الفصل السادس

التراص
Compactness

مقدمة

ندرس في هذا الفصل خاصية توبولوجية لها دوراً فعالاً وبارزاً ليس في الفضاءات التوبولوجية فحسب بل في التحليل أيضاً وغيره من فروع الرياضيات المختلفة. هذه الخاصية هى خاصية التراص . وأول فكرة ساهمت في وضع تعريف مفهوم التراص و فتح المجال لدراسته هى نظرية هاينة – بوريل (Heine –Borel Theorem) المعروفة في التحليل الحقيقى والتى تقرر الآتى :

إذا كانت X مجموعة جزئية - مغلقة ومحدودة - من خط الأعداد الحقيقية فإن أى عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة في R والتى اتحاداتها تحتوى على X فثمة عائلة جزئية منتهية من X بحيث أن اتحاد عناصرها يحتوى على X أيضاً.

ونظرية هاين – بوريل هذه لها نتائج كثيرة منها : أنه إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[0,1]$ فحينئذ تصل الدالة f إلى قيمتها العظمى وإلى قيمتها الصغرى على الفترة المغلقة $[a,b]$.

الفترة المغلقة $[a,b]$ تسمى فترة متراصة متى كانت محدودة أيضاً. هذا التعريف الخاص بتراص الفترات المغلقة هل يمكن تعميمه إلى جميع

المجموعات في الفضاء المتري ؟. قبل الإجابة عن هذا السؤال يجب أن نعلم أنـه لكى تكون المجموعـة الجزئيـة A - من الفضـاء المتـري – متراصـة يجـب أن تكون مغلقة ومحدودة. ولكن هذا التعريف غير مناسب للاستخدام مـع الفضـاءات التوبولوجية الأكثر تعميماً من الفضاءات المترية وذلك لصـعوبة استخدام مفهوم المجموعات المحدودة.

لتعريف المجموعة المتراصة في الفضاء المتري توجد طريقتان إحداهما باستخدام مفهوم نقاط التجمع (Cluster points) والأخرى باستخدام مفهوم الغطاءات المفتوحة (Open covers). الطريقتان متكافئتان ولكن توجد ثمة فروق بينهما ، فالأولى تمتاز بسهولة الاستيعاب وسهولة التطبيق ولكنها لا تسمح بتعميمها على فضاءات أخرى سوى الفضاء المتري. أما التعريف الثانى فهو يتكافأ مع التعريف الأول في حالة الفضاء المتري فضلاً عن أنه يمتاز بإمكانية تعميمه على فضاءات أخرى أكثر تعميماً من الفضاء المتري.

(6.1) الغطاءات المفتوحة Open covers

تعريف (6.1)

بفـرض أن A مجموعـة جزئيـة مـن الفضــاء التوبولـوجي (X,τ). الغطــاء المفتـوح للمجموعـة A هـو التجمـع $O=\{G_i\}$ مـن المجموعـات المفتوحـة G_i والتي اتحادها يحوي المجموعة A .أي أن $A\subseteq \cup_i G_i$. الغطاء الجزئي من الغطاء المفتوح $O=\{G_i\}$ هو التجمع الجزئي $\{G_{i_1},G_{i_2},...,G_{i_n}\}$ من O بحيث أن $A\subseteq \{G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup ...,\cup G_{i_n}\}$.

مثال (6.1)

بفرض أن $A=[0,5]$،وبفرض أن العائلة

$O=\{(n-1,n+1):n=-\infty,\ldots,\infty\}$ غطاء للمجموعة A . الغطاء الجزئي $\{(-1,1),0,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ هو أصغر غطاء جزئي من O يحوي المجموعة A .

تعريف (6.2)
بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. يقال أن المجموعة جزئية $A\subseteq X$ متراصة إذا كان كل غطاء مفتوح لهذه المجموعة يحوي غطاءً جزئياً منتهياً.

مثال (6.2)
المجموعة $A=(0,1)\subset R$ ليست متراصة ، لأنه بإختيار العائلة :

$$G=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}):n\in N\}$$

كغطاء مفتوح للمجموعة A . لحساب إمكانية وجود الغطاء الجزئي للمجموعة A نستبعد على الأقل عنصر من عناصر الغطاء و ليكن $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$، نجد أن العائلة الجزئية $\zeta=\{(\frac{1}{3},1),(\frac{1}{5},\frac{1}{3}),(\frac{1}{6},\frac{1}{4}),\ldots\}$ لا تكون غطاء جزئي للمجموعة A و ذلك لعدم وجود غطاء للعنصر $A \ni \frac{1}{3}$ حيث أن

$$\frac{1}{3}\notin(\frac{1}{3},1)\cup(\frac{1}{5},\frac{1}{3})\cup\ldots$$

و هكذا في كل مرة نحاول استبعاد أي فترة سوف يبقى عنصر بدون غطاء .

مثال (6.3)
المجموعة $A=[1,\infty)\subseteq R$ ليست متراصة ، لأنه بإختيار العائلة :

$$G=\{(0,2),(1,3),(2,4),..\}$$

كغطاء للمجموعة A يتكون من فترات مفتوحة. ولكن هذا الغطاء لا يحتوي على أي غطاء جزئي منه و يمكن ملاحظة ذلك باستبعاد أي فترة من عناصر G فمثلاً لو استبعدنا $(1,3)$نجد أن العائلة $\zeta=\{(0,2),(2,4),(4,6),...\}$ لا تكون غطاء جزئي للمجموعة $A=[1,\infty)$ و ذلك لكون العنصر $2\in A$ بدون غطاء وهذا يعني أن G لا يحتوي على أي غطاء جزئي منته للمجموعة A .

مثال (6.4)

المجموعة $A=R$ ليست متراصة ، لأنه بإختيار العائلة :

$$G=\{(n,n+2):n\in Z\}$$

كغطاء لمجموعة الأعداد الحقيقية $A=R$ و لكنها لا تحتوي على أي غطاء جزئي منته، حيث أن أي محاولة لاستبعاد ولو عنصر واحد من عناصر G سوف يتسبب في عدم وجود غطاء لعنصر من $A=R$ ، فعلى سبيل المثال لو تم استبعاد الفترة $(2,4)$فإن العدد 3 لا يوجد له غطاء.

نظرية (6.1) (نظرية كانتور للفترات المتداخلة)

إذا كانت $\{[a_n,b_n]:n=1,2,...\infty\}$ متتابعة من الفترات المغلقة و المتداخلة ، فإن $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\phi$. و إذا كان طول هذه الفترات يتقارب للصفر فإن تقاطع هذه الفترات يتكون على وجة الدقة من نقطة واحدة.

البرهان

بما أن $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ لكل عدد صحيح موجب n ، فإن المتواليات $\{a_n\}$و $\{b_n\}$ لنقاط الحدود اليمنى و اليسرى للفترة $[a_n,b_n]$ لهما الخواص التالية:

(1) $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$

(2) $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots$

(3)كل نقطة حدية من جهة اليسار هى أقل من كل نقطة حدية من جهة اليمين.

نفرض أن c ها أصغر حد علوي لنقاط الحدود من جهة اليسار و d هي أكبر حد سفلي لنقاط الحدود من جهة اليمين. وجود النقطتين c,d مضمون من خلال خاصية الحدود العليا و الصغرى.

من الشرط (3) نجد أن $c \le b_n$ لكل n و من ثم يكون $c \le d$. بما أن $a_n \le c \le d \le b_n$ فإن $[c,d] \subset [a_n,b_n]$ لكل n. لذا فإن $\cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ تحوي الفترة المغلقة $[c,d]$ و من ثم لا تكون خالية.

أخيراً إذا كانت المتتابعة $[a_n, b_n]$ تتقارب إلى الصفر فإنه يجب أن تكون $c = d$ و النقطة c النقطة الوحيدة للتقاطع.■

نظرية (6.2)

الفترة المغلقة $[0,1]$ متراصة

البرهان

نفرض أن O غطاء مفتوح للفترة $[0,1]$.أفترض أن الفترة $[0,1]$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر الغطاء O، فإن إحدى الفترتين $[0,\frac{1}{2}]$ أو $[\frac{1}{2},1]$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوح O . نفترض أن $[a_1,b_1]$ هو النصف الذي لم يغطى بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوحO.

بتطبيق نفس الفكرة على الفترة $[a_1,b_1]$ فيكون لدينا واحدة من الفترتين $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ و $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصرالغطاء

المفتوح. نفترض أن $[a_2,b_2]$ هو أحد النصفين $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ و $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ الذي لم يغطى بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوح O. بتكرار هذه العملية لنحصل على متوالية من الفترات المغلقة المتداخلة $\{[a_n,b_n]:n=1,2,...\infty\}$ و التي تتميز بأن اي منها لا يغطى بعدد منته من عناصر الغطاء المفتوح O. باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع الحصول على ان $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}$. لذا نستطيع القول بأن أول طول الفترات $[a_n,b_n]$ تتقارب من الصفر.

باستخدام نظرية الفترات المتداخلة لكانتور نجد أنه توجد نقطة في تقاطع كل هذه الفترات المتداخلةو لتكن $p\in[a_n,b_n]$ لكل n. بما أن $p\in[0,1]$ ، فإنه توجد فترة مفتوحة $O_1\in O$ بحيث أن $p\in O_1$. أي أن يوجد $\varepsilon>0$ بحيث يكون $(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\subset O_1$. نفترض أن N عدد صحيح موجب بحيث أن $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$. بما أن $p\in[a_N,b_N]$ ، فإن $p\in[a_n,b_n]\subset(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\subset O_1$ و هذا معناه أنه يمكن تغطية $[a_N,b_N]$ بعنصر من عناصر الغطاء المفتوح O و هذا يتعارض مع الفرض بأن الفترة $[a_N,b_N]$ لا يمكن تغطيتها بغطاء جزئي منته من الغطاء المفتوح O. هذا التعارض يبين أنه يوجد غطاء جزئي منته للفترة $[0,1]$ و أن هذه الفترة متراصة.■

نظرية (6.3)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كانت $A\subseteq X$ مجموعة متراصة في X فإن $f(A)$ تكون أيضا متراصة في Y .

البرهان

نفـرض أن A مجموعـة متراصـة فـي X وأن $\{G_i : i \in I\}$ غطـاء مفتـوح للمجموعة $f(A)$ ، أي أن $f(A) \subseteq \cup_i \{G_i\}$ بما أن

$$\therefore A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\cup_i G_i) = \cup_i f^{-1}(G_i)$$

و على ذلك فإن $\{f^{-1}(G_i)\}$ غطاء مفتوح للمجموعة A لأن الدالة متصلة و $\{G_i : i \in I\}$ مجموعات مفتوحة فمن ثم فإن $f^{-1}(G_i)$ تكون مجموعات مفتوحة لكل i. بما أن A مجموعة متراصة فإن الغطاء $\{f^{-1}(G_i)\}$ يحتوي على غطاء جزئى منته وليكن :

$$\{f^{-1}(G_{i_1}), f^{-1}(G_{i_2}), \dots, f^{-1}(G_{i_m})\}$$

بحيث أن

$$A \subseteq f^{-1}(G_{i_1}) \cup f^{-1}(G_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{i_m})$$

وعليه فإن :

$$f(A) \subseteq f[f^{-1}(G_{i_1}) \cup f^{-1}(G_{i_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{i_m})] \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

ومن ثم فإن $f(A)$ تكون مجموعة متراصة. ■

مثال (6.5)

(1) في المستوي R مع التوبولوجي المعتاد، فإن الفترة المغلقة $[a,b]$ متراصة وذلك باعتبارها صورة متصلة للفترة المتراصة $[0,1]$ تحت تأثير الدالة

$$f : [0,1] \to [a,b]$$

المعرفة بالصورة $f(x) = (b-a)x + a$ لكل $a,b \in R$ حيث أن $a \neq 0$.

(2) في المستوي $X = R \times R$ مع التوبولوجي المعتاد، فإن دائرة الوحدة

$$C = \{(x, y) \in X : x^2 + y^2 = 1\}$$

تعتبر مجموعة متراصة لكونها صورة مستمرة للمجموعة المتراصة $[0,2\pi]$ تحت تأثير الدالة المعرفة بالصورة $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

الآن هل المجموعة الجزئية من الفضاء المتراص تكون أيضا مجموعة متراصة ؟. للإجابة على هذا السؤال نرجع إلى الأمثلة السابقة فنلاحظ أن الفترة المحدودة والمغلقة $[0,1]$ من خط الأعداد R تكون متراصة (نظرية هاين – بوريل). في حين أن الفترة المفتوحة $(0,1)$ ليست متراصة مع كونها مجموعة جزئية من الفترة المتراصة $[0,1]$. لهذا فإنه ليس من الضروري أن تكون المجموعة الجزئية من الفضاء المتراص هى مجموعة متراصة. أما شرط تحقق تراص المجموعة الجزئية من الفضاء المتراص يبدو من خلال النظرية التالية :

نظرية (6.4)

المجموعة الجزئية المغلقة من الفضاء المتراص هي أيضاً متراصة.

البرهان

نفرض أن A مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المتراص (X, τ) وبفرض أن $\{G_i\}$ غطاءً مفتوحاً للمجموعة المغلقة A . أي أن $A \subseteq \bigcup_i G_i$.عندئذ يكون $X = \bigcup_i \{G_i\} \cup A^c$ ،وبما أن A^c مجموعة مفتوحة فإن $\{G_i\} \cup A^c$ هو غطاء مفتوح للمجموعة X . بما أن الفضاء (X, τ) متراص فإنه يوجد غطاء جزئى منته وليكن:

$$\{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_m}, A^c\}$$

بحيث أن :

$$X = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_m} \cup A^c$$

بما أن $X = A \cup A^c$ فإن :

$$X = A \cup A^c = G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_m} \cup A^c$$

ومن ثم فإن :

$$A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_m}$$

وذلك معناه أن أى غطاء مفتوح $\{G_i\}$ للمجموعة A يحتوى على غطاء جزئي منته $\{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_m}\}$ وذلك هو إثبات أن A مجموعة متراصة.

بعد أن عرفنا أن المجموعة الجزئية المغلقة من الفضاء المتراص تكون دائماً متراصة، ولكن رب سائل قد يسأل هل كل مجموعة جزئية متراصة هي بالضرورة مجموعة مغلقة؟ ، أو بمعنى آخر هل عكس النظرية السابقة صحيح دائماً. المثال التالي يبن أن ذلك ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً دائماً.

مثال (6.6)

بفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة الغير خالية $X = \{a,b,c,d\}$. بفرض أن $A = \{a,b\} \subseteq X$. واضح أن المجموعة A ليست مغلقة ولكن العائلة $\{\{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ تكون غطاء مفتوح للمجموعة A ، ومن ثم باستبعاد أي عنصر من عناصر الغطاء المفتوح نحصل على غطاء جزئي منته .إذاً المجموعة A متراصة و لكنها ليست مغلقة.

تعريف (6.3) (خاصية التقاطع المنته (Finite Intersection Property)

يقال إن عـائلة المجموعات $\{G_i\}$ تحقق خاصة التقاطع المنته إذا كان تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$ هو مجموعة غير خالية، أى أن :

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \neq \phi .$$

مثال (6.7)

العائلة $\{(0,1), (0,\tfrac{1}{2}), (0,\tfrac{1}{3}), \ldots\}$ تحقق خاصية التقاطع المنته وذلك لأن تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{(0,1), (0,\tfrac{1}{2}), (0,\tfrac{1}{3}), \ldots, (0,\tfrac{1}{m})\}$ هو مجموعة غير خالية لأن

$$(0,1) \cap (0,\tfrac{1}{2}) \cap (0,\tfrac{1}{3}) \cap \ldots \cap (0,\tfrac{1}{m}) = (0,b) \neq \phi$$

حيث أن $b = \min\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{m}\}$.

مثال (6.8)

العائلة $\xi = \{[n, n+2] : n \in Z\}$ ليس لها خاصية التقاطع المنته، فعلى سبيل المثال $[2,4] \cap [5,7] = \phi$.

الآن نسأل أنفسنا عن العلاقة بين مفهوم خاصة التقاطع المنته وبين مفهوم التراص . هذه العلاقة يمكن صياغتها في النظرية التالية :

نظرية (6.5)

الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون متراصاً إذا وفقط إذا كان لكل عائلة $\{F_i\}_{i \in I}$ من المجموعات المغلقة لها خاصية التقاطع المنته فإن $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \phi$.

البرهان

نفرض أن (X, τ) فضاء متراص وأن $\{F_i\}_{i \in I}$ عائلة من المجموعات المغلقة

التي لها خاصية التقاطع المنته و المطلوب إثبات أن $\underset{i\in I}{\cap} F_i \neq \phi$. نفترض جدلاً

أن $\underset{i\in I}{\cap} F_i = \phi$، فباستخدام قانون ديمورجان De Morgan نحصل على أن

$$(\underset{i\in I}{\cap} F_i)^c = \phi^c = X \Rightarrow \underset{i\in I}{\cup} F_i^c = X$$

و بذلك تكون العائلة $\{F_i^c\}_{i\in I}$ غطاءً مفتوحاً للفضاء المتراص (X,τ)

وعليه فإنه يوجد غطاء جزئي منته $\{F_{i_1}^c, F_{i_2}^c, ..., F_{i_m}^c\}$ بحيث أن :

$$X = \{F_{i_1}^c \cup F_{i_2}^c \cup ... \cup F_{i_m}^c\}$$

وأيضا باستخدام قانون دى مورجان فإن :

$$\phi = X^c = (F_{i_1}^c \cup F_{i_2}^c \cup ... \cup F_{i_m}^c)^c = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_m}$$

وعليه فإن $\{F_i\}_{i\in I}$ لا تحقق خاصة التقاطع المنته و هذا يتناقض مع الفرض بأن العائلة تحقق خاصية التقاطع المنته . إذاً $\underset{i\in I}{\cap} F_i \neq \phi$.

لاثبات الاتجاه المعاكس نفرض أن الفضاء (X,τ) غير متراص إذاً يوجد غطاء مفتوح $\{G_i\}_{i\in I}$ من المجموعات المفتوحة في X و هذا الغطاء لا يحوي غطاءً منتهيا. فإن عائلة المجموعات المغلقة $\{G_i^c\}_{i\in I}$ لها خاصية التقاطع المنته و هذا يقتضي أن $\underset{i\in I}{\cap} G_i^c = \phi$ وهذا يعني أن عائلة المجموعات المغلقة $F_i = \{G_i^c\}_{i\notin I}$ لا تحقق خاصية التقاطع المنته.■

نظرية (6.6) (نظرية القيمة العظمى و الصغرى)

بفرض $f : X \to R$ دالة متصلة من الفضاء المتراص (X,τ)إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R، فإنه يوجد $c,d \in X$ بحيث أن $f(c) \le f(x) \le f(d)$ لكل $x \in X$.

البرهان

بما أن (X,τ) فضاء متراص وأن $f:X\to R$ دالة متصلة فإن $f(X)=A$ مجموعة متراصة في R و من ثم فهي مغلقة. سوف نحاول اثبات أن A تحوي العنصر لأكبر M و العنصر أصغر m و من ثم نحصل على أن $m=f(c)$ و $M=f(d)$ لأي نقطتين $c,d\in X$.

اولاً إذا كانت A لا تحوي عنصر أكبر، فإن العائلة

$$\{(-\infty,a):a\in A\}$$

تشكل غطاء مفتوح للمجموعة المتراصة A ، و من ثم يوجد غطاء منته للمجموعةA و ليكن $\{(-\infty.a_1),(-\infty,a_2),\ldots,(-\infty,a_n)\}$. فإذا كان a_i هو أكبر عنصر في العناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ، فإن $a_i\notin\bigcup_{i=1}^{n}n(-\infty,a_i)$ و هذا تناقض لأن $A\subseteq(-\infty.a_1)\cup(-\infty,a_2)\cup\ldots\cup(-\infty,a_n)$.

إذاً A تحوي أكبر عناصرها و هو M.

بالمثل يمكن اثبات أن A تحوي أصغر عناصرها و ليكن m.■

(6.2) التراص و مسلمات الأنفصال

Compactness and Separation Axioms

فيما يلي سوف نقوم بدراسة العلاقة بين مفهومي التراص و مسلمات الانفصال و سنعرف دور خاصية كون الفضاء هاوسدورف على المجموعات والفضاءات المتراصة .

نظرية (6.7)

لتكن A مجموعة متراصة في الفضاء التوبولوجى (X,τ). فإذا كان

الفضاء (X,τ) هو فضاء $-\ T_2$ فإن:

$$.\forall x\in X, x\notin A, \exists G,H\in\tau : x\in G, A\subseteq H, G\cap H=\phi$$

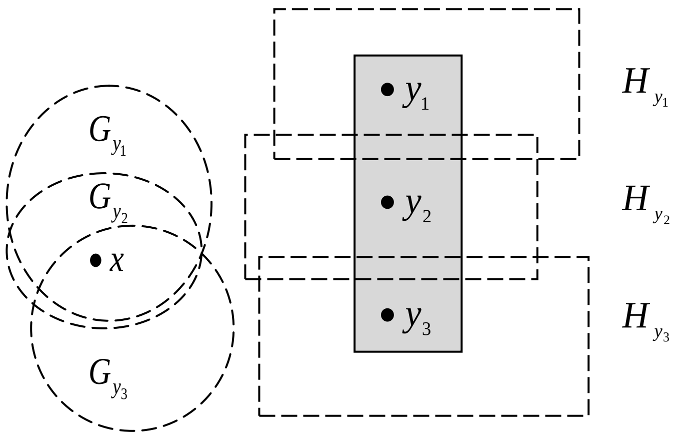
البرهان

نفرض أن $A\subseteq X$ مجموعة متراصة و أن $x\notin A$. لأي عنصر آخر $y\in A$

فإن $x\neq y$ و بموجب أن الفضاء (X,τ) هو فضاء $-\ T_2$ ، فإنه توجد

مجموعتان مفتوحتان G_y, H_y بحيث يكون $x\in G_y, y\in H_y\ , G_y\cap H_y$.

بما أن $y\in A$ فإن العائلة $\{H_y : y\in A\}$ تؤلف غطاءً مفتوحاً للمجموعة المتراصة A ومن ثم فإنه يوجد غطاء جزئي منته للمجموعة A وليكن $\{H_{y_1}, H_{y_2}, ..., H_{y_m}\}$ بحيث يكون $A\subseteq H_{y_1}\cup H_{y_2}\cup ...\cup H_{y_m}=H$



شكل (6.1)

نفرض أن $G=G_{y_1}\cap G_{y_2}\cap ...\cap G_{y_m}=G$ فإن المجموعة G مجموعة مفتوحة لأنها تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة وكذلك المجموعة H مجموعة مفتوحة لأنها اتحاد لعدد منته من مجموعات مفتوحة أيضا وعليه فإن :

$$
\begin{aligned}
G\cap H &= G\cap(H_{y_1}\cup H_{y_2}\cup\ldots\cup H_{y_m})\\
&=(G\cap H_{y_1})\cap(G\cup H_{y_2})\cup\ldots\cup(G\cap H_{y_m})\\
&=\phi.\blacksquare
\end{aligned}
$$

نتيجة (6.1)

كل مجموعة جزئية متراصة في الفضاء T_2- هي مجموعة مغلقة.

البرهان

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الهاوسدورفي (X,τ)ولتكن $p\in X$ نقطة بحيث أن $p\notin A$. بما أن (X,τ) هو فضاء T_2- فإنه ، بناءً على النظرية السابقة ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان G,H بحيث يكون

$\forall p\in G, A\subseteq H, G\cap H=\phi$.

وهذا يقتضي أن $p\in G\subseteq A^c$ لكل $p\notin A$ و هذا يعني أن p نقطة داخلية للمجموعة A^c بما أن النقطة p نقطة اختيارية، فإن A^c جوار لكل نقطة من نقاطها و من ثم فهي مجموعة مفتوحة.■

المثال التالي يوضح أنه إذا لم يكن الفضاء T_2، فإنه قد توجد مجموعة متراصة ولكنها غير مغلقة.

مثال (6.9)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. نلاحظ أن الفضاء (X,τ) ليس T_2(تأكد من ذلك).

باختيار المجموعة $A=\{a,b\}$ ليست مغلقة ولكن نلاحظ أنها متراصة ، حيث أن كل غطاء مفتوح لها يحوي غطاءً جزئياً منتهياً(تأكد من ذلك؟).

نظرية (6.8)

بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتان متراصتان و غير متقاطعتين في الفضاء الهاوسدورفي (X,τ)، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان و غير متقاطعتين $G,H\subseteq X$ بحيث أن $A\subseteq G, B\subseteq H$.

البرهان :

نفرض أن A,B مجموعتان متراصتان في الفضاء الهاوسدورفي (X,τ) بحيث أن $A\cap B=\phi$. لكل نقطة $a\in A$ نجد أن $a\notin B$. بما أن المجموعة B متراصة وأن الفضاء (X,τ) هو فضاء هاوسدورف، فإنه من نظرية (6.7) توجد مجموعتان مفتوحتان G_a,H_a بحيث أن :

$$a\in G_a, B\subseteq H_a, G_a\cap H_a=\phi$$

وهذا يؤدى إلى أن $\{G_a, a\in A\}$ غطاء مفتوح للمجموعة المتراصة A و عليه فإنه يوجد غطاء جزئي منته للمجموعة A و ليكن

$$\{G_{a_1},G_{a_2},\ldots,G_{a_m}\}$$

حيث أن

$$A\subseteq\{G_{a_1}\cup G_{a_2}\cup\ldots\cup G_{a_m}\}$$

نفرض أن

$$H=\{H_{a_1}\cap H_{a_2}\cap\ldots\cap H_{a_m}\},\ G=\{G_{a_1}\cup G_{a_2}\cup\ldots\cup G_{a_m}\}$$

يتضح أن $A\subseteq G$ ، $B\subseteq H$، أن G مجموعة مفتوحة لكونها اتحاد مجموعات مفتوحة، كما أن H مجموعة مفتوحة لكونها تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة. إذاً توجد المجموعتان المفتوحتان G و H بحيث أن

. $A \subseteq G, B \subseteq H$

$$\begin{aligned} G \cap H &= (G_{a_1} \cup G_{a_2} \cup \ldots \cup G_{a_m}) \cap H \\ &= (G_{a_1} \cap H) \cup (G_{a_2} \cap H) \cup \ldots \cup (G_{a_m} \cap H) \\ &= \phi \cup \phi \cup \ldots \cup \phi = \phi . \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته.■

نتيجة (6.2)

كل فضاء توبولوجى متراص وهاوسدورف هو فضاء عادي.

البرهان :

نفرض أن (X,τ) فضاء متراص و T_2 ، والمطلوب أثبات أن (X,τ) هو فضاء عادي.لاثبات ذلك نفرض ان F_1 و F_2 مجموعتان مغلقتان و غير متقاطعتين. بموجب أن (X,τ) فضاء متراص ، فإن كل من F_1 و F_2 مجموعة متراصة (من نظرية (**6,4**)). بما أن $F_1 \cap F_2 = \phi$ وبموجب كون الفضاء (X,τ) فضاء- T_2 فإنه – (من نظرية (**6,8**)) – توجد مجموعتان مفتوحتان H,G بحيث أن $G \cap H = \phi$, $F_1 \subseteq G, F_2 \subseteq H$ وهذا هو إثبات أن (X,τ) هو فضاء عادي.■

نظرية (6.9)

الدالة المتصلة $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ من الفضاء المتراص (X,τ) إلى الفضاء الهاوسدورفي (Y,υ) هي مغلقة.

البرهان

نفرض أن $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ متصلة من الفضاء المتراص (X,τ) إلى الفضاء الهاوذدورفي (Y,υ). نفرض أن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة ، عندئذ

تكـون هـذه المجموعـة متراصــة (انظـر نظريــة (6.4))، و بموجـب نظريــة ((6.3)) نجـد أن الصــورة المتصــلة $f(F)$ للمجموعــة المتراصــة F هــي مجموعـة متراصـة فـي Y. بمـا أن (Y,υ) هـو فضـاء T_2- و $f(F)$ مجموعـة متراصـــة ، فـــإن $f(F)$ مجموعـــة مغلقـــة (نتيجـــة (6.1)). إذاً الدالـــة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة. ■

نتيجة (6.3)

دالة التقابل المتصلة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء المتراص (X,τ) إلى الفضاء الهاوسدورفي (Y,υ) هي دالة توبولوجية.

تمرين محلول

بفـرض أن (X,τ) فضـاء تـام الانتظـام وأن A,B مجموعتـان مغلقتـان و غيـر متقـاطعتين . بـين أنـه إذا كانـت A مجموعـة متراصـة فإنـه توجـد دالـة متصـلة $f:X\to[0,1]$ بحيث يكون $f(A)=\{0\}$ و $f(B)=\{1\}$.

الحل

بما أن (X,τ) فضاء تام الانتظام و B مجموعـة مغلقـة فـي X ، فإنـه لكل نقطـة a في A ، حيث أن $a\notin B$ ، يمكن ايجاد دالة متصلة $g_a:X\to[0,1]$ بحيث أن $g_a(B)=\{1\}$ و $g_a(a)=\{0\}$. إذاً لكـــل $a\in A$ بحيـــث أن $a\notin B$ نجـــد أن $a\in g_a^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ و $B\subseteq g_a^{-1}(\{1\})$ ومن ثم نجد أن

$$B\subseteq \bigcap_{a\in A} g_a^{-1}(\{1\}) \text{ و } A\subseteq \bigcup_{a\in A} g_a^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))$$

بما أن A مجموعة متراصة و $A\subseteq \bigcup_{a\in A} g_a^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ ، فإن الغطاء المفتوح $\{g_a^{-1}([0,\frac{1}{2}))\}$ يحوي غطاءً منتهياً وليكن

$$g_{a_1}^{-1}([0,\tfrac{1}{2})), g_{a_2}^{-1}([0,\tfrac{1}{2})),\ldots, g_{a_m}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))$$

للمجموعة المتراصة A . أي أن

$A\subseteq g_{a_1}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))\cup g_{a_2}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))\cup\ldots\cup g_{a_m}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))$ و من ثم يكون

$B\subseteq \bigcap_{i=1}^{m} g_{a_i}^{-1}(\{1\})$. لذا نحصل على أن

$g_{a_i}(A)\subseteq[0,\tfrac{1}{2})$ و $g_{a_i}(B)\subseteq(\tfrac{1}{2},1]$.

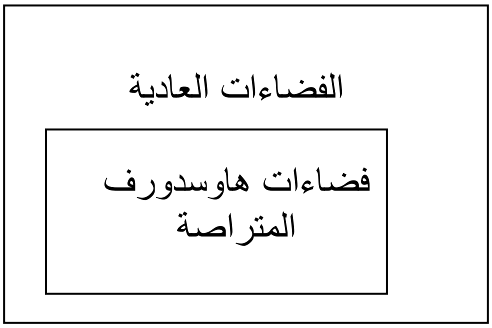
نفرض أن $h=\inf g_{a_i}$ ، فنجد أن $h(B)=1$ و $h(A)<\tfrac{1}{2}$

بتعريف الدالة $f:X\to[0,1]$ بالصيغة

$f(x)=2\max\{h(x)-\tfrac{1}{2},0\}$.

هذه الدالة متصلة وتحقق $f(A)=0$ و $f(B)=1$.

بعد أن عرفنا العلاقة بين مفهومي التراص ومسلمات الانفصال، فيمكننا تلخيص العلاقة بين التراص و مسلمات الانفصال في المخطط التالي:



شكل (6.2)

(6.3) الفضاءات المتراصة موضعياً Locally Compact Spaces

تعريف (6.4)

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ)متراص موضعياً إذا وجد جوار متراص لكل نقطة $x \in X$.

مثال (6.10)

الفضاء المعتاد $(\mathbf{R},u)$متراص موضعياً حيث يوجد لكل $\mathrm{a} \in \mathbf{R}$ و لكل $\varepsilon > 0$ الجوار المغلق والمحدود $[\mathrm{a}-\varepsilon, \mathrm{a}+\varepsilon]$ ، وهذا الجوار متراص بناءً على نظرية هين بورل وعلى ذلك فإن $\mathbf{R}$ متراص موضعياً على الرغم كونه غير متراص(انظر مثال 4.6).

مثال (6.11)

الفضاء المنفصل (X,D) متراص محلياً لأن لكل $p \in X$ تكون $\{p\}$جوار متراص للنقطة p لأن المجموعة $\{p\}$ متراصة لكونها (منتهية)

نظرية (6.10)

أي مجموعة مغلقة من فضاء متراص موضعيا تكون متراصة موضعياً.

البرهان

إذا كانت A مجموعة مغلقة من فضاء متراص موضعياً (X,τ). نفرض أن $a \in A$نقطة اختيارية. بما أن $a \in X$ و الفضاء (X,τ)متراص موضعياً، فإنه لكل$a \in A$ يوجد جوار متراص وليكن K_a. نفرض أن $C_a = K_a \cap A$. الآن C_aمجموعة مغلقة في K_a. إذاً C_a مجموعة متراصة من A. بما أن $C_a \supseteq K_a^o \cap A \ni a$فإن C_a هي جوار متراص للنقطة a في A و هذا يعني أن

المجموعة A متراصة موضعياً.■

نظرية (6.11)

إذا كان (X,τ) فضاء متراصاً موضعياً و $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة و مفتوحة ، فإن المجموعة $f(X)$ متراصة موضعيا.

البرهان

نفرض أن $y\in f(X)$ ، نختار $x\in X$ بحيث يكون $f(x)=y$. بما أن الفضاء (X,τ) متراص موضعياً ، فإنه يوجد جوار متراص N_x لكل $x\in X$. بما أن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة ، و بما أن N_x مجموعة متراصة ، فإن $f(N_x)$ مجموعة متراصة في $f(X)$. بما أن N_x^o مجموعة مفتوحة ، و الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، إذاً $f(N_x^o)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على y لأن $x\in N_x^o$،و عليه فإن

$$y\in f(N_x^o)\subseteq f(N_x)$$

أي أن y لها جوار متراص و هو $f(N_x)$ و من ثم فإن $f(X)$ متراص موضعياً.■

نتيجة (6.4)

خاصية كون الفضاء متراصاً موضعياً هي خاصية توبولوجية.

نظرية (6.12)

الفضاء- T_2 يكون متراص موضعياً إذا و فقط كان لكل $x\in X$ يوجد جوار مفتوح N_x بحيث تكون $\overline{N}_x$ مجموعة متراصة.

البرهان

أولاً: نفرض أن الفضاء (X,τ) متراص موضعياً وأن $x \in X$. إذاً يوجد جوار متراص للنقطة x وليكن H . بوضع $N_x = H^o$ و بعد ملاحظة أن H مجموعة مغلقة لأنها مجموعة متراصة في فضاء-T_2 (نتيجة (6.1)) نحصل على الآتي:

$$\overline{N}_x = \overline{H^o} \subseteq \overline{H} = H$$

و لما كانت $\overline{N}_x$ مجموعة مغلقة و جزئية من مجموعة متراصة، إذاً $\overline{N}_x$ مجموعة متراصة.

ثانياً: نفرض ان (X,τ) فضاء-T_2 وأنه لكل $x \in X$ يوجد جوار جوار مفتوح N_x بحيث تكون $\overline{N}_x$ مجموعة متراصة، فإن $\overline{N}_x$ تعد جواراً متراصاً للنقطة x، وعلى ذلك فإن (X,τ) يكون متراصاً موضعياً.■

تمـــارين (6.1)

(**1**) برهن أن أي فضاء-T_2 و متراص موضعياً هو فضاء منتظم.

(**2**) برهن أن أي فضاء-T_2 و متراص موضعياً هو فضاء تام الانتظام.

(3) بفرض أن (X,τ) فضاء هاوسدورف و متراص موضعياً وأن H, A مجموعتان جزئيتان من X ، بحيث أن A مجموعة متراصة و H مجموعة مفتوحة و $A \subseteq H \neq X$. بين أنه توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث يكون $f(A) = \{0\}$ و $f(X-H) = \{1\}$.

(**4**) لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ عدد منته من المجموعات الجزئية المتراصة من الفضاء التوبولوجي (X,τ). فبرهن أن $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ يكون أيضا مجموعة متراصة.

(5) برهن أن الفضاء المتراص و المنتظم هو فضاء عادي.

(**6**) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة و (X,τ) فضاء توبولوجي متراص و (Y,υ) فضاء$-\mathrm{T}_2$ فبرهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة مغلقة.

(6.4) فضاءات بيير Baire Spaces

أخيراً سنختم هذا الفصل بتعريف و دراسة فضاءات بيير، سوف نبين أن كل من الفضاءات المترية التامة وفضاءات هاوسدورف المتراصة هي أنواع من فضاءات بيير .

تعريف (6.5)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي . يقال أن الفضاء (X,τ) يسمى فضاء بيير إذا كان لكل عائلة A_n قابلة للعد من المجموعات الجزئية المغلقة في X بحيث أن $(A_n)^o=\phi$. فإن $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)^o=\phi$.

مثال (6.12)

مجموعة الاعداد القياسية Q لا تحقق شروط فضاء بيير لأن Q هي اتحاد قابل للعد لمجموعاتها الوحيدة العنصر وكذلك $\{x\}$ مجموعة مغلقة و $\{x\}^o=\phi$ لكل $x\in Q$.

مثال (6.13)

مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة Z_+ تحقق شروط فضاء بيير لأن كل مجموعة جزئية في Z_+ مفتوحة و من ثم لا توجد محموعة جزئية ليس لها نقاط داخلية.

مثال (6.14)

كل فضاء متري تام، هو فضاء بيير.

تمهيدية (6.1)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن A_n عائلة قابلة للعد من المجموعات الجزئية المفتوحة و الكثيفة في X. الفضاء (X,τ) يكون فضاء بيير إذا و فقط إذا كان $\overline{\cap A_n} = X$.

البرهان

البرهان يمكن اسنباطة من ملاحظتين

(1) المجموعة $A \subseteq X$ تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $X - A$ مغلقة.

(2) $B^o = \phi \Leftrightarrow \overline{X - B} = X$.■

نظرية (6.13)

كل فضاء توبولوجي متراص وهاوسدورف، يكون فضاء بيير.

البرهان

نفرض أن $\{A_n\}$ عائلة معدودة من المجموعات المغلقة في (X,τ) بحيث أن $(A_n)^o = \phi$ في X ونحاول اثبات أن $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)^o = \phi$ في X. لاثبات ذلك نفترض أن $G_0 \neq \phi$ مجموعة جزئية مفتوحة في X .

بما أن $(A_n)^o = \phi$ فإننا نستطيع أن نجد نقطة x من G_0 لا تنتمي إلى أي من المجموعات المغلقة A_n.

بالنسبة للمجموعة الأولى A_1 فإنها لا تحوي المجموعة G_0، لذا باختيار النقطة $y \in G_0$ بحيث أن $y \notin A_1$. بمان أن الفضاء (X, τ) منتظم (متراص و T_2)

وأن A_1 مجموعة مغلقة فإنة توجد محموعة مفتوحة G_1 بحيث أن

$y \in G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq G_0$ و $y \in G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq A_1^c$.

أي أن

$\overline{G_1} \subseteq G_0$ و $\overline{G_1} \cap A_1 = \phi$.

بتكرار عملية اختيار المجموعات المغلقة A_n ، فإنه يمكن اختيار مجموعة مفتوحة G_{n-1}، وباختيار نقطة من G_{n-1} بحيث لا تقع في المجموعة المغلقة A_n.

فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_n بحيث أن

$\overline{G_n} \subseteq G_{n-1}$ و $\overline{G_n} \cap A_n = \phi$.

مما سبق ، نستنتج أن $\cap \overline{G_n} \neq \phi$. فإذا كانت $x \in \cap \overline{G_n}$ فإن $x \in G_0$ لأن $\overline{G_1} \subseteq G_0$ و لكل n النقطة x لا تنتمي إلى A_n لأن $\overline{G_n} \cap A_n = \phi$. برهان أن $\cap \overline{G_n} \neq \phi$ يعتمد على كون الفضاء X متراص و هاوسدورف . فإذا كان X فضاء هاوسدورف ومتراص ، باعتبار المتوالية المتداخلة

$$\overline{G}_1 \supset \overline{G}_2 \supset \ldots$$

من المجموعات الغير خالية من X. العائلة $\{\overline{G}_n\}$ تحقق خاصية التقاطع المنته لأن الفضاء متراص و من ثم يكون $\cap \overline{G_n} \neq \phi$.

نظرية (6.14)

أي فضاء جزئي مفتوح من فضاء بيير يكون فضاء بيير.

البرهان

نفرض أن (X,τ) فضاء بيير وأن (A,τ_A) فضاء جزئي مفتوح من الفضاء (X,τ). نفرض أن $\{B_n\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المغلقة في (A,τ_A) بحيث أن $(B_n)^o=\phi$ في (A,τ_A) ونحاول اثبات أن $(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)^o=\phi$ في (A,τ_A). لاثبات ذلك نفترض أن $\overline{B_n}$ هو انغلاق B_n في (X,τ)، فإن $\overline{B_n}\cap A=B_n$. بما أن (X,τ) هو فضاء بيير فإن $(\overline{B}_n)^o=\phi$. فإذا كانت $G\in\tau$ مجموعة غير خالية بحيث أن $G\subseteq\overline{B}_n$، فإن هذا يقتضي أن $G\cap A$ مجموعة مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A محتواة في $\overline{B}_n$ و هذا يتعارض مع الفرض بأن $(B_n)^o=\phi$

فإذا كان اتحاد المجموعات B_n يحوي مجموعة غير خالية $W\in\tau_A$، فإن اتحاد المجموعات $\overline{B}_n$ يحوي أيضا المجموعة W التي تنتمي أيضا للتوبولوجي τ لأن $A\in\tau$ و لكن $(\overline{B}_n)^o=\phi$ في X و هذا يتعارض مع الفرض بأن الفضاء (X,τ) هو فضاء بيير.■

تمارين (6.2)

(1) بين أن كل فضاء هاوسدورف متراص موضعياً هو فضاء بيير.

(2) بين أنه إذا كانت كل نقطة $x\in X$ لها جوار هو فضاء بيير ، فإن X يكون فضاء بيير.

(3) بين أن مجموعة الاعداد القياسية ليست فضاء بيير

(4) بين أن كل مجموعة مفتوحة من فضاء بيير هي فضاء بيير.

(5) بين أن كل فضاء متري تام هو فضاء بيير.

(6) بالاعتماد على نظرية بيير أثبت أن فضاء نيمتزكي ليس فضاءً عادياً.

(7) اثبت أن أي فترة في R لا يمكن أن تساوي اتحاد لانهائي قابل للعد لمجموعات مغلقة و غير متقاطعة و غير خالية.

(8) اثبت أن $R \setminus Q$ يمكن كتابته كتقاطع قابل للعد لمجموعات مفتوحة من R وأن Q لا يمكن كتابته كتقاطع قابل للعد لمجموعات مفتوحة.

(9) لتكن $f : R \to R$ دالة تحقق $\lim_{n\in N, n\to\infty} f(nx) = 0$ لكل $x \in R$

اثبت أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(10) لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق مالانهاية من المرات على $(0,1)$ بحيث أنه لكل x في $(0,1)$ يوجد $k \in N$ بحيث أن المشتقة النونية $f^{(n)}(x) = 0$. اثبت أن f كثيرة حدود.