جَامعة الملك فيصل
كلية العلوم
قسم الريَاضيَات
١٧ جمَادَى الثَّاني ١٤٢٩

تحليل دَالَى الَاختبَار النّهَائِي في سَاعتين

التمرين الَاول

ليكن F فضَاءً خطّيًا جزئِيًّا من فضَاءٍ معيَاريٍ حقيقيٍ $(E, ||\ ||)$ و ليكن $x_0 \neq 0$ عنصرًا من E

١) مَا هو نص نظريّة هَان بنَاخ

٢) بين أنّه توجد دَالة $\tilde{g} \in L(E, \mathbb{R})$ تحقِّق لِلشرطين التَّاليَين

أ) $\forall x \in E,\ |\tilde{g}(x)| \leq d(x, F)$ وَ ب) $\tilde{g}(x_0) = d(x_0, F)$.

٣) إستنتج من السُّؤَال السَابق أنّه توجد دَالة خطّية l و متّصلة علَى E تحقِّق

$$\forall x \in E, ||x|| < ||x_0|| \ \Rightarrow\ l(x) < l(x_0)$$

التمرين الثَّاني

ليكن H فضَاء بنَاخ و F و G فضَاءين جزئِيَين مغلقين من H يحقّقَان $F \bigcap G = \{0\}$ و $F + G$ مغلق

١) بين انّ الدَالة $\phi : F \times G \to F + G$ المعرّفة حسب $\phi(x, y) = x + y$ تقَابل متّصل

٢) إستنتج أنّه توجد $c \geq 0$ بحيث

$$\forall (x, y) \in F \times G, \sup(||x||, ||y||) \leq c||x + y||$$

٣) بين أنّ بعد H يكون متنهي إِذَا و فقط إِذَا كلّ دَالة خطّية علَى H تكون متّصلة

٤) بين أنّ بعد H يكون متنهي إِذَا و فقط إِذَا كلّ فضَاء جزئِي F من H يكون مغلقًا

التمرين الثَّالث

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة الرسم المغلق مع نص النظريّة التي تستعملهَا في

البرهان

٢) ليكن
$$\begin{array}{llll} T: & (\mathcal{C}([-\pi,\pi]), \|\ \|_2) & \rightarrow & (\mathcal{C}([-\pi,\pi]), \|\ \|_\infty) \\ & f & \rightarrow & 2f \end{array}$$

أ) هل T^{-1} متّصلة و هل رسمهَا مغلق

ب) هل T متّصلة و هل رسمهَا مغلق مَا العبرة

جَامعة الملك فيصل

كلية العلوم

قسم الريَاضيَات ٢٤ صفر ١٤٢٤

تحليل دَالَى الَاختبَار الَاول في سَاعتين

التمرين الَاول ليكن H فضَاء هلبَارت و $u : H \to H$ بحيث
$$\forall (x,y) \in H \times H, < u(x), y > = < x, u(y) >$$

١) بين أنّ u هو مُؤثر خطي

٢) بين أنّ $\forall y \in H,\ x \to < u(x), y >$ هي دَالة خطية متّصلة. مَا هو معيَارهَا.

٣) اذكر نظرية الحد المنتظم و بين أنّه ان كَانت $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ فَانّ $\{x \to < x, u(y_n) >, n \in \mathbb{N}\}$ تكون محدودة في $L(H, \mathbb{C})$

٤) أستنتج أنّ u مُؤثر خطي متّصل

التمرين الثَاني ليكن H فضَاء هلبَارت F فضَاء جزئِي ذي بعد متهي و G فضَاء جزئِي مغلق من H و $A \in H$

١) بين انّ الَاسقَاط P علَى $A + F = \{A + x, x \in F\}$ تكون دَالة متّصلة

٢) لكلّ $x \in F$ لتكن $f(x) = d(A + x, G)$ المسَافة بين $A + x$ و G بين انّ $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$ إن و فقط إن كَان $F \bigcap G = \{0\}$

٣) لنفترض أنّ $F \bigcap G = \{0\}$ بين أنّه يوجد $a \in A + F$ و $b \in G$ بحيث $\|a - b\| = d(A + F, G)$

٤) بين أنّ $b - a$ يكون متعَامد مع كلّ عنصر من $F + G$

٥) بين في جميع الحَالَات أنّه يوجد $a \in A + F$ و $b \in G$ بحيث $\|a - b\| = d(A + F, G)$

التمرين الأول ليكن F فضَاء جزئِي مغلق من فضَاء هلبَارت حقيقي $(E, || \,||)$ و $F \neq E$ و $f : F \to \mathbb{R}$ دَالة خطّيّة

١) بيّن أنّ f تكون متّصلة إِذَا و فقط إِذَا كَان $kerf$ مغلقًا في E

٢) بيّن أنّه يوجد $a \in E$ بحيث $||a|| = 1$ و $d(a, F) = 1$

٣) بيّن أنّه إِذَا كَانت f متّصلة فإِنّه توجد دَالة خطّيّة $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ تحقّق $\forall x \in F, \tilde{f}(x)) = f(x)$ و $||f|| = ||\tilde{f}||$

٤) ليكن K متَرَاصّ من E بيّن أنّ $\{x \in K, ||x|| < 1\}$ هو فضَاء بَار. لنفترض أنّ f غير متّصلة بيّن أنّ دَاخليّة K تكون فَارغة $K^\circ = \emptyset$

التمرين الثّاني

ليكن $(E, || \,||)$ فضَاء بَنَاخ و $E' = L(E, \mathbb{R})$

١) أورد نصّ و برهَان نظريّة الدَّالة المفتوحة

٢) ليكن N معيَار ثَاني بحيث يكون (E, N) فضَاء بَنَاخ

و $\forall x \in E, N(x) \leq ||x||$ بيّن أنّ المعيَارين متكَافئِان.

٣) بيّن أنّ $E' = L(E, \mathbb{R})$ فضَاء بنَاخ و أنّ الدَّالة ψ المعرّفة علَى $E' \times E$ حسب $\psi(f, x) = f(x)$ هي ثنَائِيّة الخطّية $(bilinear)$ و متّصلة

٤) لتكن b دَالة ثنَائِيّة الخطّية علَى $E' \times E$ بيّن أنّ الدَالة b تكون متّصلة إِذَا و فقط إِذَا وجد $M > 0$ يحقّق

$$b(f, x) \leq M||f||||x||$$

التمرين الثَّالث ليكن $G = \{f \in L^2([-\pi, \pi]); \int_{-\pi}^{0} f(t)dt - \int_0^\pi f(t)dt = 1\}$

١) بيّن أنّ G مغلق و محدّب في $(L^2([-\pi, \pi]), || \,||_2)$

٢) إِستنتج أنّه يوجد $g \in L^2([-\pi, \pi])$ وحيد يحقّق $||g||_2 = \inf\limits_{f \in F} ||f||_2$ أوجد g .

٣) في $(\mathcal{C}([-\pi, \pi]), || \,||_\infty)$ بيّن أنّ $F = \{f \in G \bigcap \mathcal{C}([-\pi, \pi]), ||f||_\infty \leq 2\}$ مغلق و محدّب و غير متَرَاص. و لَا يوجد $h \in F$ يحقّق $||h||_\infty = \inf\limits_{f \in F} ||f||_\infty$. هل في $(\mathcal{C}([-\pi, \pi]), || \,||_\infty)$ تتحقّق معَادلة متوَازي الأضلَاع.