانعكاس

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin \\ \sin 2\theta & -\cos \end{pmatrix}$

$$T_L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}$$

الآن نوجد صيغة $T_{L'}$ وهو مستقيم يمر من $(2,0)$ ويصنع زاوية $\theta$ مع محور السينات.

نكون زاوية $L'$ هي نفسها زاوية $L$ لأنهما متوازيان.

$$\therefore \theta_{L'} = \frac{-\pi}{4}$$

اذا صيغة الانعكاس لـ $L'$ هي:

$$T_{L'}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin -\frac{\pi}{2} & -\cos -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y \\ -x+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-y \\ 2-x \end{pmatrix}$$

$$\therefore T_L \circ T_{L'}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_L\begin{pmatrix} 2-y \\ 2-x \end{pmatrix}$$

2

$$= \begin{pmatrix} 1-(2-x) \\ 1-(2-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

وصيغة $T_L \circ T_D$ هي:

اولاً نريد ايجاد صيغة $T_D$ حيث $D$ هو مستقيم يمر

ويصنع زاوية مع محور السينات.

نوجد $\theta$ من الميل: $\tan\theta = m_D$

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \tan^{-1}(1) = \theta$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/4$$

$$\therefore T_D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & \sin \pi/2 \\ \sin \frac{\pi}{2} & -\cos \pi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\therefore T_L \circ T_D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_L\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \end{pmatrix}$$

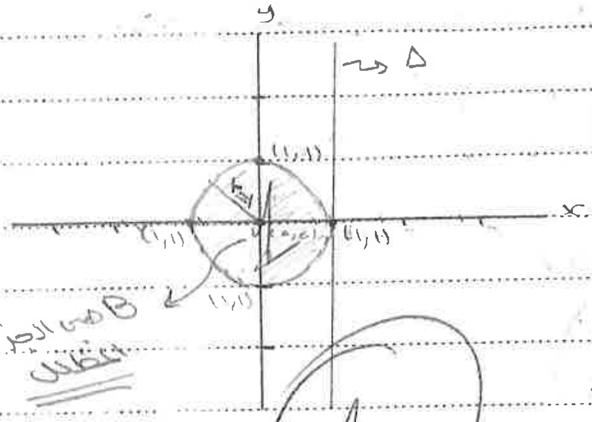
$T_L \circ T_O \circ T_L (x,y) = T_L \circ T_O (2-y, 2-x)$

$= T_L (2-x, 2-y)$

2

$= (1-2+y, 1-2+x)$

$= (-1+y, -1+x)$




1

(٢) B هي دائرة مركزها $(0,0)$

ونصف قطرها = ١

الآن نوجد $T^{-1}(\Delta)$

$T^{-1}(x,y) = (y-1, x-1)$

$= (X, Y)$

$\therefore X = y-1 \Rightarrow y = X+1$

$Y = x-1 \Rightarrow x = Y+1$

بالتعويض عن $x$ في معادلة $\Delta$ ..

$\Delta \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Y+1 = 1$

$\Rightarrow Y = 0 \rightarrow T^{-1}(\Delta)$

وبالتعويض عن $x$ و $y$ في معادلة $B$ ..

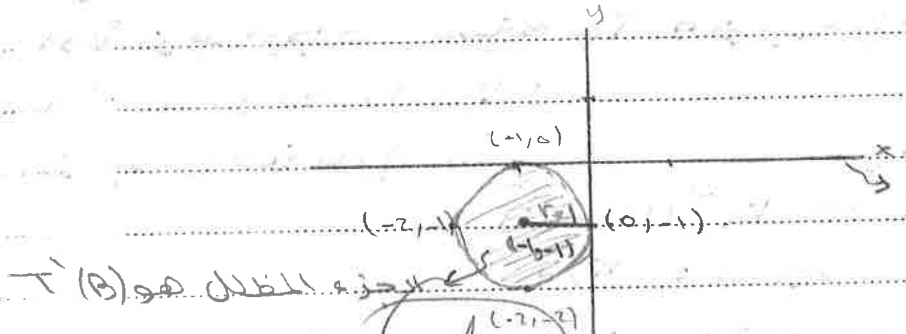
$B \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow (Y+1)^2 + (X+1)^2 \leq 1$

$\rightarrow T^{-1}(B)$

1

ن نلاحظ أن $T^{-1}(\Delta)$ هو محور السينات $(y=0)$

و أن $T^{-1}(B)$ هو دائرة مركزها $(-1,-1)$ ونصف قطرها = ١




1