جامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الرياضيات

تعريف بـ

برنامج الماجستير

في الرياضيات

العام الدراسي الأول ١٤٣١-١٤٣٢ هـ

المحتوى

نبذة مختصرة عن
برنامج ماجستير العلوم في الرياضيات

ساهم قسم الرياضيات منذ نشأته في العام الجامعي ١٤٠٠ هجرية الموافق ١٩٨٠م، كأحد أقسام كلية التربية في إعداد كوادر علمية متميزة و مؤهلة للعمل في مجال البحث العلمي، قطاع التعليم وقطاعات أخرى.

تحقيقا لتوجه وزارة التعليم العالي في التوسع في برامج الدراسات العليا، و نظرا لاهتمام وزارة التربية والتعليم بالرقي بمستوى المدرسين والمدرسات، ولإعطاء الفرصة للقادرين على البحث العلمي من خريجي القسم وأقسام الرياضيات بجامعات المملكة العربية السعودية المختلفة للالتحاق ببرنامج الدراسات العليا، رأى القسم أن يقدم برنامج الماجستير في الرياضيات.

لقد خصص القسم وقتا كافيا لإعداد هذا البرنامج، حيث تم الإطلاع على برامج الماجستير في الرياضيات في بعض جامعات المملكة العربية السعودية مثل جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، وجامعة الملك سعود، وجامعة أم القرى، وجامعة الملك عبد العزيز، وكذلك في نخبة من الجامعات العربية والأجنبية.

لقد حرص القسم على أن يؤهل هذا البرنامج كوادر علمية عالية الجودة، وتمتلك المهارة والتفكير المنطقي في معالجة المسائل البحثية، وقادرة على الالتحاق ببرنامج الدكتوراه في الرياضيات أو بالمراكز البحثية المتخصصة؛ لذلك تم مراعاة ما يلي:

١- وضع مقررات إجبارية تعطي الخريج قاعدة معلومات قوية وشاملة في المواضيع الأساسية في التخصص.

٢- وضع مقررات اختيارية مبنية على تصور مدروس للمقررات المهمة في التخصصات الدقيقة المختلفة حتى يتاح للخريج فرصة اختيار تخصص لدراسة الدكتوراه من بين عدد من التخصصات الدقيقة في الرياضيات.

بدأت الدراسة ببرنامج الماجستير في الرياضيات في العام الجامعي ١٤٢١/١٤٢٠ هجرية الموافق ٢٠٠٠ م، حيث كان قسم الرياضيات احد أقسام كلية التربية. ومع نشأة كلية العلوم بجامعة الملك فيصل وانضمام قسم الرياضيات لها (في العام الجامعي ١٤٢٣ هجرية الموافق ٢٠٠٢م)، أصبح البرنامج يمثل فرصة لتحقيق طموحات الطلاب والطالبات المتميزين من خريجي القسم لاستكمال الدراسات العليا داخل الوطن.

عند وضع البرنامج، واقتداء بالجامعات الرائدة في هذا المجال، تم تحديد مسارين للبرنامج:

١- مسار المقررات: يجتاز الطالب بنجاح ٤٢ وحدة دراسية (٢٤ وحدة دراسية إجبارية، و١٦ وحدة دراسية اختيارية بالإضافة إلى مقال وبحث (وحدتان دراسيتان))

٢- مسار المقررات والرسالة: يجتاز الطالب بنجاح ٢٤ وحدة دراسية إجبارية، بالإضافة إلى إعداد رسالة بحثية مقبولة في احد تخصصات الرياضيات.

الرؤية

أن يكون خريج البرنامج أحد الكوادر المتميزة، والقادرة على البحث العلمي والتي تساهم في التطوير العلمي والتقني للوطن.

الرسالة

العمل على الرقي بالمستوى العلمي للحاصلين على درجة بكالوريوس العلوم في الرياضيات إلى مرحلة عالية من الجودة في مجال الدراسات العليا والبحث العلمي من أجل أن يكتسب خريجو البرنامج التفكير المنطقي والمهارات البحثية وذلك عن طريق:

- تقديم مقررات تضمن الالمام الشامل بالمعارف الأساسية في التخصص والتي تُمكن الطالب من التعمق في أحد التخصصات الدقيقة في الرياضيات واستكمال دراسته لمرحلة الدكتوراه.
- مراعاة معايير الجودة في إعداد البرنامج و خدماته العلمية والبحثية.
- تنمية المهارات العلمية والبحثية للطلبة وتدريبهم على التفكير المنطقي لمعالجة المشاكل البحثية والمساهمة الفعالة في حل المشاكل العلمية والصناعية التي تواجه خطط التنمية في الوطن.
- الحرص على أن تكون موضوعات الرسائل العلمية لطلبة الدراسات العليا متوافقة مع التوجهات البحثية الوطنية.

أهداف البرنـامج

- إتاحة الفرصة للمتميزين والقادرين على البحث العلمي من خريجي القسم وأقسام الرياضيات بجامعات المملكة العربية السعودية لإكمال دراسة الماجستير.
- إتاحة الفرصة لمدرسي ومدرسات الرياضيات للالتحاق بالبرنامج، وذلك تحقيقا لاهتمام وزارة التربية والتعليم للرقي بمستواهم التعليمي ومواكبة التطورات الحديثة في تخصص الرياضيات.
- تأهيل معيدي ومعيدات القسم ليكونوا كوادر وطنية متخصصة في العلوم الرياضية.
- تعميق روح البحث العلمي في العلوم الرياضية و تخريج كوادر علمية قادرة على القيام بالبحث العلمي و الالتحاق ببرامج للدكتوراه أو المراكز البحثية المتخصصة.
- تحقيق توجهات وزارة التعليم العالي في التوسع في برامج الدراسات العليا.
- تشجيع البحث والاتصال العلمي و النشر في مجلات علمية مرموقة وذلك لمواكبة التطورات الحديثة في الرياضيات.
- التفاعل مع المجتمع وتقديم الخدمات والاستشارات العلمية لقطاعات المجتمع المختلفة.

شروط القبول بالبرنامج

- أن يكون المتقدم حاصلا على درجة البكالوريوس في تخصص الرياضيات من إحدى الجامعات أو الكليات السعودية أو من إحدى الجامعات المعترف بها و يحقق شروط القبول المحددة في اللائحة الموحدة للدراسات العليا في الجامعات.
- أن يثبت المتقدم تمكنه و مقدرته في علوم الرياضيات على أساس اختبار القبول الذي يقدمه القسم بما يتفق مع المادة الخامسة عشرة من اللائحة الموحدة للدراسات العليا في الجامعات السعودية.

شروط الحصول على درجة ماجستير العلوم في الرياضيات

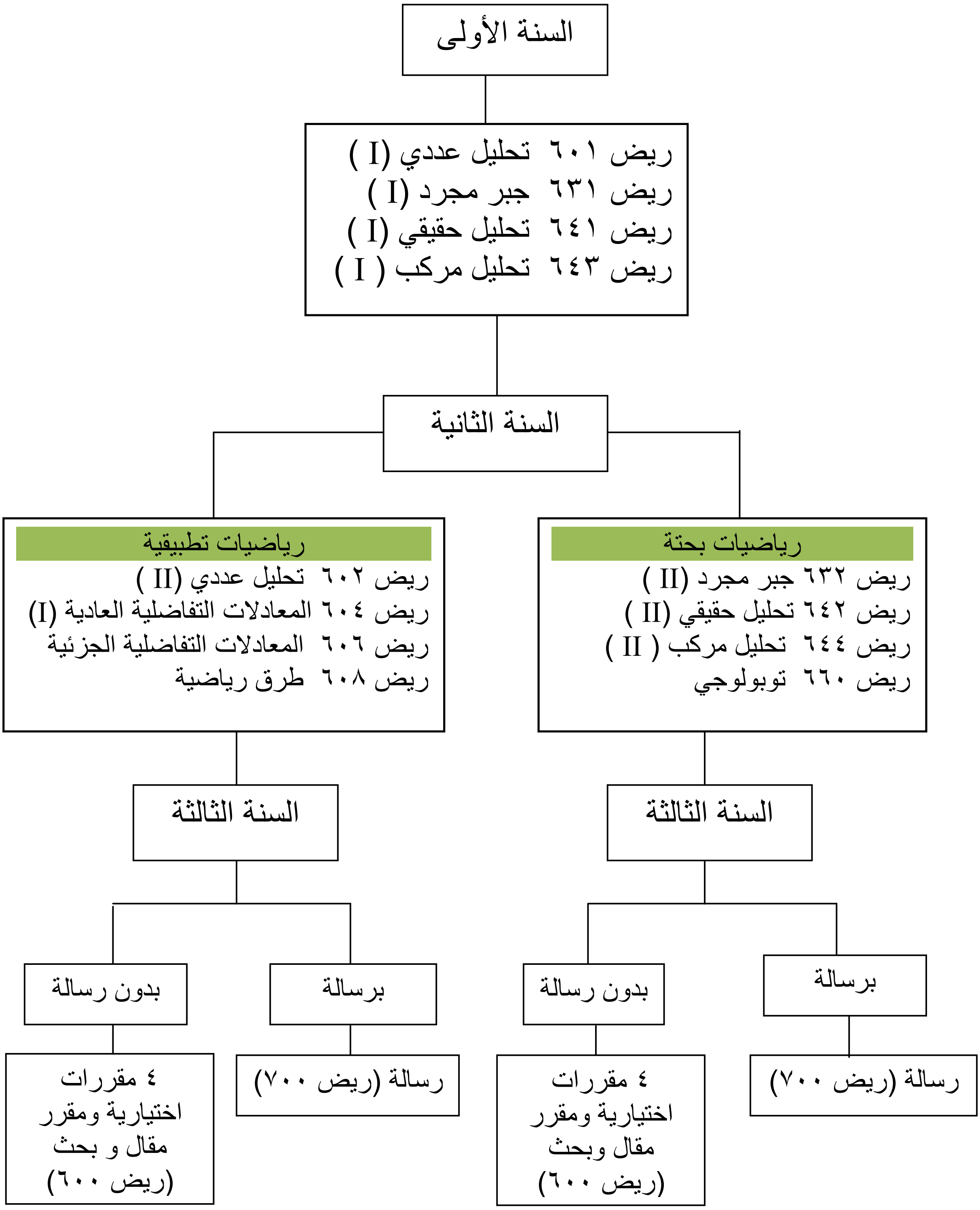
- إنهاء المقررات الدراسية الإجبارية بنجاح (٢٤ وحدة دراسية).
- إنهاء متطلبات أحد المسارين التاليين

أ) إنهاء ١٦وحدة دراسية من المقررات الاختيارية بالإضافة إلى مقرر مقال وبحث (وحدتان دراسيتان)؛ ويشترط موافقة المشرف الأكاديمي ومجلس القسم على كل مقرر يختاره الطالب.

ب)إعداد رسالة بحثية مقبولة في احد تخصصات الرياضيات.

- اجتياز اختبار شامل (في ثلاثة من فروع الرياضيات وهي التحليل والجبر والتوبولوجي للطلبة المتخصصين في الرياضيات البحتة والمعادلات التفاضلية والتحليل العددي والطرق الرياضية للطلبة المتخصصين في الرياضيات التطبيقية)، بناء على توصية من مجلس القسم وموافقة مجلس الكلية وعمادة الدراسات العليا وطبقا للمادة الأربعون من اللائحة الموحدة للدراسات العليا في الجامعات السعودية.

الهيكل العام لبرنامج الماجستير



المقررات الدراسية

١) المقررات الإجبارية لتخصص الرياضيات البحتة

السنة الأولى

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات		المتطلب
			نظري	عملي	
٠٨١٧٦٠١	ريض ٦٠١	تحليل عددي (I)	٣	--	-
٠٨١٧٦٣١	ريض ٦٣١	جبر مجرد (I)	٣	--	-
٠٨١٧٦٤١	ريض ٦٤١	تحليل حقيقي (I)	٣	--	-
٠٨١٧٦٤٣	ريض ٦٤٣	تحليل مركب (I)	٣	--	-
المجموع			١٢	--	-

السنة الثانية

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات		المتطلب
			نظري	عملي	
٠٨١٧٦٣٢	ريض ٦٣٢	جبر مجرد (II)	٣	--	ريض ٦٣٢
٠٨١٧٦٤٢	ريض ٦٤٢	تحليل حقيقي (II)	٣	--	ريض ٦٤٢
٠٨١٧٦٤٤	ريض ٦٤٤	تحليل مركب (II)	٣	--	ريض ٦٤٤
٠٨١٧٦٦٠	ريض ٦٦٠	توبولوجي	٣	--	-
المجموع			١٢	--	-

٢) المقررات الإجبارية لتخصص الرياضيات التطبيقية

السنة الأولى

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات		المتطلب
			نظري	عملي	
٠٨١٧٦٣٢	ريض ٦٠١	تحليل عددي (I)	٣	--	--
٠٨١٧٦٤٢	ريض ٦٣١	جبر مجرد (I)	٣	--	--
٠٨١٧٦٤٤	ريض ٦٤١	تحليل حقيقي (I)	٣	--	--
٠٨١٧٦٦٠	ريض ٦٤٣	تحليل مركب (I)	٣	--	--
المجموع			١٢	--	--

السنة الثانية

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات		المتطلب
			نظري	عملي	
٠٨١٧٦٠٢	ريض ٦٠٢	تحليل عددي (II)	٣	--	ريض ٦٣٢
٠٨١٧٦٠٤	ريض ٦٠٤	المعادلات التفاضلية العادية	٣	--	ريض ٦٤٢
٠٨١٧٦٠٦	ريض ٦٠٦	المعادلات التفاضلية الجزئية	٣	--	ريض ٦٤٤
٠٨١٧٦٠٨	ريض ٦٠٨	طرق رياضية	٣	--	-
المجموع			١٢	--	-

٣) المقررات الاختيارية

(أ) مقررات الجبـــــر الاختياريــــــة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦٣٣	ريض ٦٣٣	الجبر الابدالي	٤	
٠٨١٧٦٣٤	ريض ٦٣٤	الجبر الحسابي	٤	
٠٨١٧٦٣٥	ريض ٦٣٥	الحلقات والمديولات	٤	
٠٨١٧٦٣٦	ريض ٦٣٦	الحقول و نظرية قالوا	٤	
٠٨١٧٦٣٧	ريض ٦٣٧	نظرية الزمر	٤	

(ب) مقررات التحليـــــل الاختياريــــــة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦٤٦	ريض ٦٤٦	التحليل الدالي (I)	٤	
٠٨١٧٦٤٨	ريض ٦٤٨	نظرية المؤثرات	٤	
٠٨١٧٦٤٥	ريض ٦٤٥	التحليل التوافقي	٤	
٠٨١٧٦٤٧	ريض ٦٤٧	التحليل الدالي (II)	٤	
٠٨١٧٦٤٩	ريض ٦٤٩	جبريات باناخ	٤	
٠٨١٧٦٥٧	ريض ٦٥٧	نظرية التوزيعات	٤	

(ج) مقررات المنطـــق الاختياريـــــة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦٣٣	ريض ٦٢١	المنطق الرياضي (I)	٤	
٠٨١٧٦٣٤	ريض ٦٢٣	نظرية المجموعات	٤	
٠٨١٧٦٣٥	ريض ٦٢٥	نظرية الإثبات	٤	
٠٨١٧٦٣٦	ريض ٦٢٢	المنطق الرياضي (II)	٤	
٠٨١٧٦٣٧	ريض ٦٢٤	نظرية النماذج	٤	
٠٨١٧٦٢٦	ريض ٦٢٦	نظرية قابلية الحساب	٤	

(د) مقررات الهندسـة و التوبولوجي الاختياريـــــة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦٦١	ريض ٦٦١	التوبولوجي الجبري (I)	٤	
٠٨١٧٦٧١	ريض ٦٧١	الهندسة التفاضلية (I)	٤	
٠٨١٧٦٧٣	ريض ٦٧٣	الهندسة الجبرية	٤	
٠٨١٧٦٦٢	ريض ٦٦٢	التوبولوجي الجبري (II)	٤	
٠٨١٧٦٧٢	ريض ٦٧٢	الهندسة التفاضلية (II)	٤	

(ه) مقررات الرياضيات التطبيقيـــة الاختياريـــــــة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦١١	ريض ٦١١	حساب المتغيرات	٤	
٠٨١٧٦١٢	ريض ٦١٢	المعادلات التفاضلية العادية (II)	٤	
٠٨١٧٦١٣	ريض ٦١٣	نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية (I)	٤	
٠٨١٧٦١٤	ريض ٦١٤	نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية (II)	٤	
٠٨١٧٦١٥	ريض ٦١٥	مسائل القيم الحدية	٤	
٠٨١٧٦٥٣	ريض ٦٥٣	الدوال الخاصة في الرياضيات التطبيقية	٤	
٠٨١٧٦٥٤	ريض ٦٥٤	التحويلات التكاملية و طرق العمليات	٤	
٠٨١٧٦٥٥	ريض٦٥٥	التحليل الدالي التطبيقي (I)	٤	
٠٨١٧٦٥٦	ريض ٦٥٦	التحليل الدالي التطبيقي (II)	٤	

(و) مقررات التحليل العـددي الاختياريـــــــة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦١٦	ريض ٦١٦	نظرية التقريب	٤	
٠٨١٧٦١٧	ريض ٦١٧	الطرق العددية للمعادلات التفاضلية العادية	٤	
٠٨١٧٦١٨	ريض٦١٨	الطرق العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية	٤	
٠٨١٧٦٥١	ريض ٦٥١	الطرق العددية للجبر الخطي	٤	

(ز) موضوعات خاصة في الرياضيات

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦٩٥	ريض ٦٩٥	موضوعات خاصة في الرياضيات	٤	

٤) مقرر مقال وبحث

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٦٠٠	ريض ٦٠٠	مقال وبحث	٢	

٥) الرسالة

رقم المقرر	رمز المقرر	مسمى المقرر	عدد الوحدات	المتطلب
			نظري	
٠٨١٧٧٠٠	ريض ٧٠٠	رسالة	٨	

امتحان القبول

١- المواضيع المتوقع من المتقدم معرفتها

١) الإستقراء (القوي والضعيف).

٢) نظرية المجموعات، الدوال والعلاقات علاقات التكافؤ وعلاقات الترتيب.

٣) بعض النتائج من التفاضل والتكامل وتحليل المتجهات: غالبية هذه المواضيع مدرجة تحت عنوان مفاهيم التحليل أدناه إضافة إلى هذه هناك حساب التكامل في عدة أبعاد وتعريف التكاملات الخطية والسطحية ونظرية قرين وستوكس ونظرية التباعد.

٤) مفاهيم أساسية في الجبر.

٥) مفاهيم أساسية في التحليل.

٦) بعض مفاهيم التوبولوجي.

١- مواضيع التحليل:

١) خاصية التمام للأعداد الحقيقية sup (أقل حد أعلى) و inf (أكبر حد أدنى).

المراجع:

القويز	Ross	Bartle
الفصل الثاني	sec4	sec 2.4-2.5 pp 42-53

٢) المتتابعات، تقارب المتتابعات، المتتابعات الجزئية، المتتابعات المطردة، المتتابعات الكوشية.

المراجع:

القويز	Ross	Bartle
الفصل الثالث	sec 7-13	sec 3.1-3.5 pp 67-107

٣) المتسلسلات، تقارب المتسلسلات، التقارب المطلق، اختبارات التقارب.

المراجع:

القويز	Ross	Bartle
	sec 14-16	sec 9.1-9.3 pp 67-107

٤) نهايات الدوال الحقيقية والإتصال.

المراجع:

القويز	Ross	Bartle
الفصل الرابع	sec 20,17	sec 4.1-4.2 pp 110-120

٥) الدوال المتصلة وخواصها (القيمة العظمى على الفترات المغلقة، القيمة الوسطية).

المراجع:

القويز	Ross	Bartle
الفصل الخامس	sec 17,18	sec 5.1-5.4 pp 140-172

٦) الإتصال المنتظم.

<u>المراجع:</u>

Bartle	Ross	القويز
sec 5.1-5.4 pp 140-172	sec 19	الفصل الخامس

٧) التفاضل والعلاقات الأساسية (نظرية القيمة المتوسطة، نظرية رول، نظرية لوبيتال، مفكوك تيلور).

<u>المراجع:</u>

Bartle	Ross	القويز
sec 5.1-5.4 pp 140-172	sec 28-31	الفصل السادس

٨) التكامل، تعريف التكامل، الخواص الرئيسية للتكامل (نظرية القيمة المتوسطة للتكامل، النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل) التكامل المعتل.

<u>المراجع:</u>

Bartle	Ross	القويز
sec 5.1-5.4 pp 140-172	sec 32-37	

٩) متتابعات الدوال، التقارب والتقارب المنتظم.

<u>المراجع:</u>

Bartle	Ross	القويز
sec 5.1-5.4 pp 140-172	sec 24-26	

١٠) متساسلات الدوال: التقارب والتقارب المنتظم، المتسلسلات الأسية، فترات التقارب.

<u>المراجع:</u>

Bartle	Ross	القويز
sec 5.1-5.4 pp 140-172	sec 23-26	

٢- التحليل المركب:

١٢) الأعداد المركبة، فاضل الدوال المركبة، معادلة كوشي ريمان تشرشل الفصل الأول والثاني.
١٣) الرواسم المركبة، التكاملات، نظرية كوشي التكاملية، المفكوكات، تشرشل الفصل الثالث والرابع والخامس والسادس.
١٤) حساب البواقي.
تشؤشل الفصل السابع.
<u>المراجع:</u>

[Bartle]
Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert: “Introduction to real analysis”
[Ross]
Kenneth A. Ross: “Elementary Analysis: The Theory of Calculus”
القويز
محمد عبد الرحمن القويز وصالح السنوسي "مبادئ التحليل الحقيقي" الجزء الأول.
المراجع للتحليل المركب:
تشرشل
دويل تشرشل وجيمس براون وروجر فيرهي "المتغيرات المركبة وتطبيقات"

٣- مواضيع الجبر:

١) العمليات الثنائية، العنصر المحايد، المعكوس، وحدية المحايد والمعكوس والزمر وخواصها الأساسية (خاصية الحذف، معكوس الضرب، معكوس المعكوس....إلخ).
<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian

chapter 2	فصل ٢،٣	chapter 2

٢) الزمر الجزئية، الزمر الدائرية، زمر الإبدالات، جداء الزمر.

<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian
chapter 2	فصل ٣	chapter 3,4,5,8

٣) المجموعات المرافقة ونظرية لاغرانج.

<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian
chapter 2	فصل ٣	chapter 7

٤) الهومومورفزمات والزمر الجزئية الطبيعية، زمر القسمة، النظرية الأساسية الأولى لهومومورفزمات الزمر.

<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian
chapter 2	فصل ٣	chapter 9,10

٥) الحلقات والنطاقات الصحيحة، ذات الحدين، الحلقات الجزئية، المثاليات وحلقات القسمة، المثاليات الأولية والعظمى.

<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian
chapter 10	فصل ٤	chapter 12,13,14

٦) الهومومورفزمات الحلقية والنظرية الأساسية لهومومورفزمات الحلقات.

<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian
chapter 10	فصل ٤	chapter 15

٧) حلقات كثيرات الحدود، تحليل كثيرات الحدود.

<u>المراجع:</u>

Artin	الدوسري	galian
sec 11.1-11.3	فصل ٥	chapter 16,17

٨) نطاقات وحدة التحليل، نطقاقات المثاليات الأساسية، القاسم المشترك الأعلى.

المراجع:

galian	الدوسري	Artin
chapter 18		sec 11.1-11.3

٩) الفضاءات الخطية (الاستقراء الخطي، الإنشاء، الأساس، البعد).

المراجع:

galian	الدوسري	Artin
chapter 19		chapter 9

١٠) التمديدات البسيطة للحقول.

المراجع:

galian	الدوسري	Artin
chapter 20		sec 10.5

المراجع:

[galian]
Joseph Galian: “Contemporary Abstract Algebra”
[artin]
Michael Artin: “Algebra”

(الدوسري)
فالح عمران الدوسري "مقدمة في البنى الجبرية"

٤- مواضيع التوبولوجي:

١) تعريف الفضاءات التوبولوجية.

المراجع:

إسماعيل	Munkres
الفصل الثاني	chapter 2

٢) أساس التوبولوجي وأسس الجوار للتوبولوجي.

المراجع:

إسماعيل	Munkres
	chapter 2

٣) الفضاءات المتراصة.

المراجع:

إسماعيل	Munkres
الفصل الخامس	chapter 3

٤) الدوال المتصلة والهوميومورفزم.

المراجع:

إسماعيل	Munkres
الفصل الثاني	chapter 3

٥) فضاءات T_0, T_1, T_2.

المراجع:

إسماعيل	Munkres
الفصل السابع	sec 4.2

المراجع:

[Munkres]
James Munkres: “Topology a first Course”

إسماعيل
محمد عبد المنعم إسماعيل: "مقدمة في التوبولوجي"

نماذج من الاختبارات التحريرية

الاختبار الأول

س١: اذا كانت $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة متصلة أثبت انه توجد $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=x_0$

الحل: اذا $f(a)=a$ أو $f(b)=b$ هـ ط ث

لنفرض أن $f(a)\neq a$ و $f(b)\neq b$ عندها ستكون $f(a)>a$ و $f(b)<b$ اجعل

$h(x)=f(x)-x$ لدينا $h(a)<0$ و $h(b)>0$ و بالتالي من نظرية القيمة الوسطية ستوجد

$x_0\in(a,b)$ بحيث $h(x_0)=0$ اذا $f(x_0)=x_0$

س٢:أ) اذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فأثبت أن

$$\int_0^1 f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]$$

ب) احسب النهاية التالية (ان وجدت)

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$$

الحل: أ) بما أن f متصلة فهي قابلة للتكامل. من تعريف التكامل لكل $\varepsilon>0$ ستوجد $\delta>0$ بحيث

اذا $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ تحقق $\max\{x_i-x_{i-1}:1\le i\le n\}<\delta$

و $\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$ لكل $1\le i\le n$ فان $\left|\int_0^1 f(t)dt-\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k-x_{k-1})\right|<\varepsilon$.

فاذا $\frac{1}{N}<\delta$ فلكل $n\ge N$ اذا اخترنا $x_0=0$ و $\zeta_i=x_i=\frac{i}{n}$ لكل $1\le i\le n$ فان

$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ و $\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$ و

$\max\{x_i-x_{i-1}:1\le i\le n\}=\frac{1}{n}<\delta$ و بالتالي $\left|\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|<\varepsilon$

حيث $\varepsilon>0$ اختياري فان (من تعريف النهاية) $\int_0^1 f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]$

ب) اختر $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ في أ) هذا يعطينا أن

$$\ln(2)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}]$$

و قيمة النهاية المطلوبة هي $\ln 2$

س٣: لتكن $(a_n),(b_n),(c_n)$ ثلاث متتابعات معرفة كما يلي:

$$a_n=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}$$

$$b_n=\frac{1}{1}-\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$$

$$c_n=a_nb_n$$

هل المتتابعة (c_n) متقاربة اذا كان الجواب بنعم فاحسب $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$

الحل: لدينا $\frac{x^n}{n!}+\cdots+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1}= \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$. اذا $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^2$ و $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=e^{-2}$ و بالتالي فان $c_n=a_nb_n$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=e^2e^{-2}=e^0=1$

س٤: لتكن $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دالة متصلة عند $x=0$ و تحقق الخاصية $f(a+b)=f(a)+f(b)$ أثبت أن f متصلة على $\mathbf{R}$

الحل: لاحظ أن المعادلة المعطاة تكافئ $f(c)=f(a)+f(c-a)$ (باخذ $c=a+b$) أي $f(c)-f(a)=f(c-a)$. ايضا من $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ نجد $f(0)=0$ اذا (بأخذ $c=0$ في المعادلة السابقة) $f(-a)=f(0-a)=f(0)-f(a)=0-f(a)=-f(a)$. اذا

$$|f(c)-f(a)|=\max\{f(c)-f(a),f(a)-f(c)\}=\max\{f(c-a),f(a-c)\}=$$
$$=\max\{f(c-a),-f(c-a)\}=|f(c-a)|$$

لنفرض أن $a\in\mathbf{R}$ و أن $\varepsilon>0$ معطى من فرض الاتصال عند $x=0$ ستوجد $\delta>0$ بحيث $|x-0|<\delta\Rightarrow|f(x)|=|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. اذا $|c-a|<\delta\Rightarrow|f(c)-f(a)|=|f(c-a)|<\varepsilon$

س٥: أ)لتكن $f: X \to \mathbf{R}$ دالة من الفضاء المتري (X,d) الى الاعداد الحقيقية. عرف معنى f متصلة اتصالا منتظما ، اثبت أنه اذا كانت $f:[0,\infty) \to \mathbf{R}$ متصلة اتصالا منتظما على $[0,1]$ و على $[1,\infty)$ فهي متصلة اتصالا منتظما على $[0,\infty)$

ب) حدد اذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة اتصالا منتظما على الفترة $[0,\infty)$. برر اجابتك بالتفصيل

الحل:أ) f متصلة اتصالا منتظما اذا لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$|f(x)-f(y)| < \varepsilon \Leftarrow d(x,y) < \delta$

اذا $f:[0,\infty) \to \mathbf{R}$ متصلة اتصالا منتظما على $[0,1]$ و على $[1,\infty)$ فلكل $\varepsilon > 0$

ستوجد $\delta_1 > 0$ بحيث $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Leftarrow x,y \in [0,1] \wedge |x-y| < \delta_1$

و ستوجد $\delta_2 > 0$ بحيث $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Leftarrow x,y \in [1,\infty) \wedge |x-y| < \delta_2$

اجعل $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ اذا $x,y \in [0,\infty)$ و $|x-y| < \delta$ فهناك ثلاث امكانيات

١) $x,y \in [0,1]$ فبما أن $|x-y| < \delta \le \delta_1$ فان $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

٢) $x,y \in [1,\infty)$ فبما أن $|x-y| < \delta \le \delta_2$ فان $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

٣) و احدة من x,y في $[0,1]$ و الاخرى في $[1,\infty)$ ب ف ع سنفترض أن $x \in [0,1]$ و $y \in [1,\infty)$ اذا $x \le 1 \le y$ ومنه $|1-x| = 1-x \le y-x < \delta \le \delta_1$ و بالتالي $|f(1)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

كذلك $|y-1| = y-1 \le y-x < \delta \le \delta_2$ و بالتالي فان $|f(y)-f(1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ اذا

$$|f(y)-f(x)| \le |f(y)-f(1)| + |f(1)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

من هذا نجد أنه في كل الحالات $|f(x)-f(y)| < \varepsilon \Leftarrow |x-y| < \delta$ و بما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية فان f منتظمة الاتصال على $[0,\infty)$

ب) على الفترة $[1,\infty)$ الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ متظمة الاتصال لان

$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\dfrac{|x-y|}{2}$ فاذا اعطينا $\varepsilon>0$ نأخذ $\delta=2\varepsilon$ لنجد أن

$|x-y|<\delta \Leftarrow \left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$. على $[0,1]$ الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة و بالتالي فهي منتظمة الاتصال (الدالة المتصلة على مجموعة متراصة منتظمة الاتصال) اذا من أ) هذه الدالة منتظمة الاتصال على $[0,\infty)$

س٦:ليكن (X,τ_1), (Y,τ_2) فضاءان توبولوجيان بحيث أن أية دالة من X الى Y متصلة. أثبت أن τ_1 هو التوبولوجي المنفصل (أي التوبولوجي الذي فيه جميع المجموعات الجزئية من X مفتوحة) أو $\tau_2=\{Y,\phi\}$ هو التوبولوجي التافه

الحل: اذا $\tau_2\neq\{Y,\phi\}$ فستوجد $O\in\tau_2$ بحيث $O\neq Y$ و $O\neq\phi$ اختر $a\in O$ (ممكن لان $O\neq\phi$) و $b\notin O$ (ممكن لان $O\neq Y$). اذا $c\in X$ عرف $f_c:X\to Y$ بالمعادلة $f_c(x)=\begin{cases}a & x=c\\ b & x\neq c\end{cases}$ من الفرض f_c متصلة اذا $f_c^{-1}(O)\in\tau_1$ و لكن بما أن $b\notin O$ و $a\in O$ فان $x\in f_c^{-1}(O)\Leftrightarrow f_c(x)\in O\Leftrightarrow f_c(x)=a\Leftrightarrow x=c$ أي $\{c\}=f_c^{-1}(O)\in\tau_1$ و بما أن $\{c\}\in\tau_1$ لكل $c\in X$ فان τ_1 هو التوبولوجي المنفصل على X (لاي مجموعة $A\subseteq X$ لدينا $A=\bigcup_{c\in A}\{c\}\in\tau_1$ (اتحاد مفتوحات)

س٧:أ) لتكن G زمرة عنصرها المحايد هو e. أثبت أنه اذا كان $x^2 = e$ لكل $x \in G$ فان G ابدالية

ب) أثبت انه اذا كان عدد عناصر زمرة اقل من 6 فانها تكون ابدالية

الحل: أ) لكل $x, y \in G$ لدينا $x\,y\,x\,y = (x\,y)^2 = e = e\,e = x^2\,y^2 = x\,x\,y\,y$ و بالضرب في x^{-1} من اليسار و y^{-1} من اليمين نحصل على $x\,y = y\,x$ و G ابدالية

ب) نعلم أنه اذا كانت رتبة الزمرة اولية فهي دائرية و بالتالي ابدالية. هذا يعطينا أن الزمر من الرتب 2,3,5 ابدالية. طبعا الزمرة من الرتبة 1 تتكون من العنصر المحايد و هي ابدالية. اذا الزمرة لها الرتبة 4 فكل عنصر بها له رتبة تقسم 4. اذا بها عنصر رتبته 4 فهي دائرية و بالتالي ابدالية. اذا لايوجد بها عنصر من الرتبة 4 فكل عنصر x بها له الرتبة 2 أو 1 و يحقق $x^2 = e$ و الزمرة ابدالية من أ)

س٨:لتكن $M_2(\mathbf{R}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbf{R}\}$ حلقة المصفوفات 2×2 (تحت عمليتي جمع و ضرب المصفوفات) و لتكن $S = \{\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} : x \in \mathbf{R}\}$

أ) أثبت أن S حلقة جزئية من $M_2(\mathbf{R})$ هل هي مثالي؟

ب) اعتبر S حلقة تحت عمليتي جمع و ضرب المصفوفات. أثبت أن S لها عنصر محايد و اوجده. حدد العناصر التي لها معكوس في S و اوجد معكوسها. كيف يمكن أن تكون هناك عناصر من S لها معكوس و لها محددة تساوي صفر.

الحل:أ) لنثبت أن S حلقة جزئية يكفي أن نثبت أنها مغلقة تحت الطرح و الضرب. ولكن اذا $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} \in S$ فان $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix} \in S$ (*)

و $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & x-y \\ x-y & x-y \end{bmatrix} \in S$

S ليست مثالي لان $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \notin S$ اذا $x \neq 0$ و بالتالي فأن S ليست مغلقة تحت الضرب في عنصر من $M_2(\mathbf{R})$

ب) من (*) نجد أن $e=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ هو العنصر المحايد ل S لانه لكل $S \ni \begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}$ ستكون $\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}e=e\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}$ اذا $S \ni \begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}$ فان $S \ni \begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}$ معكوس لها اف كان $\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy & 2xy\\ 2xy & 2xy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ هذا سيتحقق اف $2xy=1/2$ أأف $x\neq 0$ و $y=\dfrac{1}{4x}$ اذا ا] عنصر لاصفري له معكوس. وجود معكوس لمصفوفة محددها صفر سببه اختلاف العنصر المحايد في S عن مصفوفة الوحدة (محايد $M_2(\mathbf{R})$) فالمعادلة $\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y & y\\ y & y\end{bmatrix}=e$ ممكنه حتى لو كانت $\det\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\end{bmatrix}=0$ لان $\det(e)=0$

الاختبار الثاني

س١: اذا كانت $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ دالة متصلة بحيث لكل $x\in[0,1]$ توجد $y\in[0,1]$ تحقق $2f(x)\le f(y)$ أثبت أن $f(x)\le 0$ لكل $x\in[0,1]$

الحل: حيث أي دالة متصلة على فترة مغلقة لها قيمة عظمى فستوجد $x_0\in[0,1]$ بحيث $f(x)\le f(x_0)$ لكل $x\in[0,1]$. من الفرض ستوجد $y\in[0,1]$ بحيث $2f(x_0)\le f(y)$ اذا $2f(x_0)\le f(y)\le f(x_0)$ اذا (بطرح $f(x_0)$ من الطرفين) $f(x_0)\le 0$ و لكل $x\in[0,1]$

$$f(x)\le f(x_0)\le 0$$

س٢: أ) اثبت أو انف مع مثال مضاد

١) اذا كانت $\sum a_n$ متقاربة فان $\sum a_{2n}$ متقاربة

٢) اذا كانت (a_n) متقاربة فان (a_{2n}) متقاربة (كمتتابعات)

ب) لكل من المتسلسلات التالية حدد اذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة مع تبرير اجابتك:

١) $\sum \dfrac{n^n}{4^n n!}$ ٢) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(n)}{(n^2+1)\log(n)}$

الحل: أ) ١) غير صحيح. مثال انظر الى المتسلسلة $\cdots -1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}$ أي اجعل $a_{2i}=\frac{1}{i},\quad a_{2i-1}=\frac{-1}{i}$ تجد المجاميع الجزئية $s_{2k}=\sum_{i=1}^{k}(a_{2i-1}+a_{2i})=0$ و

أي $s_{2k-1}=\sum_{i=1}^{k-1}(a_{2i-1}+a_{2i})+a_{2k-1}=a_{2k-1}=\frac{-1}{k}$ $\quad \sum_{k=1}^{n}a_n=\begin{cases}0 & \exists k(n=2k)\\ \dfrac{-2}{n+1} & \exists k(n=2k-1)\end{cases}$

فالمجاميع الجزئية متقاربة الى 0 اذا المتسلسلة متقاربة و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$ بينما $a_{2k}=\frac{1}{k}$ متسلسلة متباعدة فهي متسلسلة موجبة و يمكن استنتاج كونها متباعدة بواحدة من الطرق التالية (اي من هذه حل مقبول):

١) من اختبار التكامل بما أن الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$ متناقصة و موجبة فان $\sum\dfrac{1}{k}$ متقاربة ااف

$\int^{\infty}\dfrac{1}{x}dx$ متقارب و لكن $\int^{A}\dfrac{1}{x}dx=\log(A)\to\infty$ اذا المتسلسلة متباعدة

٢) من اختبار كوشي بما أن $b_k=a_{2k}=\dfrac{1}{k}$ متناقصة فان $\sum b_k$ متقاربة ااف كانت

$\sum 2^k b_{2^k}$ متقاربة و لكن هذه هي المتسلسلة $\sum 1$ وهي متباعدة (مجاميعها الجزئية هي

$(s_n=n\to\infty$

طبعا من الممكن اثبات كونها متباعدة بطرق اخرى

ب) ١) $\sum\dfrac{n^n}{4^n n!}$ متقاربة لانها متتابعة من الحدود الموجبة $a_n=\dfrac{n^n}{4^n n!}$ و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{4^n}{4^{n+1}}\frac{n!}{(n+1)!}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)\frac{1}{4}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{e}{4}<1$$

٢) متقاربة لانها متقاربة مطلقا لان $\left|\dfrac{\sin(n)}{(n^2+1)\log(n)}\right|\le\dfrac{1}{(\log 2)(n^2+1)}$ و المتسيلسلة

$\sum\dfrac{1}{(\log 2)(n^2+1)}$ متقاربة من المقارنة بالمتسلسلة $\sum\dfrac{1}{(\log 2)n^2}$ وهذه متقاربة لانها على

الشكل $\dfrac{1}{n^p},\ p>1$ أو مباشرة من اختبار التكامل

س٣:أ) اوجد $\int_\sigma -y^2dx+x^2dy$ حيث σ هي الدائرة التي مركزها نقطة الاصل و نصف قطرها ٣

ب) اوجد $\iint_D(x+y)dxdy$ حيث $D=\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\le 3\}$

جـ) ماهي العلاقة بين اجابتك في أ) و ب) برر العلاقة باستخدام النظريات المناسبة

الحل: أ) σ لها الصيغة البارامترية $x(t)=3\cos(t),\ y(t)=3\sin(t)\quad 0\le t\le 2\pi$ فقيمة التكامل هي

$$\int_\sigma -y^2dx+x^2dy=\int_0^{2\pi}-y(t)^2x'(t)dt+x(t)^2y'(t)dt=\int_0^{2\pi}27(\sin^3 t+\cos^3 t)dt$$

و لدينا أن

$$\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt=\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\overbrace{\sin t\,dt}^{-d\cos t}={}_0^{2\pi}\left|-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right.=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\overbrace{\cos t\,dt}^{d\sin t}={}_0^{2\pi}\left|\sin t+\frac{\sin^3 t}{3}\right.=0$$

اذا $\int_\sigma -y^2dx+x^2dy=0$

ب)

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_{y=-3}^{y=3}\int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}}(x+y)dx\,dy = \int_{y=-3}^{y=3}\left(\left.\begin{matrix} x=\sqrt{9-y^2} \\ x=-\sqrt{9-y^2}\end{matrix}\right| \frac{x^2}{2}+y\,x\right)dy$$

$$= \int_{y=-3}^{y=3}\overbrace{\sqrt{9-y^2}}^{u^{1/2}}\ \overbrace{2ydy}^{-du} = \left.{}_{-3}^{3}\right|\frac{-(9-y^2)^{3/2}}{3/2} = 0$$

جـ) من نظرية قرين $\int_D Pdx+Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy$ اذا طبقنا هذا على التكامل في أ) نجد

$$\int_D \overbrace{-y^2}^{P}dx + \overbrace{x^2}^{Q}dy = \iint_D\left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}\right)dxdy = 2\iint_D (x+y)dx\,dy$$

اذا التكامل في أ) هو ضعف التكامل في ب) و في هذه الحالة كلاهما صفر

س٤: اجعل $\tau_f = \{\mathbf{R}\setminus A : A\subset \mathbf{R}\ \ finite\}\cup\{\phi\}$ (أي τ_f تتكون من المجموعة الخالية و مكملات المجموعات المنتهية) حيث $\mathbf{R}$ هي مجموعة الاعداد الحقيقية

أ) أثبت أن τ_f توبولوجي على $\mathbf{R}$

ب) اذا كانت $f:(\mathbf{R},\tau_f)\to(X,\tau)$ دالة متصلة حيث (X,τ) فضاء هوزدورف فاثبت أن f دالة ثابتة

الحل: أ) الاغلاق تحت الاتحاد: لنفرض أن $O_i\in\tau_f$ لكل $i\in I$

- اذا $O_i=\phi$ لكل $i\in I$ فان $\bigcup_{i\in I}O_i=\phi\in\tau_f$
- اذا توجد i_0 بحيث $O_{i_0}\neq\phi$ فان $O_{i_0}=\mathbf{R}\setminus A$ حيث $A\subset\mathbf{R}$ منتهية فان $\bigcup_{i\in I}O_i=\mathbf{R}\setminus B$ حيث $B=\left(\bigcup_{i\in I}O_i\right)^c\subseteq O_{i_0}^c=A$ منتهية و بالتالي $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau_f$

الاغلاق تحت التقاطع المنتهي: لنفرض أن $O_1,\cdots,O_n\in\tau_f$

- اذا توجد $1\le i\le n$ بحيث $O_i=\phi$ فان $\bigcap_{j=1}^n O_j=\phi\in\tau_f$
- اذا $O_i\neq\phi$ لكل $1\le i\le n$ فان O_i^c منتهية لكل $1\le i\le n$ و $\left(\bigcap_{i=1}^n O_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^n O_i^c$ منتهية و $\bigcap_{j=1}^n O_j\in\tau_f$

احتواء المجموعة الكلية و الخالية: $\phi\in\tau_f$ من تعريف τ_f و $\mathbf{R}\in\tau_f$ لان مكملتها ϕ منتهية

ب) (بالتناقض) لنفرض انه توجد $x, y \in \mathbf{R}$ بحيث $f(x) \neq f(y)$. بما أن (X,τ) هوزدورف فستوجد O_1, O_2 مجموعتين مفتوحتين في (X,τ) بحيث $f(x) \in O_1$ و $f(y) \in O_2$ و $O_1 \cap O_2 = \phi$ اذا $U_1 = f^{-1}(O_1)$ و $U_2 = f^{-1}(O_2)$ مجموعتين مفتوحتين في $(\mathbf{R}, \tau_f)$ و بما أن $x \in U_1$ (لان $f(x) \in O_1$) و $y \in U_2$ فهما لاخاليتين. اذا $U_1 = \mathbf{R} \setminus A_1$ و $U_2 = \mathbf{R} \setminus A_2$ حيث A_1 و A_2 منتهيتين. وبالتالي $U_1 \cap U_2 = \mathbf{R} \setminus (A_1 \cup A_2) \neq \phi$ مناقضا $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(O_1 \cap O_2) = \phi$

س٥: أ) اذا كانت $f, f_n : S \to \mathbf{R}$ عرف معنى "f_n متقاربة الى f تقاربا منتظما على S" ثم اوجد مثالا لمتتابعة $f_n : [0,1\} \to \mathbf{R}$ متقاربة الى دالة $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ و لكن التقارب ليس تقاربا منتظما

ب) اوجد دوال قابلة للتكامل $f_n : [0,1\} \to \mathbf{R}$ متقاربة الى دالة قابلة للتكامل $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ و لكن $\int_0^1 f \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$

أ) f_n متقاربة الى f تقاربا منتظما على S يعني أنه لكل $\varepsilon > 0$ توجد N بحيث

$$\forall x \in S[|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon] \Leftarrow n \geq N$$

اجعل $f_n(x) = \chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ أي $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,\frac{1}{n}] \\ 0 & x \notin (0,\frac{1}{n}] \end{cases}$

لاحظ أن $f_n(x) \to 0$ لكل $x \in [0,1]$ (اذا $x = 0$ فان $f_n(x) = 0$ لكل n و بالتالي $f_n(x) \to 0$ و اذا $0 < x$ فستوجد N بحيث $\frac{1}{N} < \varepsilon$ فاذا $n \geq N$ فان $x > \frac{1}{N} \geq \frac{1}{n}$ أي $x \notin (0,\frac{1}{n}]$ و $f_n(x) = 0$ و بما أن $f_n(x) = 0$ لكل $n \geq N$ فان $f_n(x) \to 0$) لكن التقارب ليس منتظم فلا توجد N بحيث $\forall x \in [0,1](|f_n(x) - 0| < 1) \Leftarrow n \geq N$ لانه اذا $x \in (0,\frac{1}{n}]$ مثلا $x = \frac{1}{n}$ فان $|f_n(x) - 0| = 1$

ب) اجعل $f_n(x)=n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ أي $f_n(x)=\begin{cases} n & x\in(0,\frac{1}{n}] \\ 0 & x\notin(0,\frac{1}{n}]\end{cases}$ نجد كما في أ) أن $f_n(x)\to 0$ لكل $x\in[0,1]$ و لكن $\int_0^1 f_n(x)=\int_0^{\frac{1}{n}} n=1$ بينما $\int_0^1 0=0$

س٦: أ) أثبت بالاستقراء أو الاستقراء القوي أن

١) اذا كان $a_{n+1}=2a_n-a_n^{\,2}$ لكل $n\ge 0$ فان $a_n=1-(1-a_0)^{2^n}$

٢) اذا كان $F_0=F_1=1$ و $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ لكل $n\ge 1$ فان

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right) \text{ لكل } n\ge 0$$

ب) اذا كانت $f:A\to B, g:B\to C$ دالتان فحدد لكل من الاخبار التالية اذا كان الخبر يتبع من كون التحصيل $g\circ f$ تناظر احادي. اذا كان يتبع أثبت ذلك و اوجد مثالا مضادا اذا كان لايتبع

١) f واحد لواحد ٢) f شاملة ٣) g واحد لواحد ٢) g شاملة

الحل:أ) ١) بالاستقراء العادي

اذا $n=0$ فان $1-(1-a_0)^{2^n}=1-(1-a_0)=a_0$ فالخبر صحيح عند $n=0$

لفرض صحة الخبر عند n أي أن $a_n=1-(1-a_0)^{2^n}$ فنجد

$$a_{n+1}=2a_n-a_n^{\,2}=2(1-(1-a_0)^{2^n})-(1-(1-a_0)^{2^n})^2=$$
$$2-2(1-a_0)^{2^n}-(1-2(1-a_0)^{2^n}+((1-a_0)^{2^n})^2)=1-((1-a_0)^{2^n})^2=1-(1-a_0)^{2^{n+1}}$$

و الخبر صحيح عند $n+1$

٢) بالاستقراء القوي سنفترض صحة الخبر عند k لكل $k<n$ و نثبت صحته عند n.

اذا $n=0$ فان

$$\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt5}\frac{2\sqrt5}{2}=1=F_0$$

اذا $n=1$ فان

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)-\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)=1=F_1$$

اذا $n>1$ و الخبر صحيح لكل $k<n$ فان

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)\right)$$

و لكن $1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$ و كذلك

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}=1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ اذا

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

و العلاقة صحيحة عند n

ب) ١) f واحد لواحد صحيح لان $f(x)=f(y)\Rightarrow g\circ f(x)=g\circ f(y)$ و حيث $g\circ f$ واحد لواحد فان $g\circ f(x)=g\circ f(y)\Rightarrow x=y$ اذا $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

٢) f شاملة لايتبع. مثال: اجعل $A=C=\{1,2\}$ و $B=\{1,2,3\}$ و $f:A\to B$ هي الدالة $f(i)=i$ لكل $i\in A$ و اجعل $g:B\to C$ هي الدالة $g(i)=\begin{cases} i & i\in\{1,2\} \\ 2 & i=3 \end{cases}$ لدينا $g\circ f(i)=i$ لكل $i\in A=C$ هي دالة الوحدة و بالتالي تناظر احادي بينما f ليست شاملة

٣) g شاملة صحيح فاذا $c\in C$ فمن الفرض سيوجد $a\in A$ بحيث $c=g\circ f(a)$ اذا $c=g(b)$ حيث $b=f(a)\in B$ و g شاملة

٤) g واحد لواحد لايتبع. فباستخدام نفس المثال في ٢) لدينا $g\circ f$ هي دالة الوحدة (تناظر احادي) و لكن g ليس واحد لواحد لان $g(3)=g(2)=2$

س٧: اذا كانت G زمرة بها عنصر وحيد x من الرتبة 2 أي عنصر وحيد يحقق $x^2=e$ و $x\neq e$ فأثبت أن $xy=yx$ لكل $y\in G$ وأن G يحتوي زمرة جزئية طبيعية بها عنصران.

ب) أثبت أن المتتابعة $2,10,18,26,34,42,\cdots$ لاتحتوي على أس اعلى من واحد لعدد صحيح أي لاتحتوي عددا له الشكل x^n حيث $x,n\in\mathbf{Z}$ و $n>1$

أ) لنفرض أن $e\neq y\in G$ نجد $(y^{-1}xy)^2=y^{-1}xy\,y^{-1}xy=y^{-1}x^2y=e$ و $y^{-1}xy\neq e$ (لان $y^{-1}xy=e \Leftarrow e=yey^{-1}=y\,y^{-1}xy\,y^{-1}=x$ مناقضا الفرض) و بما أن x هو العنصر الوحيد الذي يحقق $x^2=e$ و $x\neq e$ فان $y^{-1}xy=x$ و بالضرب في y من اليسار $xy=yx$.

المجموعة $H=\{e,x\}$ مغلقة تحت الضرب ($ee=e, ex=xe=x, xx==e$) و اخذ المعكوس $e^{-1}=e, x^{-1}=x$ و اذا $y\in G$ فحيث $y^{-1}ey=e, y^{-1}xy=x$ فان $y^{-1}Hy=H$ و H زمرة جزئية طبيعية

ب) المتتابعة هي $x_k = 2+8k, \quad k = 0,1,\cdots$ هذه تتكون من اعداد زوجية (جمع زوجيين) و $x_k \equiv 2+8k(\bmod 4) \equiv 2 \bmod 4$. اذا x عدد صحيح فردي فلكل $n>0$ سيكون x^n فردي و بالتالي x^n لن ينتمي الى المتتابعة. اذا $x=2k$ فردي فلكل $n \geq 2$ ستكون $x^n = 2^n k^n \equiv 0 \bmod 4$ (لان 4 تقسم $2^n k^n$) و بالتالي فان x^n لن تظهر في المتتابعة

س٨: اذا كانت $R = \mathbf{Z}[x]$ حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة فاثبت أن

أ) $S = \{f(x) \in \mathbf{Z}[x] : f(0) = f(1)\}$ حلقة جزئية من R و لكنها ليست مثالي

ب) $I = \{f(x) \in \mathbf{Z}[x] : f(0) = f(1) = 0\}$ مثالي غير أولي في R و أن R/I ايسومورفية مع $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

جـ أثبت أن I مثالي أولي في S وأن S/I ايسومورفية مع $\mathbf{Z}$

أ) لنثبت أن S حلقة جزئية يكفي أن نثبت أنها مغلقة تحت الطرح و الضرب. اذا $f,g \in S$ فان $f(0)=f(1)$ و $g(0)=g(1)$ اذا $(f-g)(0)=(f-g)(1)$ و $(fg)(0)=(fg)(1)$. اذا $f-g \in S$ و $(fg) \in S$. لنثبت أنها ليست مثالي يكفي ألتحقق من انها ليست مغلقة تحت الضرب بعنصر من R أي ايجاد $f \in S, g \in R$ بحيث $fg \notin S$ اختر $f=1 \in S$ و $g(x) = x \in R$ تجد $fg(x) = x \notin S$ (لان $fg(0) \neq fg(1)$)

ب) عرف $\phi : R \to \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ بالمعادلة $\phi(f) = (f(0), f(1))$. ϕ هومومورفزم لان

$$\phi(f+g) = (f+g(0), f+g(1)) = (f(0), f(1)) + (g(0), g(1)) = \phi(f) + \phi(g)$$

$$\phi(f\,g) = (f\,g(0), f\,g(1)) = (f(0), f(1))\cdot(g(0), g(1)) = \phi(f)\cdot\phi(g)$$

و حيث $\ker(\phi) = \{f \in R : \phi(f) = (0,0)\} = I$ فان I مثالي و R/I ايسومورفية مع $\phi(R)$ و لكن ϕ شاملة فاذا $(a,b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ فان $f(x) = a(1-x) + bx \in R$ تحقق $f(0) = a, f(1) = b$ أي $\phi(f) = (a,b)$ اذا R/I ايسومورفية مع $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ و بما أن هذا ليس نطاقا صحيحا (مثلا $(1,0)(0,1) = (0,0)$ فان I ليس أولي

جـــ) عرف $\psi : S \to \mathbf{Z}$ باخذ $\psi(f) = f(0)$ هذا هومومورفزم لان

$\psi(f+g) = f+g(0) = f(0) + g(0) = \psi(f) + \psi(g)$ و

$\psi(f\,g) = f\,g(0) = f(0)\,g(0) = \psi(f)\psi(g)$ وحيث ψ شاملة لان $\psi(a) = a$ لكل $a \in \mathbf{Z}$ اذا $\ker(\psi) = \{f \in S : f(0) = 0\} = I$ فان I مثالي في S و S/I ايسومورفي مع $\mathbf{Z}$ اذا S/I نطاق صحيح و I مثالي أولي في S

الاختبار الثالث

س۱: إذا كانت $C \subseteq \mathbf{R}^n$ مجموعة متراصة (compact) و $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دالة متصلة و جعلنا $g:C\to\mathbf{R}$ الدالة المعرفة كالتالي: $g(\vec{c})=\dfrac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n}$ لكل $\vec{c}=(c_1,\cdots,c_n)\in C$ فاثبت أنه ستوجد $\vec{c}_0\in\mathbf{R}^n$ بحيث $g(\vec{c}_0)\geq g(\vec{c})$ لكل $\vec{c}\in C$

الحل: الدالة $\pi_i(\vec{c})=c_i$ متصلة و بالتالي فان $\vec{c}\to f(c_i)=f\circ\pi_i(\vec{c})$ متصلة على C (تحصيل مصلتين) . اذا $g(\vec{c})=\dfrac{f(c_1)+\cdots+f(c_n)}{n}$ متصلة على C (مجموع متصلات مضروب في ثابت). اذا $f(C)\subset\mathbf{R}$ متراصة و بالتالي فهي مغلقة و محدودة. اذا $f(C)$ لها اقل حد أعلى (محدودة و لاخالية) و $\sup f(C)\in f(C)$ (لان $f(C)$ مغلقة) اذا يوجد $\vec{c}_0\in C$ بحيث $f(\vec{c}_0)=\sup f(C)$ أي $f(\vec{c})\leq f(\vec{c}_0)$

س۲: اذا جعلنا $\tau=\{(a,\infty):a\in\mathbf{R}\}\bigcup\{\phi,\mathbf{R}\}$ فان τ تحدد توبولوجيا على $\mathbf{R}$ لتكن $f:(\mathbf{R},\tau)\to(\mathbf{R},\tau)$ دالة فاثبت أنه اذا f متصلة فانها دالة متزايدة (أي $x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$) ثم أوجد مثالا لدالة متزايدة و ليست متصلة كدالة من $(\mathbf{R},\tau)$ الى $(\mathbf{R},\tau)$

الحل: f متصلة اف $f^{-1}(O)\in\tau$ مفتوحة لكل $O\in\tau$ و بما أن $f^{-1}(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ و $f^{-1}(\phi)=\phi$ لاي دالة f فان f متصلة اف $f^{-1}(a,\infty)\in\tau$ لكل $a\in\mathbf{R}$.

اذا $f^{-1}(a,\infty)\in\tau$ لكل $a\in\mathbf{R}$ و كانت $b=f(x)>f(y)=a$ فان $x\in f^{-1}(a,\infty)$ و $y\notin f^{-1}(a,\infty)$ و بما أن $f^{-1}(a,\infty)\in\tau$ و $y\notin f^{-1}(a,\infty)\neq\mathbf{R}$ و $x\in f^{-1}(a,\infty)\neq\phi$ فستوجد $c\in\mathbf{R}$ بحيث $f^{-1}(a,\infty)=(c,\infty)$ اذا $y\leq c<x$. أي $f(y)<f(x)\Rightarrow y<x$ أو (المكافئ) $x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$ و f متزايدة

الدالة $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$ دالة متزايدة (اذا $x<y$ و $y>0$ فهناك ثلاث امكانيات اذا $x>0$

فان $f(x)=x+1<y+1=f(y)$ و اذا $x=0$ فان $f(x)=0<1<y+1=f(y)$ و اذا $x<0$

فان $f(x)=x-1<x<y<y+1=f(y)$ اذا $x<y$ و $y=0$ فان

$f(x)=x-1<-1<0=f(y)$ و اذا $x<y$ و $y<0$ فان $f(x)=x-1<y-1=f(y)$) و

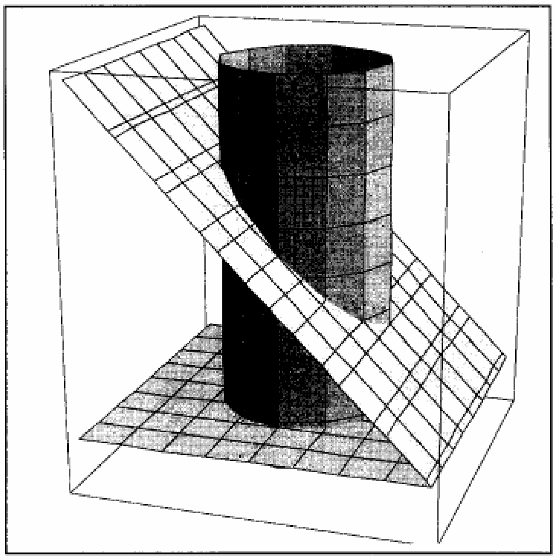
لكن $f^{-1}(-1/2,\infty)=[0,\infty)\notin\tau$ (لان $x>0\Rightarrow f(x)=x+1>1>-1/2$ و

$x=0\Rightarrow f(x)=0>-1/2$ و $x<0\Rightarrow f(x)=x-1<-1<-1/2$) اذا f ليست متصلة

(معكوس صورة المجموعة المفتوحة $(-1/2,\infty)$ ليست مفتوحة)

س٣: أ) اوجد حجم الجسم المحدود بالاسطوانة $x^2+y^2=1$ و المستوي $z=0$ و المستوي $x+z=2$

ب) اذا كان S هو سطح الجسم المعطى في أ) و $\vec{F}=(x,-y,3)$ فانه يمكننا معرفة قيمة التكامل السطحي $\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,da$ بدون اجراء تكامل. اشرح كيف يمكن هذا و ما القيمة التي نحصل عليها



الحل: أ) ألتكامل هو $\int\limits_{x=-1}^{x=1}\int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=-\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{z=0}^{z=2-x} dz\,dy\,dx$ أي

$2\int\limits_{-1}^{1}(2-x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ نحسب هذه التكامل كالتالي

بتعويض $x=\sin\theta$ نجد أن $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$ و

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos\theta\,d(\sin\theta)=\int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}$$

$$=\frac{\sin^{-1}(x)}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

بينما باخذ $u=1-x^2$ نجد أن $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int u^{1/2}(\frac{du}{2})=\frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2}=\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$ اذا

$$2\int_{-1}^{1}(2-x)\sqrt{1-x^2}\,dx=4\left.\frac{\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right|_{x=-1}^{x=1}=4\left(\frac{\sin^{-1}1}{2}-\frac{\sin^{-1}-1}{2}\right)=4\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$$

ب) من نظرية التباعد اذا V هو الجسم المعطى في أ) فان

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,da=\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}dx\,dy\,dz=\iiint_V\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}+\frac{\partial(-y)}{\partial y}+\frac{\partial(3)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=0$$

س٤: أ) تحقق من أن $G=\{\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}:a,b,c\in\mathbf{Q}\}$ زمرة تحت عملية ضرب المصفوفات ثم

أوجد الزمرة الجزئية $Z(G)=\{g\in G:gh=hg\,\forall h\in G\}$ و تحقق من أن $Z(G)$ ايسومورفية مع

$(\mathbf{Q},+)$

ب) اذا كانت G زمرة و H,K زمرتين جزئيتين من G و $HK=\{hk:h\in H,k\in K\}$ فاثبت

أن HK زمرة جزئية من G اذا و اذا فقط $HK=KH$

الحل: هذه المجموعة مغلقة تحت ضرب المصفوفات لان

$$\begin{bmatrix}1&a_1&b_1\\0&1&c_1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a_2&b_2\\0&1&c_2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a_2+a_1&b_1+b_2+a_1c_2\\0&1&c_1+c_2\\0&0&1\end{bmatrix}\in G$$

هذه العملية تجميعية (لان ضرب المصفوفات عملية تجميعية) و G بها محايد هو $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

فيبقى التحقق من أنه لكل عنصر في G معكوس و لكن

$$\begin{bmatrix}1&a_1&b_1\\0&1&c_1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a_2&b_2\\0&1&c_2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a_2+a_1&b_1+b_2+a_1c_2\\0&1&c_1+c_2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

اذا $a_2=-a_1$ و $c_2=-c_1$ و $b_2=a_1c_1-b_1$ بالتعوض نجد أن هذه القيم ل a_2,b_2,c_2 تحقق

$$\begin{bmatrix}1&a_1&b_1\\0&1&c_1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a_2&b_2\\0&1&c_2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a_2&b_2\\0&1&c_2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a_1&b_1\\0&1&c_1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

. اذا

$g=\begin{bmatrix}1&a_1&b_1\\0&1&c_1\\0&0&1\end{bmatrix}$ فان $gh=hg$ لكل $h=\begin{bmatrix}1&a_2&b_2\\0&1&c_2\\0&0&1\end{bmatrix}\in G$ اذا

$b_1+b_2+a_1c_2=b_2+b_1+a_2c_1$ لكل $a_2,c_2,b_2\in Q$ أاف $a_1c_2=a_2c_1$ لكل $a_2,c_2\in\mathbf{Q}$

هذا يعطينا $a_1=0$ (باخذ $c_2=1,a_2=0$) و $c_1=0$ (باخذ $a_2=1,c_2=0$) طبعا اذا

$a_1=c_1=0$ فان $a_1c_2=a_2c_1$ لكل $a_2,c_2\in\mathbf{Q}$ اذا $g\in Z(G)$ اذا $a_1=c_1=0$ و

$$Z(G)=\{\begin{bmatrix}1&0&b\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}:b\in\mathbf{Q}\}$$

ب) اذا $HK=KH$ فلكل $h_1k_1,h_2k_2\in HK$ ستوجد $h_3k_3\in HK$ بحيث $k_1h_2=h_3k_3$ اذا $h_1k_1h_2k_2=(h_1h_3)(k_3k_2)\in HK$ و HK مغلقة تحت العملية. ايضا اذا $hk\in HK$ فان $(hk)^{-1}=k^{-1}h^{-1}\in KH=HK$ و HK مغلقة تحت أخذ المعكوس. اذا فهي زمرة جزئية.

اذا كانت HK زمرة جزئية فلكل $h\in H,k\in K$ ستكون $h^{-1}k^{-1}\in HK$ و بالتالي $k\,h=(h^{-1}k^{-1})^{-1}\in HK$ اي $KH\subseteq HK$ ايضا اذا $hk\in HK$ فان $k^{-1}h^{-1}\in KH\subseteq HK$ اذا ستوجد $h_1k_1\in HK$ بحيث $k^{-1}h^{-1}=h_1k_1$ اذا $hk=(k^{-1}h^{-1})^{-1}=k_1^{-1}h_1^{-1}\in KH$ و $HK\subseteq KH$

س٥: حدد لكل من متسلسلات الدوال التالية اذا ما كانت المتسلسلة

١) متقاربة تقاربا منتظما على الفترة $[0,1]$

٢) متقاربة عند كل نقطة في $[0,1]$ و لكن التقارب ليس تقاربا منتظما

٣) ليست متقاربة عند كل نقطة في $[0,1]$

مبررا اجابتك تبريرا كاملا

أ) $\sum \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}$ ب) $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ جـ) $\sum \frac{2^n(x-1/2)^n}{n}$

أ) متقاربة تقاربا منتظما على $[0,1]$ باختبار وايستراس M حيث $M_n = \frac{1}{n^2}$

ب) ليست متقاربة عند كل نقطة في $[0,1]$ لانه عند $x=1$ $\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}$ والحد النوني لايتقارب الى 0 اذا فهي متباعدة عندما $x=1$

جـ) هذه ليست متقاربة عند كل نقطة لانه عندما $x=1$ لأن $\frac{2^n(x-1/2)^n}{n} = \frac{1}{n}$ و المتسلسة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة

س٦: أ) لتكن $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دالة قابلة للتفاضل عند 0 و تحقق $f(0)=0$ فاثبت أن الدالة $g(x)=|f(x)|$ قابلة للتفاضل عند 0 اذا و فقط اذا كانت $f'(0)=0$

ب) لنفرض أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متزايدة و محدودة من الاعداد الحقيقية فاثبت أن المتسلسلة $\sum |a_n - a_{n+1}|$ متقاربة

أ) اذا كانت $g(x)=|f(x)|$ قابلة للتفاضل عند $x=0$ و $a=g'(0)$ فان

$$a = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$ و

$$a = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-f(x)-(-f(0))}{x-0} = -f'(0)$$ اذا $f'(0)=-f'(0)$ و $f'(0)=0$

اذا $f'(0)=0$ فان $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ و

$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ و بالتالي $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ و g قابلة للتفاضل عند 0

ب) المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum|a_n - a_{n+1}|$ هي $s_n = \sum_{k=1}^{n}|a_k - a_{k+1}|$.بما أن المتتابعة متزايدة فان $|a_k - a_{k+1}| = a_{k+1} - a_k$ اذا $s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ و المتسلسلة متقاربة ااف المجاميع الجزئية $s_n = a_{n+1} - a_1$ متقاربة و بما أن هذه متتابعة متزايدة فهي متقاربة ااف كانت محددود ااف كانت $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ محدودة

س٧:أ) اجعل $\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ و $S = \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ و عرف العلاقة $\approx$ على S كما يلي

$(a,b)\approx(c,d)$ ااف $a+d=b+c$ $(a,b)\approx(c,d)$

١) أثبت أن $\approx$ علاقة تكافؤ

٢) لكل من المعادلات التالية حدد اذا ما كانت المعادلة تعرف دالة على $S/\approx$ أم لا. اذا كانت تعرف دالة فاثبت ذلك و اذا لم تعرف دالة فاوجد مثالا يثبت انها لاتعرف دالة (حيث $[(a,b)]$ هو صف التكافؤ للعنصر (a,b)) :

أ) $f([(a,b)]) = a+b$ ب) $f([(a,b)]) = [(b,a)]$

ب) اجعل $T_n(x)$ كثيرة الحدود المعرفة بالعلاقة $T_0(x)=1$ و $T_1(x)=x$ و $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ اذا كانت $n\geq 2$ فاثبت أن $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ (اقتراح: استخدم العلاقة $\cos(\alpha) = 2\cos\beta\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-2\beta)$)

الحل:

أ) (انعكاسية) $(a,b)\approx(a,b)$ لان $a+b=b+a$

(متناظرة) لانه اذا $(a,b)\approx(c,d)$ فان $a+d=c+b$ أي $c+b=a+d$ و $(c,d)\approx(a,b)$

(متعدية) لانه اذا $(a,b)\approx(c,d)$ و $(c,d)\approx(e,f)$ فان $a+d=c+b$ و $c+f=e+d$ اذا $d+a+f=b+c+f=b+e+d$ و بطرح d من الجهتين $a+f=e+b$ و $(a,b)\approx(e,f)$

٢)أ) $f([(a,b)]) = a+b$ لاتعرف دالة مثلا $(1,1)\approx(2,2)$ و بالتالي $[(1,1)]=[(2,2)]$ و لكن $1+1\neq 2+2$

ب) $f([(a,b)]=[(b,a)]$ تحدد دالة. لنرى ذلك نحتاج أن نثبت أنه اذا $[(a,b)]=[(c,d)]$ فان $[(b,a)]=[(d,c)]$ و لكن اذا $[(a,b)]=[(c,d)]$ فان $(a,b)\approx(c,d)$ و $a+d=c+b$ اذا $b+c=d+a$ و $[(b,a)]=[(d,c)]$

ب) عندما $n=0$ فان $T_n(\cos\theta)=T_0(\cos\theta)=1=\cos(0\theta)=\cos n\theta$ و عندما $n=1$

$$T_n(\cos\theta)=T_1(\cos\theta)=\cos\theta=\cos(1\theta)=\cos n\theta$$

لنفرض أن $n\geq 2$ و أن العلاقة صحيحة لكل $k<n$ نلاحظ أنه حيث

$\cos(n\theta)=\cos((n-1)\theta+\theta)=\cos(n-1)\theta\cos\theta-\sin(n-1)\theta\sin\theta$ و

$\cos((n-2)\theta)=\cos((n-1)\theta-\theta)=\cos(n-1)\theta\cos\theta+\sin(n-1)\theta\sin\theta$ فان (بالجمع)

$\cos(n\theta)+\cos(n-2)\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta$ و بالتالي

$$\cos(n\theta)=2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta=2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta)-T_{n-2}(\cos\theta)=T_n(\cos\theta)$$

__س٨:__ اعطيت أن $R=\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix}:a,b,c\in\mathbf{Q}\}$ حلقة تحت جمع و ضرب المصفوفات فاثبت أن

أ) $I_1=\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0\end{bmatrix}:b\in\mathbf{Q}\}$ مثالي ليس اوليا و R/I_1 ايسومورفي مع $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$

ب) $S=\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{bmatrix}:a,b\in\mathbf{Q}\}$ حلقة جزئية و لكنها ليست مثاليا

الحل:أ). لنرى أن I_1 و R/I_1 ايسومورفية مع $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ عرف $f(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix})=(a,c)$ لاحظ أن

هذا هومومورفزم لان

$$f(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2\end{bmatrix})=f(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2\end{bmatrix})=(a_1+a_2,c_1+c_2)$$

$$=(a_1,c_1)+(a_2,c_2)=f(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{bmatrix})+f(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2\end{bmatrix})$$

و

$$f(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2\end{bmatrix})=f(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2\end{bmatrix})=(a_1a_2,c_1c_2)$$

$$=(a_1,c_1)\cdot(a_2,c_2)=f(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{bmatrix})\cdot f(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2\end{bmatrix})$$

و $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix}\in\ker(f)$ ااف $f(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix})=(a,c)=(0,0)$ اااف $a=c=0$ اااف

اذا $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0\end{bmatrix}\in I_1$ $\ker(f)=I_1$ و $R/I_1=R/\ker(f)\cong\mathrm{Im}(f)=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$

ملاحظه: تستطيع أثبات أن I_1 مثالي مباشرة باثبات انها مغلقة تحت الطرح و الضرب في عنصر من R و لكن $\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I_1$ و

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ab_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I_1$ و $\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cb_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I_1$ اذا I_1 مثالي

ب) $S = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{Q}\}$ حلقة جزئية لانها مغلقة تحت الطرح و الضرب لان

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & b_1 - b_2 \end{bmatrix} \in S \quad \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 \end{bmatrix} \in S$$

و S ليس مثالي لان $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}$ و هذه لن تنتمي الى S اذا $b_1 c_2 \neq 0$ مثلا $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin S$ مع أن $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R,$

الاختبار الرابع

س١: أ) أثبت أن المعادلة $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ تحدد تناظرا أحاديا (أي دالة واحد لواحد و شاملة) من $\mathbb{R}$ إلى الفترة المفتوحة $(-1,1)$

الحل: نلاحظ أن قيم f تقع في $(-1,1)$ لأن $1>\frac{|x|}{1+|x|}=|f(x)|$ يعطينا أن $f(x)\in(-1,1)$ فيكفي إيجاد معكوس $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ لنعمل ذلك نحل $y=\frac{x}{1+|x|}$ $(*)$ لنحل هذا نلاحظ أن المعادلة تعطينا أن $|y|=\frac{|x|}{1+|x|}$ ومنه أن $|y|(1+|x|)=|x|$ أي $|x|=\frac{|y|}{1-|y|}$ بما أن $(*)$ تعطينا أن x,y لهما نفس الإشارة فإن $x=\frac{y}{1-|y|}$ سنأخذ $g(y)=\frac{y}{1-|y|}$ هذه حسنة التعريف على $(-1,1)$ و بحساب التحصيل نجد أنه

$$f(g(x))=\frac{|g(x)|}{1+|g(x)|}=\frac{x/(1-|x|)}{1+|x/(1-|x|)|}=\frac{x/(1-|x|)}{((1-|x|)+|x|)/(1-|x|)}=x \quad (1) \text{ لكل } x\in(-1,1)$$

و أن

$$g(f(x))=\frac{|f(x)|}{1-|f(x)|}=\frac{x/(1+|x|)}{1-|x/(1+|x|)|}=\frac{x/(1+|x|)}{((1+|x|)-|x|)/(1+|x|)}=x \quad (2) \text{ لكل } x\in\mathbb{R}$$

و $(1),(2)$ يعطينا أن g هي معكوس f و بالتالي فإن f تناظر أحادي

ب) أثبت أن $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\le 2\sqrt{n}$ لكل $n\ge 1$

الحل: بالاستقراء على n. عندما $n=1$ الطرف الأيسر هو 1 و الأيمن هو $2\sqrt{1}=2$ فالمتباينة متحققة.

لنفرض أن $n\ge 1$ و أن $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\le 2\sqrt{n}$ فنجد أن

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$ و حيث

$$2\sqrt{n+1}=2\sqrt{n}+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=2\sqrt{n}+2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>2\sqrt{n}+2\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

فإننا نجد أن $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 2\sqrt{n+1}$ و الخبر صحيح عند $n+1$ فمن الاستقراء الخبر صحيح عند كل $n\ge 1$

جـــ) إذا كانت $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية تحقق $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^2 x_n$ لكل $n \geq 1$
أثبت أن سيوجد عدد حقيقي A بحيث $x_n = \dfrac{A}{n(n+1)}$ (اقتراح: أوجد معادلة تحدد قيمة $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$)

الحل: لنفرض أن $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^2 x_n$ و لنجعل $A = 2x_1$ سنثبت بالاستقراء القوي أن $x_n = \dfrac{A}{n(n+1)}$ لكل $n \geq 1$. لنفرض أن $x_m = \dfrac{A}{m(m+1)}$ لكل $1 \leq m < n$

إذا $n = 1$ فإن $x_n = x_1 = \dfrac{A}{2} = \dfrac{A}{1*(1+1)}$ من اختيارنا للثابت A

إذا $n > 1$ فنجد من $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^2 x_n$ أن $(n^2 - 1)x_n = x_1 + \cdots + x_{n-1}$ و حيث من فرض الاستقراء لدينا أن $x_i = \dfrac{A}{i(i+1)}$ لكل $1 \leq i < n$ فإن

$$x_n = \frac{1}{n^2 - 1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A}{k(k+1)} = \frac{A}{n^2 - 1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{A}{n^2 - 1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{A}{n^2 - 1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right) = \frac{A}{n^2 - 1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{A}{(n-1)(n+1)}\frac{n-1}{n} = \frac{A}{n(n+1)}$$

و الخبر صحيح عند n إذاً $x_n = \dfrac{A}{n(n+1)}$ لكل $n \geq 1$

س٢: إذا كانت $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة و تحقق $f(0)=f(1)$ فأثبت أنه توجد $c\in[0,1/2]$ بحيث $f(c)=f(c+1/2)$ استنتج أنه على خط الاستواء من الكرة الأرضية في كل لحظة زمنية ستوجد نقطتان متناظرتان قطريا (أي على نفس القطر) عندهما نفس درجة الحرارة

الحل: اجعل $g:[0,1/2]\to\mathbb{R}$ الدالة $g(x)=f(x)-f(x+1/2)$ نجد أن g دالة متصلة و $g(0)=f(0)-f(1/2)$ و $g(1/2)=f(1/2)-f(1)=f(1/2)-f(0)=-g(0)$

إذاً 0 تقع بين $g(0)$ و $g(1/2)$ و بالتالي من نظرية القيمة الوسطية ستوجد $c\in[0,1/2]$ بحيث $g(c)=0$ و من تعريف g فهذا يعطينا أن $f(c)=f(c+1/2)$.

إذا جعلنا $t(\theta)$ تمثل الحرارة عند النقطة على الاستواء على الزاوية θ حيث $0\le\theta\le2\pi$ و أخذنا $f(x)=t(2\pi x)$ فإن $f(0)=f(1)$ و f متصلة و بالتالي من أعلاه ستوجد c بحيث $f(c)=f(c+1/2)$ إذا $t(\psi)=t(\psi+\pi)$ حيث $\psi=\pi c$ إذا النقطة عند الزاوية ψ و النقطة المناظرة قطريا لهما نفس درجة الحرارة

س٣: أ) أوجد مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث باقي قسمة $7x$ على 13 هو 5

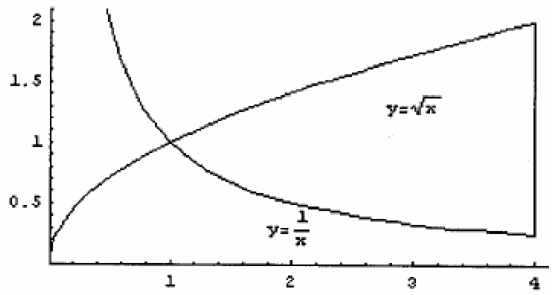
الحل: المطلوب هو حل $7x\equiv5\bmod13$ سنبدأ بايجاد المعكوس الضربي ل 7 في $\mathbb{Z}_{13}$ لنعمل ذلك نكتب $1=a7+b13$ (هذا ممكن من خوارزمية اقليدس لأن القاسم المشترك الاعظم لهما 1) لنعمل ذللك نكرر القسمة $13=1*7+6$ (1) و $7=1*6+1$ و بالتالي فإن $1=7-1*6=7-(13-7)=2*17-13$ إذا معكوس 7 في $\mathbb{Z}_{13}$ هو 2 و $7x\equiv5\bmod13$ إإف كانت $x\equiv10\bmod13$ فالقيم الصحيحة المطلوبة هي $\{10+13k:k\in\mathbb{Z}\}$

ب) إذا كانت G زمرة بها 9 عناصر و G ليست ايسومورفية مع $\mathbb{Z}_9$ فأثبت أن $x^3=e$ لكل $x\in G$

الحل: رتبة العنصر في G تقسم رتبة الزمرة أي 9 فستكون 1 أو 3 أو 9 .بما أن G ليست ايسومورفية مع $\mathbb{Z}_9$ فلن يوجد في G عنصر رتبته 9 (أيّ عنصر رتبتها 9 سيولد زمرة جزئية ايسومورفية مع $\mathbb{Z}_9$ هذه سيون بها 9 عناصر و بالتالي فهي G مناقضا الفرض) إذا لكل $x\in G$ $x^3=e$

س٤: أ) ارسم المجموعة $A=\{(x,y):0\le x\le 4,\frac{1}{x}\le y\le\sqrt{x}\}$

الحل: انظر الشكل



ب) ما هو حجم الجسم الناتج عن تدوير المجموعة A (من أ) حول الخط $x=4$

الحل: مقطع الجسم تحت $y=1$ يتكون من دائرة نصف قطرها $4-x=4-\frac{1}{y}$ فحجم هذا الجزء هو

$$\int_{y=1/4}^{y=1}\pi(4-\frac{1}{y})^2dy=\pi\int_{y=1/4}^{y=1}(16-\frac{8}{y}+\frac{1}{y^2})dy=\pi\left.16y-8\ln(y)-\frac{1}{y}\right|_{1/4}^{1}=\pi(15-8\ln(4))$$

مقطع الجسم فوق $y=1$ يتكون من دائرة نصف قطرها $4-x=4-y^2$ فحجمه هو

$$\int_{y=1}^{y=2}\pi(4-y^2)^2dy=\pi\int_{y=1}^{y=2}(16-8y^2+y^4)dy=\pi\left.16y-\frac{8y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right|_{1}^{3}=\pi\frac{53}{15}$$

إذا الحجم الكلي هو $\pi(\frac{278}{15}-8\ln(4))$

س٥: أ) تحقق أن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(k+1)}{2^k}$ متقاربة و باستخدام ذلك أثبت أن

$x_n=\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{n+1}}}}=2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{4}}4^{\frac{1}{8}}\cdots(n+1)^{\frac{1}{2^n}}$ متقاربة

الحل: هذه متسلسلة موجبة و من اختبار النسبة نجد أنه حيث $\frac{\ln(k+2)/2^{k+2}}{\ln(k+1)/2^{k+1}}=\frac{1}{2}\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}$ و

حيث من قاعدة لوبيتال نجد أن $\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2}=1$ فإن

$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+2)/2^{k+2}}{\ln(k+1)/2^{k+1}}=\frac{1}{2}<1$ و المتسلسلة متقاربة. لنجعل $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(k+1)}{2^k}$ إذا

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k+1)}{2^k}=\alpha$ و من اتصال الدالة الاسية نجد أن

$$e^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k+1)}{2^k}}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{\ln(k+1)}{2^k}}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}e^{\ln((k+1)^{1/2^k})}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(k+1)^{1/2^k}$$ و المتابعة متقاربة

ب) حدد لكل من المتسلسلات و التكاملات التالية إن كانت متقاربة أم متباعدة مبررا اجابتك تبريرا كاملا:

١) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

الحل: لدينا أن $\frac{n}{n^2+1}$ متناقصة فإذا $n_1<n_2$ فإن

$$\frac{n_1}{n_1^2+1}-\frac{n_2}{n_2^2+1}=\frac{n_1(n_2^2+1)-n_2(n_1^2+1)}{(n_1^2+1)(n_2^2+1)}=\frac{(n_2-n_1)(n_1n_2-1)}{(n_1^2+1)(n_2^2+1)}>0$$ (لأن $n_2>n_1\geq 1$) و

لدينا أن $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$ إذا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ متقاربة

٢) $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{t^2-t}dt$

الحل: لدينا أن $\frac{\sqrt{t}}{t^2-t}=\frac{\sqrt{t}}{t(t-1)}=\frac{1}{\sqrt{t}(t-1)}$ عند $t=1$ و $t=0$ المقام يؤول إلى $\pm\infty$ ليكون التكامل متقاربا نحتاج إلى تقارب $\int_{\varepsilon}^{1-\delta}\frac{\sqrt{t}}{t^2-t}dt$ و $\int_{1+\mu}^{A}\frac{\sqrt{t}}{t^2-t}dt$ عندما $\varepsilon\to 0^+$ و $\delta\to 0^+$ و عندما $\mu\to 0^+$ و $A\to\infty$. على $(1/2,1)$ لدينا أن $\sqrt{t}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$ و حيث $t^2-t<0$ على $(0,1)$ فإن فإن $\frac{\sqrt{t}}{t^2-t}<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{t^2-t}$ على $(1/2,1)$ و بالتالي فإن

$$\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{\sqrt{t}}{t^2-t}\leq\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{1}{t^2-t}=\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}=\Big|_{1/2}^{1-\delta}\ln\left(\left|\frac{t-1}{t}\right|\right)=\ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\to-\infty$$

إذا التكامل المعتل متباعد

٣) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(5+\sin(n))n}{7n+\cos(n)}\right)^n$

بإختبار الجذر بما أن $\left(\frac{(5+\sin(n))n}{7n+\cos(n)}\right)^n > 0$ و $\sqrt[n]{\left(\frac{(5+\sin(n))n}{7n+\cos(n)}\right)^n} = \frac{(5+\sin(n))n}{7n+\cos(n)} \to \frac{5}{7} < 1$

فالمتسلسلة متقاربة

س٦: أ) إذا كانت $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق و تحقق $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$

أ) اثبت أنه ستوجد $A\ge 0$ بحيث f منتظمة الاتصال على $[A,\infty)$ و استنتج أن f منتظمة الاتصال على $[0,\infty)$

بما أن $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ فسيوجد A بحيث $|f'(x)-0|<1$ لكل $x\ge A$ إذا $x,y\in[A,\infty)$ فإنه من نظرية القيمة المتوسطة نجد أن ستوجد c بين x و y بحيث $|f(x)-f(y)|=|f'(c)(x-y)|$ و حيث $c\ge A$ فإننا نجد أن $|f'(c)|\le 1$ و $|f(x)-f(y)|=|f'(c)(x-y)|\le|x-y|$ فلكل $\varepsilon>0$ إذا اخذنا $\delta=\varepsilon>0$ فإنه لكل $x,y\in[A,\infty)$ إذا $|x-y|<\delta$ فإن $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ هذا يعطينا أن f منظمة الاتصال على $[A,\infty)$. بما أن f منتظمة الاتصال على $[0,A]$ (لأن كل دالة متصلة على مجموعة متراصة منتظمة الاتصال) و منتظمة الاتصال على $[A,\infty)$ فهي منتظمة التصال على $[A,\infty)$ (الإثبات: إذا $\varepsilon>0$ معطى فسيوجد $\delta_1,\delta_2>0$ بحيث

١) $x,y\in[0,A]$ و $|x-y|<\delta_1 \Leftarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$ و

٢) $x,y\in[A,\infty)$ و $|x-y|<\delta_2 \Leftarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$

لنجعل $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$ إذا $x,y\in[0,\infty)$ و $|x-y|<\delta$ فإنه إذا $x,y\in[A,\infty)$ أو $x,y\in[0,A]$ فإن $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$ (من ١ أو ٢) أما إذا كان $x\in[0,A]$ و $y\in[A,\infty)$ أو $y\in[0,A]$ و $x\in[A,\infty)$ فإن

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(A)|+|f(A)-f(y)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2<\varepsilon$$

ب) أثبت أنه لكل $\varepsilon > 0$ ستوجد $A \geq 0$ بحيث $\left|\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}\right| < \varepsilon$ لكل $x > A$ و استنتج أن $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$

الحل: بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ فسيوجد A بحيث $|f'(x)-0| < \varepsilon$ لكل $x \geq A$ إذا من نظرية القيمة المتوسطة نجد أنه لكل $x \in [A,\infty)$ ستوجد $c \in (A,x)$ بحيث $f(x)-f(A) = f'(c)(x-A)$ و بالتالي فإن $\left|\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}\right| = |f'(c)| < \varepsilon$ هذا يعطينا المتباينة المطلوبة.

لنثبت أن $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ اجعل $\varepsilon > 0$ معطى اختر $A > 0$ بحيث $x > A$ يعطينا أن $\left|\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}\right| < \varepsilon/2$ و اختر $L > 0$ بحيث $\left|\dfrac{f(A)}{L}\right| < \varepsilon/2$ فإذا $x > A+L$ فإن $|x-A| \geq L$ و لدينا أن

$$\left|\frac{f(x)}{x-A}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{x-A} - \frac{f(A)}{x-A}\right| + \left|\frac{f(A)}{x-A}\right| \leq \left|\frac{f(x)}{x-A} - \frac{f(A)}{x-A}\right| + \frac{|f(A)|}{L} < \varepsilon$$

إذا $x > A+L$ فإن $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < \left|\dfrac{f(x)}{x-A}\right| < \varepsilon$ و حيث ε إختياري فهذا يعطينا المطلوب

س٧: اجعل $X = \mathbb{R}$ مع التوبولوجي $\tau = \{A : \mathbb{R}\setminus\{A\}\ \textit{is finite}\} \cup \{\varnothing\}$ (أي τ يتكون من مكملات المجموعات المنتهية)

أ) اثبت أنه لأي فضاء توبولوجي Y و لأي دالة $f : Y \to X$ ستكون f متصلة اذا و فقط اذا كانت $f^{-1}(p)$ مغلقة لكل $p \in X$

الحل: لأي $p \in X$ $X\setminus\{p\}$ مفتوحة من تعريف τ و بالتالي $\{p\}$ مغلقة. فإذا كانت f متصلة فإن $f^{-1}(\{p\})$ مغلقة (معكوس صورة مغلقة تحت دالة مغلقة).

إذا كانت $f^{-1}(\{p\})$ مغلقة لكل $p \in X$ فلكل مجموعة منتهية $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ لدينا أن $f^{-1}(\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(\{p_i\})$ مجموعة مغلقة (اتحاد عدد منتهي من المجموعات

المغلقة) و حيث (من تعريف τ) المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية و X و $f^{-1}(X)=Y$ مغلقة فإن هذا يعطينا أن معكوس صورة أي مجموعة مغلقة ستكون مجموعة مغلقة و بالتالي فإن f متصلة

ب) أثبت أن كل مجموعة جزئية من X ستكون متراصة

الحل: المجموعة الخالية دائما متراصة (ألغطاء الخالي غطاء منتهي محتوى في كل غطاء مفتوح) إذا $A\neq\varnothing$ مجموعة و $\mathcal{O}$ غطاء مفتوح اختر $O\in\mathcal{O}$ لا خالية $X\setminus O$ مجموعة منتهية (من تعريف τ) و بالتالي فإن $X\setminus O\cap A$ منتهية إذا هذه خالية فإن $\{O\}$ غطاء جزئي منتهي و إذا $X\setminus O\cap A=\{p_1,\cdots,p_k\}$ لا خالية فلكل i اختر $O_i\in\mathcal{O}$ بحيث $p_i\in O_i$ و $\{O,O_1,\cdots,O_k\}$ غطاء جزئي منتهي

ت) أثبت أن كل مجموعة جزئية لا منتهية من X ستكون مترابطة

الحل: يكفي أن نثبت أنه إذا كانت O_1,O_2 مفتوحتان و كانت $O_1\cap A\neq\varnothing$ و $O_2\cap A\neq\varnothing$ فإن $O_1\cap O_2\cap A\neq\varnothing$ و لكن O_1 مفتوحة و لا خالية و بالتالي فإن $X\setminus O_1$ منتهية و بطريقة مماثلة $X\setminus O_2$ منتهية إذا $X\setminus(O_1\cap O_2)=X\setminus O_1\cup X\setminus O_2$ إذا فهي لا تحتوي A و بالتالي فإن $O_1\cap O_2\cap A\neq\varnothing$ كما هو مطلوب

س٨: إذا كانت $f(x)=x^3+2x^2+2x+2$

أ) أثبت أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[x]$ و أنها قابلة للتحليل في $\mathbb{R}[x]$

الحل : من ايزنشتاين نجد حيث $p=2$ لا يقسم معامل أعلى أس و يقسم بقية المعاملات و مربعه $p^2=4$ لا يقسم المعامل الثابت فإن $f(x)$ غير قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}[x]$ و بما أن كل $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ فمن نظرية القيمة الوسطية فإن f لها جذر حقيقي و بالتالي فهي قابلة للتحليل على $\mathbb{R}$

ب) اجعل $I=f(x)\mathbb{Q}[x]=\{f(x)q(x):q(x)\in\mathbb{Q}[x]\}$ أثبت أن حلقة القسمة $\mathbb{Q}[x]/I$ (quotient ring) نطاق صحيح (integral domain) (أي لا يحتوي قاسمات للصفر)

الحل: لنفرض أن $[g(x)][h(x)]=[0]$ و $[g(x)]\neq[0]$ فهذا يعطينا أن $f(x)$ تقسم $g(x)h(x)$ و أن $f(x)$ لا تقسم $g(x)$ فحيث f غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ فإن القاسم المشترك الأعلى لكثيرتي الحدود $f(x),g(x)$ هو 1 و من خوارزمية اقليدس ستوجد $a(x),b(x)\in\mathbb{Q}[x]$ بحيث $1=a(x)f(x)+b(x)g(x)$ و حيث $f(x)$ تقسم $a(x)f(x)h(x)$ و $b(x)g(x)h(x)$ فهي تقسم $h(x)=a(x)f(x)h(x)+b(x)g(x)h(x)$ و منه نجد أن $[h(x)]=[0]$

ج) اذا كان $[g(x)]$ هو صف التكافؤ لكثيرة الحدود $g(x)$ في الحلقة $\mathbb{Q}[x]/I$ فاوجد كثيرة حدود $h(x)$ بحيث $[x^2+1]*[h(x)]=[1]$ (هنا * هي عملية الضرب في الحلقة $\mathbb{Q}[x]/I$)

الحل: سنحسب $a(x),h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ بحيث $a(x)f(x)+h(x)(x^2+1)=1$ فهذا يعطينا أنه في $\mathbb{Q}[x]/I$ لدينا أن $[x^2+1]*[h(x)]=[1]$ كما هو مطلوب. لنعمل هذا نستخدم خوارزمية إقليدس فنقسم لنجد أن $x^3+2x^2+2x+2=(x+2)(x^2+1)+x$ ثم أن $x^2+1=x*x+1$ إذا

$$1=(x^2+1)-x*x=x^2+1-x*((x^3+2x^2+2x+2)-(x+2)(x^2+1))$$
$$=(x^2+2)(x^2+2x+1)-x(x^3+2x^2+2x+2)$$

و كثيرة الحدود المطلوبة هي $(x+1)^2$

جامعة الملك فيصل – كلية العلوم – قسم الرياضيات
اختبار القبول لبرنامج الماجستير في الرياضيات
٧-٥-١٤٢٩ هجرية الموافق ١٢-٥-٢٠٠٨م

نذكر بالرموز التالية

١- R هي مجموعة الأعداد الحقيقية.
٢- Q هي مجموعة الأعداد القياسية.
٣- $N=\{1,2,3,\dots\dots\dots\}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية.
٤- Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة .
٥- $Z_p = Z/pZ$ حيث $p \in N$

السؤال الأول

(أ) أوجد مجموعة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\,2^n}$

(ب) ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

(ج) احسب التكامل $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$

السؤال الثاني

(أ) احسب التكامل $\int_\alpha \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}\,dz$ حيث

(١) α هو منحنى الدائرة $|z-2|=\frac{3}{2}$ (٢) α هو منحنى الدائرة $|z|=4$

(ب) أثبت أنه لأي عدد حقيقي x يكون لدينا $|\cos x - 1| \le \frac{x^2}{2}$

(ج) أوجد حجم الجسم المحصور بين المجسمين المكافئين
$z=5x^2+5y^2$ و $z=6-x^2-y^2$

السؤال الثالث

(أ) اوجد كل عناصر زمرة التبديلات S_3 ثم اوجد زمرها الجزئية الناظمية(normal).

(ب) ليكن p,q عددين اوليين مختلفين. باستعمال نظرية لاجرانج بين أن التشاكل الزمري الوحيد من Z_p الى Z_q هو الدالة الصفرية.

(ج) بين أن كل تشاكل حقلي غير صفري يكون متباين .

(د) لتكن $P_1(X) = X^2 + X + 1$ و $P_2(X) = X + 4$ كثيرتى حدود ولتكن α إحدى جذور كثيرة الحدود $P_1(X)$. اوجد باقي قسمة $P_1(X)$ على $P_2(X)$ في الحلقة $Q[X]$.

ثم اكتب العدد $\beta = \dfrac{3\alpha^2 + 4}{\alpha + 4}$ علي صورة $\beta = a + b\alpha$ حيث $a,b \in Q$

السؤال الرابع

(أ)لأي عدد حقيقي a اعتبر نظام المعادلات الخطية S_a في R^3 الآتي:

$$\begin{aligned} 2x - 2y \qquad &= 2 \\ 2x - 3y + az \; &= 3 \\ (a+1)y - 2z &= a - 3 \end{aligned}$$

أوجد قيم العدد a (إن وجدت) التي تجعل

(i) النظام S_a ليس له حل.

(ii) النظام S_a له حل وحيد.

(iii) النظام S_a له عدد لانهائي من الحلول و في هذه الحالة أوجد ها.

(ب) هل $(Q,+)$ زمرة دائرية؟ علل ما تقول.

(ج)هل توجد دالة تشاكل $f:(Q,+) \rightarrow (Z,+)$ بين الزمرتين $(Q,+)$ و $(Z,+)$ وبحيث تكون الدالة f متباينة (واحد لواحد).

السؤال الخامس

(أ) نفرض أن كل من (X,d) و (Y,ρ) فضاء متري و أن $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ دالة متصلة . اعتبر التقارير الآتية

(١) الدالة f تنقل كل متتابعة كوشية إلى متتابعة كوشية.

(٢)ا لدالة f تنقل كل متتابعة تقاربيه إلى متتابعة تقاربيه .

(٣) الدالة f تنقل كل مجموعة مفتوحة إلى مجموعة مفتوحة.

(٤) الدالة f تنقل كل مجموعة متراصة إلى مجموعة متراصة .

اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي

(i) التقرير الرابع صحيح فقط. (ii)التقرير الثاني صحيح فقط .

(iii) التقريران الثاني و الرابع صحيحان فقط.

(iv) التقريران الثالث و الرابع صحيحان.

(v) ليس مما سبق.

(ب)لتكن $F=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},.......\{2n-1,2n\}.........\}$ و ليكن τ هو التوبولوجى المعرف على المجموعة $N=\{1,2,3,4,.........\}$ و الذي يتكون من جميع الاتحادات الممكنة لعناصر من F بالإضافة إلى المجموعة الفارغة.

(١)ادرس اتصال الدالة $f:(N,\tau)\to(R,u)$ حيث $f(x)=x$ و u هو التوبولوجي العادي على R .

(٢)أوجد نقاط التراكم المجموعة $A=\{1,3,5,6\}$ بالنسبة للتوبولوجي (N,τ) .

السؤال السادس

(أ) أثبت أنه إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[0,\infty[$ و منتظمة الاتصال على الفترة $[2,\infty[$ فإن f تكون متصلة اتصالا منتظما على $[1,\infty[$. هل الدالة f تكون بالضرورة منتظمة الاتصال على $[0,\infty[$. برر ما تقول

(ب) افرض أن $Q\cap[0,1]=\{0,r_1,r_2,r_3,r_4.........r_n,...\}$ لكل عدد $n\in N$ نعرف دالة $f_n:[0,1]\to Q$ حيث

$$f_n(x)=\begin{cases} x & if\ \ x\in\{0,r_1,r_2,...r_n\}, \\ 0 & if\ x\notin\{0,r_1,r_2,...r_n\} \end{cases}$$

(١) هل يمكن أن نختار المتتابعة (r_n) بحيث تكون متزايدة.

(٢)أثبت أن f_n قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على الفترة $[0,1]$ و ذلك لكل $n\geq 1$.

(٣) أوجد دالة f بحيث أن $\underset{n\to\infty}{Lim}\ f_n(x)=f(x)\ ,\forall x\in[0,1]$

(٤)حدد النقاط التي تكون عندها الدالة f متصلة وهل هي قابلة للتكامل في مفهوم ريمان على الفترة $[0,1]$.

السؤال السابع

(أ)افرض أن النقطتين A,B نهايتي قطر في دائرة و أن C نقطة أخري واقعة على محيط الدائرة .أثبت أن محيط المثلث ABC تكون أكبر ما يمكن إذا كان متساوي الساقين

(ب) أثبت أن

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(ج) أوجد باقي قسمة العدد 9^{1429} على العدد 7

السؤال الثامن:

لتكن $f : R^2 \to R$ دالة قابلة للتفاضل ولنرمز لتفاضلها عند نقطة x بالدالة $Df(x)$. افرض أن النقطة $x = (0,0)$ هي النقطة الوحيدة من R^2 بحيث تكون الدالة $Df(x)$ غير شاملة و افرض كذلك أن $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} f(y) = \infty$.

(أ) ما هو تعريف $Df(x)$. (ب) أثبت أن الدالة $\frac{1}{f}$ منتظمة الاتصال.

(ح) بين أن الصورة العكسية بالدالة f لكل مجموعة متراصة من R تكون متراصة من R^2 و بين كذلك أن $\inf\limits_{x \in R^2} f(x) = f((0,0))$

(د)لكل عدد حقيقي t يحقق العلاقة $t > f((0,0))$ و لكل مستقيم Δ من R^2 يمر بالنقطة $(0,0)$ اثبت أن المجموعة $\{y \in R^2 : f(y) = t\} \cap \Delta$ غير فارغة و استنتج أن المجموعة $\{y \in R^2 : f(y) = t\}$ قابلة للعد.

Kingdom of Saudi Arabia MINISTRY OF HIGHER EDUCATION KING FAISAL UNIVERSITY College of Science DEPARTMENT of Mathematics		المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك فيصل كلية العلوم قسم الرياضيات

اختبار القبول لبرنامج الماجستير في الرياضيات للعام 1430 هجرية-٢٠٠٩م

رموز

R هي مجموعة الأعداد الحقيقية

C هي مجموعة الأعداد المركبة

Q هي مجموعة الأعداد القياسية

Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية

Z_n هي مجموعة الأعداد الصحيحة قياس العدد n

السؤال الأول:

(أ) أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن العدد $3^{2n}+7$ يقبل القسمة على العدد 8

(ب) لتكن S مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية N بحيث تحقق الشرطين الآتيين :

(١) لكل $k \in N$ فإن $2^k \in S$.

(٢) إذا كان $k \in S$ و $k \geq 2$ فإن $k-1 \in S$.

أثبت أن $S = N$

(ج) لتكن $f : R \to R$ و $g : R \to R$ دالتين معرفتين كما يلي:

$f(x) = x^5$ و $g(x) = x+1$.

(١) أوجد gof (تحصيل الدالتين f و g) .

(٢) أثبت أن الدالة gof تناظر أحادي (متباينة وشاملة).

السؤال الثاني:

(أ) لتكن τ عائلة من مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R و تتكون من المجموعة الفارغة ϕ و R وجميع الفترات المفتوحة التي تأخذ الصورة (a,∞) حيث a عدد حقيقي.

(١) أثبت أن τ توبولوجي على R.

(٢) هل المجموعة $[0,\infty)$ مغلقة بالنسبة إلى τ ؟ هل هي متراصة بالنسبة إلى τ ؟ علل إجابتك.

(٣)أثبت أن المتتابعة $x_n = \frac{1}{n}$ تتقارب إلى العدد -4 بالنسبة إلى τ.

(ب) لتكن f دالة متصلة من الفضاء المتري (X,d) إلى الفضاء المتري (Y,ρ).

ضع علامة صح أمام التقرير الصحيح من بين التقارير الآتية :

(١) الصورة العكسية لكل مجموعة متراصة تكون متراصة .

(٢) صورة كل مجموعة مغلقة تكون مغلقة.

(٣) صورة كل متتابعة كوشية تكون كوشية .

(٤) صورة كل مجموعة مفتوحة تكون مفتوحة .

(٥) كل التقارير السابقة خاطئة.

السؤال الثالث:

(أ) ليكن $R_2[x]$ هو الفضاء الخطي لكثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي اثنان و المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R وليكن $T : R_2[x] \to R_2[x]$ مؤثر خطي معرف كالآتي :

$$T(1) = 1 - 2x^2, \qquad T(x) = 2x, \qquad T(x^2) = -2 + x^2$$

(١) أوجد المصفوفة A للمؤثر T بالنسبة للأساس $\{1, x, x^2\}$

(٢) أوجد القيم الذاتية والفراغات الذاتية للمصفوفة A

(٣) أوجد مصفوفة P قابلة للانعكاس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}A\,P$ قطرية.

(ب) أوجد حل لنظام التطابقات الآتية :

$$\begin{cases} n \equiv 11 \pmod{13} \\ n \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$$

السؤال الرابع:

(أ) أوجد المعكوس الضربي للعنصر [17] في الحلقة Z_{20}.

(ب) لتكن F حلقة إبدالية أحادية منتهية وليس لها قواسم للصفر . أثبت أن F حقل.

السؤال الخامس:

(أ) احسب التكامل الآتي $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} \, dy \, dx$

(ب) أوجد حجم الجسم المحصور بين المجسمين

$z = 5x^2 + 5y^2$ و $z = 6 - 7x^2 - y^2$

(ج) أي من التكاملين الآتيين معتل ثم ادرس تقاربه :

$J = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-3)}$ و $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(د)أوجد قيم α الحقيقية التي تجعل التكامل المعتل الآتي تقاربي

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\,x^{2\alpha}}$$

السؤال السادس

(ا) أوجد مجموعة تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n}$.

(ب) اختبر تقارب وتباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^n}{n!}$.

(ج) ادرس التقارب و التقارب المنتظم لمتتابعة الدوال $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ على الفترة $[0,\infty)$ ثم احسب $\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx$.

السؤال السابع

(أ) لتكن f دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ بحيث أن $f(0)=f(1)$. استخدم نظرية القيمة الوسطية(intermediate value theorem) لإثبات أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث أن $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$ و $f(\alpha)=f(\alpha+\frac{1}{2})$.

(ب) احسب $\int_{\gamma}\frac{Z^2+3}{(Z-2)^2(Z-1)}dZ$ حيث γ هو :

(١) منحنى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $(0,0)$ و نصف قطرها يساوي $\frac{1}{2}$.

(٢) حدود المنطقة D المعرفة كالتالي $D=\{(x,y):\ |x|\le 5,\ |y|\le 5\ \}$

السؤال الثامن

(أ) أثبت أن الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ منتظمة الاتصال على الفترة $[\alpha,\infty)$ حيث $\alpha>0$ عدد حقيقي موجب . هل هي منتظمة الاتصال على الفترة $(0,\infty)$؟ علل إجابتك.

(ب) لتكن f دالة قابلة للتفاضل على الفترة $(0,1)$ بحيث يكون لها نقطة وحيدة $\alpha\in(0,1)$ يتحقق عندها $f'(\alpha)=0$ (المشتقة عند النقطة α تساوي الصفر) . أثبت أنه إذا كانت $f(\alpha)$ قيمة عظمى محلية فإنها تكون قيمة عظمى للدالة f على كل الفترة $(0,1)$
(يمكنك استخدام نظرية القيمة الوسطية لمشتقة الدالة)

خاتمة