السؤال :

لنفرض أن fl(x) هو تقريب لـ x باستخدام التقريب عند n موضع عشري , اثبتي أن :

$$\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-n+1}$$

الحل :

$$X = \sigma\ \bar{x}\ \times 10^{e}$$

حيث $\bar{x} = (a_1, a_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_n a_{n+1} \dots\dots\dots\dots\dots)$

نعلم أن $1 \leq \bar{x} < 9$ وبالتالي يكون لدينا

$$10^{e} \leq |x| < 9 \times 10^{e}$$

$$\frac{1}{|x|} < 10^{-e}$$

الحالة الأولى: $a_{n+1} < 5$

$$fl(x) = \sigma(a_1, a_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_n) \times 10^{e}$$

$$x - fl(x) = \sigma(0, 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots 0, a_{n+1} \dots\dots) \times 10^{e}$$

$$|x - fl(x)| = (0, 0, \dots\dots\dots\dots 0a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\dots\dots\dots\dots) \times 10^{e}$$

$$|x - fl(x)| = 0, a_{n+1}a_{n+2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \times 10^{e-n+1}$$

بما أنه $a_{n+1} < 5$ فإنه : $0, a_{n+1}\ a_{n+2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots. < 0.5$

وبالتالي: $|x - fl(x)| < 0.5 \times 10^{e-n+1}$ وهذا يؤدي إلى النتيجة المطلوبة

$$\left|\frac{x-fe(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-n+1}$$

الحالة الثانية: $a_{n+1} \geq 5$

$$fl(x) = \sigma(a_1, a_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_n + 0.0 \dots..01) \times 10^{e}$$

$$\text{fl}(x)= \sigma(a_1, a_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_n + 10^{-n+1}) \times 10^e$$

$$|x - fl(x)| = (0, 0, \dots\dots\dots\dots 0a_{n+1}\, , a_{n+2}, \dots\dots\dots - 10^{-n+1}) \times 10^e$$

$$|x - fl(x)| = (0, a_{n+1}\ a_{n+2} \dots\dots\dots\dots.. \times 10^{-n+1} - 10^{-n+1}) \times 10^e$$

$$|x - fl(x)| = (0, a_{n+1}\ a_{n+2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. -1) \times 10^{e-n+1}$$

بما أنه $a_{n+1} > 5$ فإنه : $\quad 0, a_{n+1}\ a_{n+2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots. > 0.5$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$0, a_{n+1}\ a_{n+2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. -1 < 0.5$$

وبالتالي: $\quad |x - fl(x)| < 0.5 \times 10^{e-n+1}$ وهذا يؤدي إلى النتيجة المطلوبة

$$\left|\frac{x - fe(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-n+1}$$

والله ولي التوفيق..